

А. Ю. Александров, д-р физ.-мат. наук, проф., a.u.aleksandrov@spbu.ru,
Е. Б. Александрова, канд. физ.-мат. наук, доц., e.b.aleksandrova@spbu.ru,
А. Е. Лапшин, студент, st016237@student.spbu.ru,
А. А. Тихонов, д-р физ.-мат. наук, проф., a.tikhonov@spbu.ru,
 Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

Электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в режиме двухосной закрутки¹

Рассматривается искусственный спутник Земли (ИСЗ) с электродинамической системой управления ориентацией. Решается задача стабилизации спутника в программном режиме движения, при котором ось динамической симметрии ИСЗ стабилизируется в положении, определяемом постоянным углом к местной вертикали, а сам ИСЗ совершает медленное вращение вокруг этой оси. На основе метода функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости стабилизируемого программного режима движения при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента. Эти условия позволяют обеспечить рациональный выбор коэффициентов параметрического управления в зависимости от параметров ИСЗ и его орбиты.

Ключевые слова: спутник, магнитное поле Земли, электродинамическое управление, двухосная закрутка, гравитационный момент, стабилизация, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова

Введение

Электродинамическое взаимодействие искусственного спутника Земли (ИСЗ) с магнитным полем Земли оказывает существенное влияние на динамику вращательного движения ИСЗ относительно его центра масс и может использоваться при построении систем управления ориентацией ИСЗ. Системы управления, основанные на использовании момента магнитного взаимодействия, их преимущества, особенности и недостатки, описаны в работах [1, 2]. Метод стабилизации ИСЗ, основанный на использовании момента лоренцевых сил, предложен в работе [3]. В работе [4] описан электродинамический метод стабилизации ИСЗ, использующий одновременно возможности магнитного и лоренцева моментов. Решена задача стабилизации ИСЗ в прямом положении равновесия (ППР) в орбитальной системе координат. Математическое обоснование метода опирается на рассмотрение дифференциальных уравнений линейного приближения. Доказано существование области значений параметров ИСЗ и его орбиты, обеспечивающих устойчивость ППР при постоянно действующих возмущениях. В работе [5] впервые дано аналитическое обоснование асимптотической устойчивости ППР ИСЗ с электродинамической системой стабилизации в орбитальной системе координат на базе нелинейных дифференциальных уравнений движения. На основе прямо-

го метода Ляпунова и развития способов построения функций Ляпунова, предложенных в работах [6, 7], получены достаточные условия асимптотической устойчивости ППР ИСЗ в орбитальной системе координат при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента.

В данной статье рассматривается ИСЗ с электродинамической системой управления ориентацией. Решается задача стабилизации программного движения, при котором ось динамической симметрии ИСЗ стабилизируется вдоль оси, отклоненной на угол φ от местной вертикали, а сам ИСЗ совершает медленное вращение вокруг этой оси. Похожая задача рассматривалась в работе [8], но в ней ось динамической симметрии ИСЗ стабилизировалась по местной вертикали, что соответствует значению угла $\varphi = 0$. Такие режимы движения ИСЗ, называемые согласно работе [9] режимами двухосной закрутки, имеют важное прикладное значение.

1. Постановка задачи

Рассматривается динамически симметричный ИСЗ, центр масс которого движется по круговой орбите радиуса R . Предполагается, что ИСЗ снабжен управляемым электростатическим зарядом $Q = \int_V \sigma dV$, распределенным по некоторому объему V с плотностью σ , и управляемым собственным магнитным моментом $\mathbf{I}$. Так же, как и в работе [4], исследуется вращательное движение ИСЗ относительно его центра масс в орбитальной системе ко-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00587, № 16-08-00997 и № 17-01-00672).

ординат (в данной работе используются правые декартовы прямоугольные системы координат) $C\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс ИСЗ, ось $C\xi(\xi_0)$ которой направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось $C\eta(\eta_0)$ — по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta(\zeta_0)$ — вдоль радиус-вектора $\mathbf{R} = \mathbf{OC} = R\zeta_0$ центра масс ИСЗ относительно центра Земли O . Исследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной системы с угловой скоростью ω_0 . С самим ИСЗ жестко связана система его главных центральных осей инерции $Cxyz$ (орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). В системе координат $Cxyz$, где ось Cz является по предположению осью динамической симметрии, тензор инерции ИСЗ имеет вид $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$. Ориентация осей $Cxyz$ относительно осей $C\xi\eta\zeta$ определяется матрицей $\mathbf{A}$ направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) так, что справедливы равенства

$$\xi_0 = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}, \quad \eta_0 = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}, \\ \zeta_0 = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}.$$

В орбитальной системе координат орты ξ_0, η_0, ζ_0 заданы равенствами

$$\xi_0 = (1, 0, 0)^T, \quad \eta_0 = (0, 1, 0)^T, \quad \zeta_0 = (0, 0, 1)^T.$$

Те же самые орты в системе координат $Cxyz$ обозначим $\mathbf{s}_i$:

$$\mathbf{A}^T \xi_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T = \mathbf{s}_1, \\ \mathbf{A}^T \eta_0 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = \mathbf{s}_2, \\ \mathbf{A}^T \zeta_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T = \mathbf{s}_3.$$

Программная ориентация ИСЗ в орбитальной системе координат задается некоторой матрицей $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0(t)$ направляющих косинусов. Орты, связанные с ИСЗ и неизменные в системе координат $Cxyz$, обозначим $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{A}_0^T \xi_0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30})^T = \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{A}_0^T \eta_0 = (\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30})^T = \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{A}_0^T \zeta_0 = (\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})^T = \mathbf{r}_3.$$

В данной работе рассматривается случай, когда ось динамической симметрии Cz ИСЗ стабилизируется по оси, отклоненной от местной вертикали $C\xi$ на угол φ в плоскости (η, ζ) , а сам ИСЗ совершает вокруг этой оси равномерное вращение с угловой скоростью $\omega'_0 = \mu \mathbf{k} = (0, 0, \mu)^T$. Для такого режима движения матрица $\mathbf{A}_0$ имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $\psi = \mu t$, μ — малый положительный параметр, $\varphi = \text{const}$. Следовательно,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

2. Дифференциальные уравнения движения

В процессе движения ИСЗ относительно геомагнитного поля с магнитной индукцией $\mathbf{B}$ возбуждается лоренцев момент $\mathbf{M}_L$ и магнитный момент $\mathbf{M}_M$, соответственно имеющие вид

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{P} \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_M = \mathbf{I} \times \mathbf{A}^T \mathbf{B},$$

где $\mathbf{P} = Q\rho_0$, $\rho_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k} = Q^{-1} \int_V \sigma \rho dV$ — радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно его центра масс; $\mathbf{T} = \mathbf{A}^T(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})$; $\mathbf{v}_C$ — скорость центра масс ИСЗ относительно геомагнитного поля, значение $\mathbf{B}$ в этой формуле совпадает со значением $\mathbf{B}$ в центре масс ИСЗ. Кроме того, учитывается гравитационный момент

$$\mathbf{M}_G = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}^T \zeta_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^T \zeta_0)$$

как основной из возмущающих моментов, действующих на ИСЗ в околоземном пространстве.

Анализ стабилизации программного движения ИСЗ проводится на базе нелинейных дифференциальных уравнений вращательного движения ИСЗ, построенных по схеме Эйлера—Пуассона:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}\omega) + \omega \times (\mathbf{J}\omega) = \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_M, \quad (4)$$

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \xi_0 \times \omega - \omega_0 \xi_0, \quad \frac{d\eta_0}{dt} = \eta_0 \times \omega, \quad \frac{d\zeta_0}{dt} = \zeta_0 \times \omega + \omega_0 \xi_0. \quad (5)$$

Здесь $\omega = \omega' + \omega_0$ — абсолютная угловая скорость ИСЗ, ω' — угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат, $\omega_0 = \omega_0 \eta_0$ — угловая скорость орбитальной системы координат относительно инерциальной. С учетом обозначений (1), (2) дифференциальные уравнения (4), (5) примут вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}(\omega' + \omega_0 \mathbf{s}_2)) + (\omega' + \omega_0 \mathbf{s}_2) \times (\mathbf{J}(\omega' + \omega_0 \mathbf{s}_2)) = \\ = 3\omega_0^2 (\mathbf{s}_3) \times (\mathbf{J} \mathbf{s}_3) + \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_M, \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_1 = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{s}_2}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{s}_3}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Управляющие моменты $\mathbf{M}_L, \mathbf{M}_M$, вид которых будет конкретизирован в следующем разделе, должны обеспечить существование и асимптотическую устойчивость следующего режима двухосной закрутки ИСЗ:

$$\omega' = \omega'_0, \quad \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

3. Параметрическое управление для стабилизации режима двухосной закрутки

В работе [4] показано, что путем программного изменения управляемых электродинамических параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ можно обеспечить управление угловым положением ИСЗ. Для решения задачи стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат, рассмотренной в работе [4], было достаточно взять каждый из векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ в виде суммы двух слагаемых, первое из которых приводило к возникновению восстанавливающего момента, а второе — диссипативного:

$$\mathbf{P} = k_L \mathbf{T}_0 + h_L \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{I} = k_M \mathbf{B}_0 + h_M \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (9)$$

В этих формулах $\mathbf{T}_0 = \mathbf{A}_0^T (\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{B}$, k_L , k_M , h_L , h_M — коэффициенты пропорциональности, в качестве которых могут выступать скалярные функции времени.

В задаче, рассматриваемой в данной работе, диссипативные слагаемые будут отличаться от соответствующих слагаемых в формулах (9), поскольку погашения требует не угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат, а отклонение угловой скорости от стабилизируемого значения $\boldsymbol{\omega}'_0$, т. е. $\boldsymbol{\omega}'_r = \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}'_0$. Кроме того, недостаточно взять векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ в виде (9), так как для обеспечения равномерного вращения ИСЗ во вращающейся орбитальной системе координат требуется компенсировать гравитационный и гироскопический моменты. Для компенсации указанных возмущающих моментов введем дополнительное слагаемое $\mathbf{P}_1$ в вектор $\mathbf{P}$ и дополнительное слагаемое $\mathbf{I}_1$ в вектор $\mathbf{I}$.

Для получения условий реализации программного движения ИСЗ перепишем уравнение (6), подставив выражения (3) и (8) как в левую часть, так и в выражения моментов. Учтем также, что в силу постановки задачи орбита ИСЗ — круговая экваториальная ($\mathbf{v}_C = v_{C\xi} \boldsymbol{\xi}_0$, $\mathbf{v}_{C\xi} = \text{const} \neq 0$), а геомагнитное поле аппроксимируется прямым магнитным диполем ($\mathbf{B} = B_\eta \boldsymbol{\eta}_0$, $B_\eta = \text{const} \neq 0$). Получим

$$k_0 \mathbf{r}_1 = v_{C\xi} B_\eta \mathbf{P}_1 \times \mathbf{r}_3 + B_\eta \mathbf{I}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad (10)$$

где $k_0 = \omega_0 \cos \varphi (4\omega_0(A - C) \sin \varphi + \mu C)$.

Из уравнения (10) следует, что для компенсации возмущающих моментов, приведенных к виду $k_0 \mathbf{r}_1$, достаточно взять вектор $\mathbf{P}_1$ в виде $k_{L1} \mathbf{r}_2$ или взять вектор $\mathbf{I}_1$ в виде $k_{M1} \mathbf{r}_3$. Здесь коэффициенты k_{L1} и k_{M1} определяются по формулам

$$k_{L1} = \frac{k_0}{v_{C\xi} B_\eta}, \quad k_{M1} = -\frac{k_0}{B_\eta}.$$

Заметим, что можно использовать одновременно оба управляющих момента, включив слагае-

мое $k_{L1} \mathbf{r}_2$ в вектор $\mathbf{P}$ и слагаемое $k_{M1} \mathbf{r}_3$ в вектор $\mathbf{I}$. В этом случае должны выполняться равенства

$$k_{L1} = \frac{k_{13}}{v_{C\xi} B_\eta}; \quad k_{M1} = \frac{k_{12}}{B_\eta}; \quad k_{13} - k_{12} = k_0.$$

Далее, для определенности, будем рассматривать случай, когда

$$k_{12} = -\omega_0 \mu C \cos \varphi + \omega_0^2 (C - A) \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$k_{13} = -3\omega_0^2 (C - A) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Таким образом, для решения задачи стабилизации ИСЗ в рассматриваемом режиме двухосной закрутки имеем следующие законы программного изменения параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= k_L \mathbf{T}_0 + k_{L1} \mathbf{r}_2 + h_L \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{T}, \\ \mathbf{I} &= k_M \mathbf{B}_0 + k_{M1} \mathbf{r}_3 + h_M \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \end{aligned}$$

4. Достаточные условия асимптотической устойчивости

Выделим в уравнениях (6) линейные члены относительно величин $\boldsymbol{\omega}'_r$, $\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3$, представляющих собой отклонения от программного движения (8). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r) - \omega_0 \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{r}_2) + \omega_0 \boldsymbol{\omega}'_r \times (\mathbf{J} \mathbf{r}_2) + \boldsymbol{\omega}'_r \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_0) + \\ + \omega_0^2 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J} \mathbf{r}_2) + \omega_0 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_0) + \\ + \boldsymbol{\omega}'_0 \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r) + \omega_0 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r) + \omega_0^2 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) = \\ = 3\omega_0^2 \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) + 3\omega_0^2 (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{J} \mathbf{r}_3) - \Psi - \\ - h_{M0} (\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{r}_2 (\boldsymbol{\omega}'_r \cdot \mathbf{r}_2)) - h_{L0} (\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{r}_3 (\boldsymbol{\omega}'_r \cdot \mathbf{r}_3)) + \\ + k_{12} \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) + k_{13} \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) + \Phi. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь $\Psi = k_{M0} (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2) + k_{L0} (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_3)$, $k_{L0} = k_L (v_{C\xi} B_\eta)^2$, $k_{M0} = k_M B_\eta^2$, $h_{L0} = h_L (v_{C\xi} B_\eta)^2$, $h_{M0} = h_M B_\eta^2$, а для векторной функции $\Phi = \Phi(t, \boldsymbol{\omega}'_r, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ справедлива оценка

$$\|\Phi\| \leq \tilde{c} (\|\boldsymbol{\omega}'_r\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2),$$

где $\tilde{c}$ — положительная постоянная.

В статьях [5, 8, 10] была разработана процедура последовательного построения функций Ляпунова для решения задач стабилизации различных программных режимов вращательного движения ИСЗ. Применяя эту процедуру, приходим к следующему выражению для функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'_r{}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r + \frac{k_{M0}}{2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \frac{k_{L0}}{2} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 - \\ &- \frac{1}{2} \mu \omega_0 C \sin \varphi \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \kappa \boldsymbol{\omega}'_r{}^T \mathbf{J} \Psi + \frac{3}{2} \omega_0^2 (C - A) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^T \begin{pmatrix} -\cos^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \varphi \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) + \\ & + \frac{1}{2} \omega_0^2 (C - A) (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^T \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\cos^2 \varphi \end{pmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

где κ — положительный параметр.

Имеем

$$\begin{aligned} V \geq & \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_r + \left(\frac{k_{M0}}{2} - \frac{1}{2} \mu \omega_0 C \sin \varphi + \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta \right) \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \\ & + \left(\frac{k_{L0}}{2} + \frac{3}{2} \omega_0^2 \theta \right) \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 + \kappa \boldsymbol{\omega}_r^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Psi}. \end{aligned}$$

Здесь $\theta = \min\{(A - C)\cos^2 \varphi; (C - A)\sin^2 \varphi\}$.

Для производной функции V в силу системы (7), (11) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq & -\min\{h_{M0}; h_{L0}\} \|\boldsymbol{\omega}_r\|^2 - \kappa \|\boldsymbol{\Psi}\|^2 + \kappa b_1 \|\boldsymbol{\omega}_r\|^2 + \\ & + \kappa b_2 \|\boldsymbol{\omega}_r\| (\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\| + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|) + \kappa \boldsymbol{\Psi}^T \left[3\omega_0^2 (C - A) \times \right. \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & \cos^3 \varphi & \sin^3 \varphi \cos \psi \\ -\cos^3 \varphi & 0 & -\sin^3 \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \psi & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) + \omega_0^2 (A - C) \times \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & -\sin^3 \varphi & \cos^3 \varphi \cos \psi \\ \sin^3 \varphi & 0 & -\cos^3 \varphi \sin \psi \\ \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \psi & -\sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \psi & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) + \mu \omega_0 C \times \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & -\sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \cos \psi \\ \sin^2 \varphi & 0 & \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \varphi \sin \psi & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \left. \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \right] + b_3 (\|\boldsymbol{\omega}_r\|^3 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^3 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^3), \end{aligned}$$

в которой $b_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Нетрудно показать, что если

$$\begin{aligned} k_{M0} & > \omega_0 \sqrt{6(\omega_0^2 (A - C)^2 + \mu^2 C^2 \sin^2 \varphi)}, \\ k_{L0} & > 3\sqrt{6} \omega_0^2 |A - C|, \end{aligned} \quad (12)$$

а значение параметра κ достаточно мало, то найдутся положительные числа c_1, c_2, c_3 и δ такие, что при $\|\boldsymbol{\omega}_r'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 < \delta^2$ будут иметь место неравенства

$$\begin{aligned} c_1 (\|\boldsymbol{\omega}_r'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2) & \leq V \leq \\ & \leq c_2 (\|\boldsymbol{\omega}_r'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2), \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} \leq -c_3 (\|\boldsymbol{\omega}_r'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2).$$

Таким образом, при выполнении условий (12) программное движение (8) асимптотически устойчиво.

Замечание. Для обеспечения асимптотической устойчивости программного движения (8) на параметры h_{L0} и h_{M0} не требуется накладывать никаких условий, кроме их положительности.

Заключение

Среди задач управления ориентацией ИСЗ важную роль играют задачи одноосной стабилизации [6, 7]. В работе [10] задача одноосной стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат решена с использованием электродинамической системы управления. В некоторых случаях существенным требованием, усложняющим задачу одноосной стабилизации, является обеспечение вращения ИСЗ вокруг стабилизированного направления. Поэтому в данной работе рассмотрена задача стабилизации программного движения ИСЗ относительно его центра масс, при котором ось динамической симметрии ИСЗ стабилизируется вдоль оси, отклоненной на некоторый угол от местной вертикали, а сам ИСЗ совершает медленное вращение вокруг этой оси. Подобные режимы движения ИСЗ имеют важное прикладное значение [9]. Например, они используются для обеспечения более равномерного освещения ИСЗ солнечными лучами и снижения нежелательных эффектов, вызванных градиентом температуры ИСЗ.

На основе метода функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости стабилизируемого программного движения ИСЗ при наличии возмущающего гравитационного момента. Эти условия позволяют обеспечить рациональный выбор коэффициентов параметрического управления в зависимости от параметров ИСЗ и его орбиты.

В качестве направления дальнейших исследований отметим, что с использованием подходов, предложенных в работах [11, 12], можно получить условия стабилизации заданного программного движения спутника для случая, когда имеется запаздывание в канале обратной связи, возникающее вследствие задержек на обработку и передачу информации.

Список литературы

1. Коваленко А. П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 248 с.
2. Алпатов А. П., Драновский В. И., Салтыков Ю. Д., Хорошилов В. С. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. М.: Машиностроение, 1978. 200 с.
3. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69—79.
4. Антипов К. А., Тихонов А. А. Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 44—56.
5. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 4. С. 335—340.
6. Зубов В. И. Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982. 285 с.

7. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 200 с.
8. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 2. С. 79—90.
9. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты // Космические исследования. 2000. Т. 38. № 3. С. 296—306.
10. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в орбитальной системе координат // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 22—31.
11. Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Жабко А. П. Анализ устойчивости гироскопических систем с запаздыванием на основе прямого метода Ляпунова // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 5. С. 3—7.
12. Зубер И. Е., Волошинова Т. В., Гелиг А. Х. Расширенный класс стабилизируемых неопределенных систем // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2016. Вып. 3. С. 402—407.

Electrodynamic Stabilization of an Artificial Earth Satellite in the Mode of Biaxial Rotation

A. Yu. Aleksandrov, a.u.aleksandrov@spbu.ru✉, E. B. Aleksandrova, e.b.aleksandrova@spbu.ru, A. E. Lapshin, st016237@student.spbu.ru, A. A. Tikhonov, a.tikhonov@spbu.ru, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Corresponding author: Aleksandrov Aleksandr Yu., Professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation, e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru

Received on January 27, 2016
Accepted on February 01, 2016

The topic of the article is an artificial Earth satellite in a circular near-Earth orbit. The satellite possesses a dynamical symmetry and is equipped with an electrodynamic attitude control system based on the usage of Lorentz and magnetic torques. The control torques are ensured by a controllable variation of two electromagnetic parameters of the satellite: the intrinsic magnetic moment and the static moment of charge of the first order. In the satellite's programmed motion the axis of the dynamical symmetry is inclined to the local vertical axis at a constant angle and the satellite slowly rotates around that axis. Such a rotation mode is of great importance in space missions, because it can reduce the temperature gradient effect, which may cause problems with the satellite's functioning. But this mode cannot be realized without a control because of the disturbances, among which the gravitational torque should be mentioned as the most important one. In the present paper the satellite's stabilization in the programmed attitude motion is investigated. The stated problem appears to be more complex than the problem of the uniaxial attitude stabilization of a satellite, and previously it was not treated with the use of the electrodynamic control system. On the basis of the Lyapunov direct method the conditions, under which the electrodynamic control solves the problem, were obtained. A new construction of the Lyapunov function was proposed, and using the function sufficient conditions for the asymptotic stability of the programmed motion were found in an explicit form.

Keywords: satellite, geomagnetic field, electrodynamic control, biaxial rotation, gravitational torque, stabilization, asymptotic stability, Lyapunov function

Acknowledgements: This work was supported by RFBR (projects № 16-01-00587, № 16-08-00997 and № 17-01-00672).

For citation:

Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Lapshin A. E., Tikhonov A. A. Electrodynamic Stabilization of an Artificial Earth Satellite in the Mode of Biaxial Rotation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 346—351.

DOI: 10.17587/mau.18.346-351

References

1. Kovalenko A. P. *Magnitnye sistemy upravleniya kosmicheskimi letatel'nymi apparatami* (Magnetic Control Systems of Space Aircrafts), Moscow, Mashinostroenie, 1975. 248 p. (in Russian).
2. Alpatov A. P., Dranovskij V. I., Saltykov Ju. D., Horoshilov V. S. *Dinamika kosmicheskikh apparatov s magnitnymi sistemami upravleniya* (Dynamics of Spacecrafts with Magnetic Control Systems), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 200 p. (in Russian).

3. Tikhonov A. A. *Metod polupassivnoj stabilizatsii kosmicheskogo apparata v geomagnitnom pole* (A method of semi-passive attitude stabilization of a spacecraft in the geomagnetic field), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2003, vol. 41, no 1, pp. 69—79 (in Russian).
4. Antipov K. A., Tikhonov A. A. *Parametricheskoe upravlenie v zadache o stabilizatsii kosmicheskogo apparata v magnitnom pole Zemli* (Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2007, no 8, pp. 44—56 (in Russian).
5. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. *Elektrodinamicheskaja stabilizatsiya ISZ na jekvatorial'noj orbite* (Electrodynamic stabilization of Earth-orbiting satellites in equatorial orbits), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2012, vol. 50, no 4, pp. 335—340 (in Russian).
6. Zubov V. I. *Dinamika upravlyaemykh sistem* (Dynamics of Controlled Systems), Moscow, Vyssh. shkola, 1982, 285 p. (in Russian).
7. Smirnov E. Ja. *Nekotorye zadachi matematicheskoy teorii upravleniya* (Some Problems of the Mathematical Control Theory), Leningrad, Publishing house of Leningradskii University, 1981, 200 p. (in Russian).

8. Aleksandrov A. Yu., Tihonov A. A. *Elektrodinamicheskaja stabilizacija programmnogo vrashhenija ISZ v orbital'noj sisteme koordinat* (Electrodynamic Stabilization of the satellite's programmed rotation in the orbital frame), *Vestn. C.-Peterburg. Universiteta. Ser. 1*, 2012, iss. 2, pp. 79–90 (in Russian).

9. Sazonov V. V. Chebukov S. Ju., Kuznecova E. Ju. *Dvuhosnaja zakrutka sputnika v ploskosti orbity* (Two-axis rotation of a satellite in the orbital plane), *Kosmicheskie Issledovanija*, 2000, vol. 38, no 3, pp. 296–306 (in Russian).

10. Aleksandrov A. Yu., Tihonov A. A. *Odnoosnaja elektrodinamicheskaja stabilizacija iskusstvennogo sputnika Zemli v orbital'noj sisteme koordinat* (Monoaxial electrodynamic stabilization of earth satellite in

the orbital coordinate system), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2013, no 8, pp. 22–31 (in Russian).

11. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P. *Analiz ustojchivosti giroskopicheskikh sistem s zapazdyvaniem na osnove prjamoogo metoda Ljapunova* (Stability analysis of gyroscopic systems via the Lyapunov direct method), *Mekatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no 5, pp. 3–7 (in Russian).

12. Zuber I. E., Voloshinova T. V., Gelig A. H. *Rasshirennyj klass stabiliziruemykh neopredelennykh sistem* (An extended class of stabilized uncertain systems). *Vestn. C.-Peterburg. Universiteta. Ser. 1*, 2016, iss. 3, pp. 402–407 (in Russian).

УДК 629.78

DOI: 10.17587/mau.18.351-359

Н. В. Рябогин, зам. начальника направления, ryabogin@mokb-mars.ru,

В. Н. Соколов, д-р техн. наук, зам. директора по научной работе,

зам. генерального конструктора, sokolov@mokb-mars.ru,

ФГУП Московское опытно-конструкторское бюро "Марс",

Н. М. Задорожная, канд. техн. наук, доц., zanatalie@ya.ru,

МГТУ имени Н. Э. Баумана

Комплексирование информации инерциальных измерительных блоков и звездных приборов на основании оценки вектора малого поворота

Предлагается субоптимальный алгоритм комплексирования информации инерциального измерительного блока и звездных приборов применительно к задаче точного определения ориентации космического аппарата. Алгоритм позволяет эффективно фильтровать высокочастотную шумовую ошибку звездных приборов и обладает небольшими требованиями к вычислительным ресурсам бортовых вычислительных машин космических аппаратов. Алгоритм обеспечивает работу со всей номенклатурой звездных приборов и инерциальных измерительных блоков.

Ключевые слова: бортовые комплексы управления, космические аппараты, точность ориентации, фильтр Калмана, инерциальные измерительные блоки, звездные датчики, комплексирование

Введение

Контур управления космическим аппаратом (КА), построенный на базе современных инерциальных измерительных блоков (ИИБ) и звездных приборов (ЗП), является наиболее гибким и отказоустойчивым. Совместное использование информации ЗП и ИИБ характерно для многих зарубежных КА [7, 9, 30, 42, 43, 45, 47], что обусловлено особенностями датчиков обоих типов. В отличие от ЗП, ИИБ функционируют в широком диапазоне угловых скоростей и независимы от внешних оптических условий, внешних воздействующих факторов и ионизирующего излучения космического пространства [36–39]. Однако при отсутствии коррекции по измерениям от других приборов, точность определения угловой скорости и параметров ориентации по информации от ИИБ со временем снижается.

Подход к построению бортового комплекса управления (БКУ) КА с объединением информации от ИИБ и ЗП, разработанный МОКБ "Марс" и реализованный в БКУ КА "Спектр-Р" на приборах ГИВУС КИНД34-020 и АД-1, позволил достичь

высокой точности ориентации КА [46]. Подход к совместной обработке информации ИИБ и ЗП базировался на фильтре Калмана с вектором состояния 6-го порядка и учитывал особенности работы ЗП АД-1. Благодаря совместной обработке была достигнута точность определения ориентации в 1,4".

Особенности комплексирования информации

Разработка систем ориентации, функционирующих на разных физических принципах, основана на комплексной обработке первичной информации из различных источников в целях повышения надежности и точности автономной системы ориентации [2–4, 8–10]. Среди схем комплексирования систем ориентации различных типов наибольшее распространение [8, 12, 22, 27, 44] нашли инвариантные схемы, которые оценивают не параметры ориентации, а их погрешности.

Математическая обработка информации с ИИБ и ЗП позволяет определять параметры ориентации и угловой скорости с высокой точностью, которая необходима для работы системы управления движением КА [4, 8–10].