

А. А. Кабанов, канд. техн. наук, доц., KabanovAleksey@gmail.com,
Севастопольский государственный университет

Линеаризация обратной связью непрерывных и дискретных многомерных систем¹

Рассматриваются нелинейные непрерывные и дискретные динамические системы с векторным управлением. Приводится явный вид канонического преобразования подобия, обеспечивающего матрицу замкнутой преобразованной системы форму Фробениуса. Решение задачи линеаризации обратной связью выполняется на основе представленных преобразований подобия. Полученные результаты иллюстрируются примерами для непрерывных и дискретных нелинейных систем.

Ключевые слова: линеаризация обратной связью, многомерная система, каноническое преобразование

Введение

Одним из распространенных методов анализа и синтеза нелинейных систем является "обычная" линеаризация — линеаризация, основанная на разложении нелинейной функции в окрестности точки (функции), определяющей заданный режим, в ряд Тейлора и отбрасывании нелинейных членов. Обычная линеаризация заменяет исходную нелинейную модель приближенной линейной моделью и обладает рядом недостатков, что в совокупности может гарантировать асимптотическую устойчивость замкнутой системы, синтезированной на основе обычной линеаризованной модели, лишь на конечном интервале, тогда как синтезированная линейная система асимптотически устойчива в целом.

Наряду с линеаризацией в окрестности точки рассматривают и другой способ линеаризации, основанный на преобразовании обратной связью [1, 2]. Такой переход от нелинейной системы к линейной путем преобразования, включающего преобразование обратной связью, называют линеаризацией обратной связью.

Линеаризация обратной связью (ЛОС) является не приближенным, а эквивалентным преобразованием: в результате ЛОС получается система, эквивалентная исходной системе. При ЛОС исходное управление u заменяется новым управлением v . Функция преобразования, кроме нового управления, включает вектор состояния (в частном случае только выходную переменную). Поэтому при этом преобразовании объект охватывается обратной связью.

В общем случае возникает вопрос: существует ли преобразование обратной связью, обеспечивающее линеаризацию той или иной системы? Широко известным подходом к решению задачи ЛОС является метод преобразования системы к нормальной форме [1, 2]. Чтобы получить нормальную

форму системы в окрестности некоторой точки, нужно указать специальную функцию — выход системы, для которой в этой точке определена относительная степень в скалярном случае или векторная относительная степень в случае векторного управления. При этом основная сложность при синтезе сигнала управления v заключается в переходе от преобразованных переменных к фазовым переменным исходной системы. Метод приведения к нормальной форме применим при соблюдении условий управляемости и инволютивности для рассматриваемой нелинейной системы, что не всегда имеет место.

Другой подход, предложенный в работе [3], заключается в применении специальных преобразований подобия, позволяющих привести систему к каноническому виду, что затем существенно упрощает задачу линеаризации обратной связью. Предложенные в работе [4] канонические преобразования позволяют выполнить линеаризацию без расчета вспомогательной выходной переменной $y = h(x)$. Еще одно преимущество данного подхода заключается в более простой технике перехода от фазовых координат преобразованной системы к переменным состояния исходной системы. Указанный метод применим к непрерывным и к дискретным нелинейным нестационарным системам. Соответствующие результаты по синтезу канонического преобразования для систем со скалярным управлением даны в работах [4, 5].

В данной статье предлагается развитие существующих результатов на случай систем с векторным управлением. Некоторые результаты в этом направлении для непрерывных систем представлены в работе [6]. Статья построена следующим образом: первый раздел содержит постановку задачи; второй раздел посвящен решению задачи ЛОС для непрерывных и дискретных систем с векторным управлением; примеры построения ЛОС на основе разработанного метода приводятся в третьем разделе; в заключении представлены основные выводы.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-06859).

1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная аффинная система

$$\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^r g_i(x)u_i \quad (1)$$

в непрерывном случае, и система вида

$$x(k+1) = f(x(k)) + \sum_{i=1}^r g_i(x(k))u_i(k), \quad (1a)$$

— в дискретном случае, где $x \in R^n$ — вектор состояния; $u \in R^r$ — вектор управления; $f(x)$ и $g_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые (по всем аргументам) функции с ограниченными производными.

Проблема ЛОС системы (1) (или (1a) в дискретном случае) состоит в поиске невырожденного преобразования $z = T_{FL}(x)$ и управления $u = u_{FL}$, с помощью которых система (1) (или (1a)) может быть приведена к канонической форме с Фробениусовой матрицей состояния с последней функциональной строкой.

Для случая скалярного управления ($r = 1$) при условии существования некоторой скалярной непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$ преобразование $z = T_{FL}(x)$ определяется выражением [1, 2]

$$T_{FL}(x) = (h(x) \ L_f^1 h(x) \ \dots \ L_f^{n-1} h(x))^T \quad (2)$$

и ЛОС задается в виде

$$\begin{aligned} u_{FL} &= -\alpha(x)/\beta(x) + v/\beta(x), \\ \alpha(x) &= L_f^n h(x), \beta(x) = L_g L_f^{n-1} h(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где v — новый управляющий вход; $L_f^i h(x)$ — производная Ли i -го порядка от скалярной функции $h(x)$ вдоль векторного поля f .

Применение ЛОС (3) и преобразования (2) приводит систему (1) к виду

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z + \tilde{b}v, \quad (4)$$

где $(\tilde{A}, \tilde{b})$ — каноническая пара в форме Бруновского ($\tilde{A}$ — Фробениусова матрица, $\tilde{b}$ — столбец, все элементы которого равны 0, а последний равен 1).

Указанная процедура синтеза ЛОС называется методом нормальной формы, применимость которого обеспечивается соблюдением условий [1, 2]

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= L_g L_f^1 h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0, \\ \beta(x) &= L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0, \end{aligned}$$

что не всегда имеет место. В таких ситуациях, как правило, пользуются методами синтеза приближенной ЛОС [7–10].

В данной статье рассматривается альтернативный подход к синтезу ЛОС, основанный на ис-

пользовании канонического преобразования подобия вида

$$z = T(x)x, \ x = T^{-1}(x)z. \quad (5)$$

Требуется найти управление u и матрицу $T(x)$ преобразования (5), которые бы преобразовывали систему (1) (или в дискретном случае систему (1a)) к линейному каноническому виду.

Для непрерывных и дискретных нелинейных систем со скалярным управлением такое преобразование было предложено, соответственно, в работах [4, 5]. В данной работе рассматривается задача применения указанного подхода в случае систем с векторным управлением.

2. Решение задач линеаризации обратной связью

2.1. Непрерывные системы

Рассмотрим сначала систему со скалярным управлением, т. е. $r = 1$. Представим систему (1) в форме модели пространства состояний с коэффициентами, зависящими от состояния (state-dependent coefficient, SDC-форма) [11]:

$$\dot{x}(t) = A(x)x + b(x)u. \quad (6)$$

Предположим, что $(n \times n)$ -мерная матрица $A(x)$ и $(n \times 1)$ -мерный вектор $b(x)$ непрерывны и дифференцируемы, имеют ограниченные производные. Также предполагается, что пара $(A(x), b(x))$ является полностью управляемой, т. е. для матрицы управляемости системы (6) существует такое число ε , что

$$|\det(W(x))| > \varepsilon > 0, \ x \in R^n, \ t \geq t_0,$$

$$W(x) = (b(x) \ L_1(x)b(x) \ \dots \ L_{n-1}(x)b(x)).$$

Здесь $L_f^i(x)$ — матрица i -й производной от вектора x в силу однородной системы $\dot{x}(t) = A(x)x$, вычисляется из соотношений (здесь " $\cdot$ " — аргумент) [4]

$$L_1(\cdot) = A(\cdot), \ L_k(\cdot) = (d/dt + A(\cdot))L_{k-1}(\cdot).$$

Применяя преобразование (5) к выражению (6), получаем систему (4), для которой выполняются следующие соотношения (зависимость от x опустим)

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{A}(z)z + \tilde{b}u, \\ \tilde{A}(z) &= TAT^{-1} + \dot{T}T^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n(z) & a_{n-1}(z) & a_{n-2}(z) & \dots & a_1(z) \end{pmatrix}, \\ \tilde{b} &= Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Линеаризующее управление для канонической системы (7) можно определить в виде обратной связи $u(z) = K(z)z + v(z)$, $K = -(a_n(z) a_{n-1}(z) \dots a_1(z))$. (8)

С точки зрения переменных состояния исходной системы управления ЛОС (8) можно записать в виде

$$u(x) = u_{FL}(x) + v(x) = K(x)T(x)x + G_C T(x)x. \quad (9)$$

Методика расчета канонического преобразования (5) подробно описана в работе [4]. Запишем только конечный результат:

$$T(x) = \{T_i(x)\}, i = \overline{1, n},$$

$$T_{i+1}(x) = \frac{d^i}{dt^i}(\bar{G}) + C_i^1 \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \bar{G} L_1(x) + \dots + \bar{G} L_i(x),$$

$$\bar{G} = e_n G^{-1}(x), e_n = (0 \ 0 \ \dots \ 1),$$

$$G(x) = (g_1, g_2, \dots, g_n), k = \overline{0, n-1},$$

$$g_{k+1}(x) = L_k(x)b(x) - C_k^1 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b(x)) + \\ + C_k^2 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b(x)) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} b(x), \quad (10)$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты (k, j) .

Преобразование (5), (10) существует тогда и только тогда, когда матрица управляемости $W(x)$ системы (6) — невырожденная для всех $x \in R^n$, $t \geq t_0$ [4].

В многомерном случае система (1) в SDC-форме задается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(x)x + B(x)u. \quad (11)$$

Матрицы $A(x)$ и $B(x)$ — $(n \times n)$ -мерная и $(n \times r)$ -мерная соответственно, непрерывны и дифференцируемы, имеют ограниченные производные. Предположим, что система управляема, т. е. предполагается, что $n \times (nr)$ -мерная матрица управляемости

$$W(x) = (B(x) L_1(x) B(x) \dots L_{n-1}(x) B(x)) \quad (12)$$

имеет ранг n для всех $x \in R^n$, $t \geq t_0$.

Каноническое преобразование подобия строится из независимых столбцов матрицы управляемости (12). Первым шагом в построении данного преобразования подобия является выбор n линейно независимых векторов из nr столбцов матрицы управляемости.

С системой (11) будем ассоциировать n чисел $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ [12] (зависимость от x опустим):

$$r_0 = \text{rank} B, 1 \leq j \leq n-1;$$

$$r_j = \text{rank}(B, AB, \dots, A^j B) - \text{rank}(B, AB, \dots, A^{j-1} B).$$

Кроме того, $0 \leq r_j \leq r$ для $0 \leq j \leq n-1$ и $\sum_{j=0}^{n-1} r_j = n$, $r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_{n-1}$.

С каждым столбцом $B(x)$ можно связать числа p_i (p_i — это число $r_j \geq i$), такие что $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{r_0} > 0$,

$$\sum_{i=0}^r p_i = n.$$

Выбранные n линейно независимых векторов содержат столбцы матрицы $G(x)$ с r_0 группами столбцов, т. е. вектора g_{ip_i} , $i = \overline{1, r_0}$:

$$G(x) = (g_{11}, \dots, g_{1p_1}, \dots, g_{r_0 1}, \dots, g_{r_0 p_{r_0}}),$$

$$g_{i(k+1)}(x) = L_k(x)b_i(x) - C_k^1 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b_i(x)) + \\ + C_k^2 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b_i(x)) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} b_i(x), \\ i = \overline{1, r_0}, k = \overline{0, p_i}.$$

Матрица преобразования определяется следующим образом:

$$T(x) = (t_{11}^T, \dots, t_{1p_1}^T, \dots, t_{r_0 1}^T, \dots, t_{r_0 p_i}^T)^T,$$

$$i = \overline{1, r_0}, k = \overline{0, p_i}, \bar{G} = e_{in} G^{-1}(x),$$

$$t_{i(k+1)} = \frac{d^k}{dt^k}(\bar{G}) + C_k^1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \bar{G} L_1(x) + \dots + \bar{G} L_k(x), \quad (13)$$

где e_{in} , $i = \overline{1, r_0}$ — n -мерный вектор, i -й элемент которого равен 1.

Применяя к системе (11) преобразование (13), мы получаем

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}(z)z + \tilde{B}(z)u;$$

$$\tilde{A} = T(x)A(x)T^{-1}(x) + \dot{T}(x)T^{-1}(x); \tilde{B} = T(x)B(x);$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{r_0} & E_{r_0 r_1} & \dots & E_{r_0(r_{n-1})} \\ E_{r_1 r_0} & J_{r_1} & E_{r_1 r_2} & \dots & E_{r_1(r_{n-1})} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ E_{(r_{n-2})r_0} & \dots & J_{(r_{n-2})} & E_{(r_{n-2})(r_{n-1})} \\ E_{(r_{n-1})r_0} & \dots & E_{(r_{n-1})(r_{n-2})} & J_{(r_{n-1})} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} e_{p_1 p_1} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ 0 & e_{p_2 p_2} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0} p_{r_0}} \end{pmatrix}; \quad (14)$$

где

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{k_1}(x) & a_{k_2}(x) & \dots & a_{kk}(x) \end{pmatrix};$$

$$E_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{k_1}(x) & \dots & a_{kl}(x) \end{pmatrix}; B_{km} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{km} \end{pmatrix}.$$

Приведенные матрицы имеют следующие размерности:

$$J_k - (k \times k), E_{kl} - (k \times l), B_{km} - (k \times 1),$$

$$k = r_0, r_1, \dots, r_n - 1; l = r_0, r_1, \dots, r_n - 1; m = 2, 3, \dots, r.$$

Матрица $\tilde{B}(x)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{B}(x) = \hat{B} C, C - (r \times r)\text{-мерная матрица};$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} e_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{pr_0} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку C является невырожденной матрицей, существует новая эквивалентная система ввода $\hat{u} = Cu$.

ЛОС для канонической системы (14) может быть определена в виде обратной связи

$$u(z) = u_{FL}(z) + v(z) = C^{-1}(K(z)z + v(z));$$

$$K = - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1(n-1)} & k_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \\ k_{r1} & k_{r1} & \dots & k_{r(n-1)} & k_{rn} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Вместо элементов k_{ij} необходимо взять соответствующие элементы матриц J_k, E_{kl} .

2.2. Дискретные системы

При $r = 1$, т. е. в случае скалярного управления, система (1a) в SDC-форме примет вид

$$x(k+1) = A(x(k))x(k) + b(x(k))u(k), \quad (16)$$

где $x(k)$ — вектор состояния в момент времени k , $(n \times n)$ -мерная матрица $A(x)$ и $(n \times 1)$ -мерный вектор $b(x)$ равномерно ограничены. Введя обозначения

$$x(k) = x_k, A(x(k)) = A_k, b(x(k)) = b_k,$$

определим оператор сдвига p_k на j шагов вперед с шага k в силу однородной системы $x_{k+1} = A_k x_k$: $p_k x_k = A_k x_k$, $p_k^j = L_k^j(x_k)$, $L_k^j(x_k) = \prod_{i=0}^{j-1} A_{k+i}$.

Предполагаем, что система (16) полностью управляема, и соответствующая ей матрица управляемости

$$W_k = (b_k A_k b_{k-1} \dots A_k \dots A_{k-n+1} b_{k-n+1}) \quad (17)$$

является невырожденной.

Введем в рассмотрение преобразование подобия [5]

$$z_k = T_{k+1-n}(x_{k+1-n}, \dots, x_k)x_{k+1-n}, \quad (18)$$

полагая $z_k = (z_k^1, \dots, z_k^n)^T$,

$$z_k^1 = m_{k+1-n}^T x_{k+1-n}, z_{k+1}^1 = m_{k+2-n}^T x_{k+2-n},$$

$$z_k^2 = m_{k+2-n}^T p_k x_{k+1-n}, z_{k+1}^2 = m_{k+3-n}^T p_{k+1} x_{k+2-n},$$

:

$$z_k^n = m_k^T p_k^{n-1} x_{k+1-n}, z_{k+1}^n = m_{k+1}^T p_{k+1}^{n-1} x_{k+2-n}. \quad (19)$$

Расчет производящего вектора m_k :

$$m_k^T = e_1^T G_k^{-1}, k \geq n-1, m_j^T b_0 = 0, j < 0,$$

$$G_k = (L_{k+1-n}^{n-1} b_{k-n} L_{k+2-n}^{n-2} b_{k+1-n} \dots b_{k-1}).$$

Преобразованная система

$$z_{k+1} = \tilde{A}_k z_k + \tilde{b}_k u_{k+1-n},$$

$$\tilde{A}_k = T_{k+2-n} A_{k+1-n} T_{k+1-n}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_k^n & a_k^{n-1} & a_k^{n-2} & \dots & a_k^1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_k = T_{k+2-n} b_{k+1-n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Линеаризующее управление для канонической системы (20) можно определить в виде обратной связи

$$u_{k+1-n} = u_{FL_{k+1-n}} + v_{k+1-n} =$$

$$= K_{k+1-n} z_k + G_{k+1-n} z_k,$$

$$K_{k+1-n} = -(a_k^n a_k^{n-1} \dots a_k^1). \quad (21)$$

В терминах переменных состояния исходной системы управление (21) с ЛОС можно записать в виде

$$u_k = K_k T_k x_k + G_k T_k x_k, k \geq n-1. \quad (22)$$

Преобразование (18), (19) существует тогда и только тогда, когда матрица управляемости (17) W_k — невырожденная для всех $x_k \in R^n$, $k \geq 0$ [5].

Рассмотрим многомерный случай системы в SDC-форме:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad (23)$$

где матрицы A_k и B_k — $(n \times n)$ -мерная и $(n \times r)$ -мерная, равномерно ограниченные.

Предположим, что система управляема, т. е. предполагается, что $n \times (nr)$ -мерная матрица управляемости

$$W_k = (B_k A_k B_{k-1} \dots A_{k-n+1} B_{k-n+1})$$

имеет ранг n для всех $x_k \in R^n$, $k \geq 0$.

По аналогии с непрерывным случаем будем ассоциировать с системой (23) n чисел $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$:

$$r_0 = \text{rank } B_k, \quad 1 \leq j \leq n-1;$$

$$r_j = \text{rank}(B_k, A_k B_k, \dots, A_k^{j-1} B_k) - \text{rank}(B_k, A_k B_k, \dots, A_k^{j-2} B_k);$$

$$0 \leq r_j \leq r, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad \sum_{j=0}^{n-1} r_j = n, \quad r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_{n-1}.$$

С каждым столбцом b_k^i матрицы B_k свяжем число $p_i = r_j \geq i$ такое, что $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{r_0} > 0$,

$$\sum_{i=1}^r p_i = n.$$

Выбранные n линейно независимых векторов содержат столбцы матрицы G_k с r_0 группами столбцов, т. е. вектора g_{ip_l} , $i = \overline{1, r_0}$:

$$G_k = (g_k^{11}, \dots, g_k^{1p_1}, \dots, g_k^{r_0 1}, \dots, g_k^{r_0 p_{r_0}}),$$

$$g_k^{i(l+1)} = L_{k+1-p_i}^{p_i-l-1} b_{k-p_i+1}^i, \quad i = \overline{1, r_0}, \quad l = \overline{0, p_i-1},$$

при этом получаем набор образующих векторов m_{ik} , $i = \overline{1, r_0}$:

$$(m_k^i)^T = e_{n-p_i}^T G_k^{-1}, \quad k \geq n-1, \quad m_k^T b_0^i = 0, \quad k < 0, \quad i = \overline{1, r_0}, \quad (24)$$

которые используются для формирования матрицы преобразования

$$\begin{aligned} T_{k+1-n}(x_{k+1-n}) &= ((t_{k+1-n}^{11})^T, \dots, (t_{k+1-n}^{1p_1})^T, \dots, \\ &\dots, (t_k^{r_0 1})^T, \dots, (t_{k+1-n}^{r_0 p_{r_0}})^T)^T, \\ t_{k+1-n-p_i+l}^{i(l+1)} &= m_{k-p_i+l}^i L_{k-p_i+l}^l, \\ i &= \overline{1, r_0}, \quad l = \overline{0, p_i-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Применяя к системе (23) преобразование (25), получаем

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \tilde{A}_k z_k + \hat{B}_k u_{k+1-n}, \\ \tilde{A}_k &= T_{k+2-n} A_{k+1-n} T_{k+1-n}^{-1}, \\ \hat{B}_k &= T_{k+2-n} B_{k+1-n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Структура матриц системы (26) показана ниже (нижние индексы при матрицах обозначают их размер):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= \begin{pmatrix} J_{r_0} & E_{r_0 r_1} & \dots & E_{r_0(r_n-1)} \\ E_{r_1 r_0} & J_{r_1} & E_{r_1 r_2} & \dots & E_{r_1(r_n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ E_{(r_{n-2})r_0} & \dots & J_{(r_{n-2})} & E_{(r_{n-2})(r_n-1)} \\ E_{(r_{n-1})r_0} & \dots & E_{(r_{n-1})(r_n-2)} & J_{(r_{n-1})} \end{pmatrix}, \\ \hat{B}_k &= \begin{pmatrix} e_{p_1 p_1} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ 0 & e_{p_2 p_2} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0} p_{r_0}} \end{pmatrix}, \quad J_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_k^{l1} & a_k^{l2} & \dots & a_k^{ll} \end{pmatrix}, \\ E_{lj} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_k^{l1} & \dots & a_k^{lj} \end{pmatrix}, \quad B_{lm} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_k^{lr} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Размеры матриц из последнего выражения приведены ниже:

$$J_l - (l \times l), \quad E_{lj} - (l \times j), \quad B_{lm} - (l \times 1), \quad l = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; \quad j = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; \quad m = 2, 3, \dots, r.$$

Матрица $\hat{B}_k(x)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k(x) &= \tilde{B} C_k, \quad C_k - (r \times r)\text{-мерная матрица;} \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} e_{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_{p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0}} \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку C_k — невырожденная матрица, существует эквивалентный вход $\tilde{u} = C_k u$.

ЛОС для канонической системы (26) может быть определена в виде

$$\begin{aligned} u_k(z) &= C_k^{-1} (K_k(z_k) z_k + v_k(z_k)), \\ K_k(z_k) &= - \begin{pmatrix} k_k^{11} & k_k^{12} & \dots & k_k^{1(n-1)} & k_k^{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_k^{r1} & k_k^{r2} & \dots & k_k^{r(n-1)} & k_k^{rn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Вместо элементов k_{ij} необходимо принимать соответствующие элементы матрицы J_k , E_{kl} .

4. Примеры применения разработанного метода

Следует сказать, что указанный подход применим в ряде задач, где использование метода нормальной формы недопустимо. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1 [13]. Рассмотрим следующую нелинейную систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= u; \\ h(x) &= x_2.\end{aligned}\quad (28)$$

Данная система не линеаризуема обратной связью (3), поскольку не выполнены соответствующие условия [13]. Применим предлагаемый метод для синтеза ЛОС. Найдем матрицу управляемости системы (12) и матрицу преобразования (5):

$$W(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризующее управление (9) примет вид

$$u(x) = K(x)T(x)x + v, \quad K(x) = 0. \quad (29)$$

Применяя замену $z = T(x)x$ и управление (29) к системе (28), получаем

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = v, \quad h(z) = z_2 = x_2. \quad (30)$$

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему с векторным управлением:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 + u_1; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_3 + 2u_2; \\ \dot{x}_3 &= (x_1 - 1)x_2 + u_2.\end{aligned}\quad (31)$$

Задача заключается в стабилизации системы посредством обратной связи.

Для системы (31) имеем: $r_0 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Матрицы преобразования:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & x_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2x_2+1} & \frac{2}{2x_2+1} \\ 1 & \frac{2(x_1+2x_2-2x_3+1)}{(2x_2+1)^2} & \frac{2(2x_2-2x_1+4x_3+1)}{(2x_2+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{4x_2+2} & \frac{1}{2x_2+1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы при состоянии и управлении в преобразованной системе:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(x) &= \begin{pmatrix} J_1 & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{13} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & b_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ E_{21} &= (a_{21} \ a_{22}); \quad E_{22} = a_{23}; \quad b_{11} = -6/(2x_2 + 1); \\ a_{11} &= (4x_1^2 - 8x_1x_2^2 - 4x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2^3 - \\ &\quad - 6x_2^2 + 8x_2x_3 + x_2 + 16x_3^2 + 4x_3 - 8)/(2x_2 + 1)^2; \\ a_{12} &= (2x_1 - 4x_3 + 3)/(2x_2 + 1); \\ a_{13} &= 2(4x_2^3 + 4x_2^2 + x_2 - 6x_1 + 12x_3 + 9)/(2x_2 + 1)^2; \\ a_{21} &= (2x_2^2 + x_1 - 2x_3 + 1)/(2x_2 + 1), \\ a_{22} &= 0, \quad a_{23} = 1 - 3/(2x_2 + 1).\end{aligned}$$

Линеаризующее управление (15) примет вид

$$u(z) = C^{-1}(K(z)z + v), \quad K(z) = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Рассмотрим непрерывную систему из примера 1, которую дискретизуем, приняв $\dot{x}_i = x_i(k+1) - x_i(k)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3^2(k); \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + x_3(k); \\ x_3(k+1) &= x_3(k) + u(k).\end{aligned}\quad (32)$$

Найдем матрицу управляемости системы (17) и определим ее ранг:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & x_3(k) & x_3(k) + x_3(k-1) + 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } W = 3,$$

$$x_3(k) - x_3(k-1) - 1 \neq 0.$$

Матрица G_k и образующий вектор m_k^T имеют вид

$$G_k = \begin{pmatrix} x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1 & x_3(k-1) & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$m_k^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1} & \frac{x_3(k-1)}{x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования (18) примет вид

$$T_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_3(k-4)-x_3(k-3)+1} & \frac{x_3(k-3)}{x_3(k-4)-x_3(k-3)+1} & 0 \\ \frac{1}{x_3(k-3)-x_3(k-2)+1} & \frac{x_3(k-2)-1}{x_3(k-3)-x_3(k-2)+1} & 0 \\ \frac{1}{x_3(k-2)-x_3(k-1)+1} & \frac{x_3(k-1)-2}{x_3(k-2)-x_3(k-1)+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя преобразование $z_k = T_k(x)x_{k-2}$ к системе (32), получаем

$$z_{k+1} = \tilde{A}_k z_k + \tilde{b}_k u_{k-2};$$

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3(x) & a_2(x) & a_1(x) \end{pmatrix}; \tilde{b}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$a_1(x) = \frac{x_3(k-4)-x_3(k-3)+1}{x_3(k-3)-x_3(k-2)+1};$$

$$a_2(x) = \frac{x_3(k-1)+x_3(k-2)-2x_3(k-3)+3}{x_3(k-2)-x_3(k-1)+1};$$

$$a_1(x) = \frac{x_3(k-2)-x_3(k-1)+1}{x_3(k-1)-x_3(k)+1} + 2. \quad (33)$$

ЛОС для системы (37):

$$u_k = K_k T_k x_k + v_k;$$

$$K_k = -(a_3(x) \ a_2(x) \ a_1(x)).$$

Пример 4 [14]. Рассматривается дискретная система вида

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k);$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) - g \sin x_3(k) + x_1 u^2(k);$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + u(k). \quad (34)$$

Введя замену $u(k) = u_1(k)$, $u^2(k) = u_2(k)$, запишем систему (34) в векторно-матричной форме:

$$x_{k+1} = A(x_k)x_k + B(x_k)u_k;$$

$$A(x_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(x_3(k))}{x_3(k)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Определим для системы (35) числа $r_0 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Матрицы, задающие каноническое преобразование:

$$G_k = \begin{pmatrix} x_1(k-2) & 1 & 0 \\ x_1(k-2) & -1 & 2 \\ 0 & x_2 & 1 \end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1(k-3)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{x_1(k-2)} & \frac{1}{x_1(k-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы при состоянии и управлении в преобразованной системе:

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} J_1 & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}; \hat{B}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix};$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{13} \end{pmatrix}; C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; E_{21} = (0 \ 0), E_{22} = 1,$$

$$a_{11} = \frac{x_1(k-3)}{x_1(k-1)}; a_{12} = \frac{2x_1(k-2)}{x_1(k-1)}; a_{13} = \frac{\sin x_3(k-1)}{x_1(k-1)x_3(k-1)}.$$

ЛОС (27) примет вид:

$$u_k(z_k) = K_k(z_k)z_k + v, K_k(z_k) = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заключение

В работе предложен метод ЛОС на основе канонического преобразования подобия исходной нелинейной системы в SDC-форме. Данный метод применим к нелинейным непрерывным и к дискретным системам. Соответствующие результаты по синтезу канонических преобразований для нелинейных систем со скалярным управлением даны в работах [4, 5]. В данной работе получены соответствующие результаты для систем с векторным управлением.

Рассмотренные преобразования подобия позволяют выполнить линеаризацию систем без расчета вспомогательных выходных переменных $y = h(x)$. Другое преимущество данного подхода заключается в более простой технике перехода от фазовых координат преобразованной системы к переменным состояния исходной системы. Кроме того, как показано на примере, предлагаемый метод применим в ряде случаев, где использование метода приведения к нормальной форме не допустимо.

Список литературы

1. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
2. Isidori A. Nonlinear control systems. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. Кабанов А. А., Крамарь В. А. Линеаризация обратной связи нелинейных систем на основе канонического преобразования подобия // Материалы Всероссийской конференции по проблемам управления в технических системах, Санкт-Петербург, 26–29 октября, 2015. С. 10–13.
4. Зубер И. Е. Синтез канонических преобразований подобия для нелинейных нестационарных динамических систем управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2003. № 4. С. 38–51.
5. Зубер И. Е. Канонические преобразования и стабилизация нелинейных дискретных систем управления // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2004. Вып. 1 (№ 1). С. 6–13.
6. Kabanov A. A. Full-state Linearization of Systems via Feedback Using Similarity Transformation // 2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Proceedings. National Research University Higher School of Economics. Russia, Moscow, May 12–14, 2016.
7. Guardabassi G. O. Approximate linearization via feedback: an overview / G. O. Guardabassi, S. M. Savaresi // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 1–15.

8. Yamada K. Approximate feedback linearization for nonlinear systems and its application to the ACROBOT // Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK, 2002. P. 1672–1677.
9. Кабанов А. А. Приближенная линеаризация обратной связи на основе сингулярно возмущенного подхода // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. № 8. С. 515–522.
10. Kabanov A. A. Composite Control for Nonlinear Singularly Perturbed Systems Based on Feedback Linearization Method // WSEAS Transactions on Systems. 2015. Vol. 14. P. 215–221.
11. Çimen T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey // Proceedings of the 17th World Congress the Inter-

- national Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3761–3775.
12. Brunovský P. A classification of linear controllable system // Kybernetika. 1970. Vol. 6. No. 2. P. 173–188.
13. Kang W. Approximate linearization of nonlinear control systems / W. Kang // Systems & Control Letters. 1994. Vol. 23. P. 43–52.
14. Tall I. A. Canonical Forms for Nonlinear Discrete Time Control Systems // Proc. of 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011. P. 1080–1085.

Feedback Linearization of Continuous and Discrete Multidimensional Systems

A. A. Kabanov, KabanovAleksey@gmail.com✉,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: Kabanov Aleksei A., PhD,
Head of Department of Informatics and Control in Technical Systems,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation,
e-mail: KabanovAleksey@gmail.com

Received on February 08, 2016

Accepted on February 21, 2016

The problem of feedback linearization (FL) of continuous and discrete nonlinear MIMO systems is considered. The idea of FL method consists in converting the original nonlinear system into a linear one by means of feedback. Then, the methods of control theory for linear systems are used for system design. A widespread approach to FL design is based on the method of normal form, that uses a nonsingular transformation of system state variables $z = T(x)$. In order to obtain a normal form of the nonlinear system in the neighbor of a some point, it is necessary to determine a special function — the system virtual output, for which a relative degree (in the case of single input) or a vector relative degree (in the case of multiple input) is determined. Applicability of the normal form method for FL is provided by the conditions of controllability and involutivity for the considered nonlinear system, which are not always true. Moreover, when developing a linearizing control law, the main difficulty lies in the transition from transformed variables z to state variables x of the original system. In this paper, we propose another approach, based on representing the original nonlinear system into a state-dependent coefficient form and applying the canonical similarity transformation $z = T(x)x$, that allow getting the system to canonical form, that considerably simplifies the FL problem. Such similarity transformation allow accomplishing linearization of system without determining of the virtual system output. Another advantage of the proposed method is that the technique of the transition from the transformed variables z to the state variables x of the original system is simpler. The results are illustrated by examples for continuous and discrete nonlinear systems.

Keywords: feedback linearization, multi-dimensional system, the canonical transformation

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 15-08-06859.

For citation:

Kabanov A. A. Feedback Linearization of Continuous and Discrete Multidimensional Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 363–370.

DOI: 10.17587/mau.18.363-370

References

1. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L. *Nelineinoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* (Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems), St. Petersburg, Nauka, 2000, 549 p. (in Russian).
2. Isidori A. *Nonlinear control systems*, London, Springer-Verlag, 1995, 293 p.
3. Kabanov A. A., Kramar V. A. *Linearizatsiya obratnoy svyaz'yu nelineynykh sistem na osnove kanonicheskogo preobrazovaniya podobiya* (Feedback linearization of nonlinear systems based on the canonical similarity transformation), *Materialy Vserossiyskoy konferentsii po problemam upravleniya v tekhnicheskikh sistemakh*, St. Petersburg, 2015, pp. 10–13 (in Russian).
4. Zuber I. E. *Sintez kanonicheskikh preobrazovaniy podobiya dlya nelineynykh nestatsionarnykh dinamicheskikh sistem upravleniya* (Canonical transformations synthesis for nonlinear time variable dynamic control systems), *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya*, 2003, № 4, pp. 38–51 (in Russian).
5. Zuber I. E. *Kanonicheskie preobrazovaniya i stabilizatsiya nelineynykh diskretnykh sistem upravleniya* (The canonical transfor-

mations and stabilization of nonlinear discrete control systems), *Vestnik SPbGU*. Ser. 1, 2004, vol. 1, pp. 6–13 (in Russian).

6. Kabanov A. A. Full-state Linearization of Systems via Feedback Using Similarity Transformation, 2016 *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*. Proceedings. National Research University Higher School of Economics, Moscow, 2016.
7. Guardabassi G. O., Savaresi S. M. Approximate linearization via feedback: an overview, *Automatica*, 2001, vol. 37, pp. 1–15.
8. Yamada K. Approximate feedback linearization for nonlinear systems and its application to the ACROBOT, *Proceedings of the American Control Conference*, Anchorage, AK, 2002, pp. 1672–1677.
9. Kabanov A. A. Approximate feedback linearization based on the singular perturbations approach, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 8, pp. 515–522 (in Russian).
10. Kabanov A. A. Composite Control for Nonlinear Singularly Perturbed Systems Based on Feedback Linearization Method, *WSEAS Transactions on Systems*, 2015. vol. 14, pp. 215–221.
11. Çimen T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey, *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008*, pp. 3761–3775.
12. Brunovský P. A classification of linear controllable system, *Kybernetika*, 1970, vol. 6, no. 2, pp. 173–188.
13. Kang W. Approximate linearization of nonlinear control systems, *Systems & Control Letters*, 1994, vol. 23, pp. 43–52.
14. Tall I. A. Canonical Forms for Nonlinear Discrete Time Control Systems, *Proc. of 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011, pp. 1080–1085.