

В. Л. Афонин, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр., afoninwl@rambler.ru,
Институт машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН (ИМАШ РАН), г. Москва

Вейвлет-преобразования в приложениях к анализу систем управления, содержащих существенные нелинейности

Рассматривается теория вейвлет-преобразований применительно к анализу и синтезу динамических характеристик систем управления, содержащих существенные нелинейности. Задача решается во временной области, позволяющей анализировать ошибки и устойчивость замкнутых следящих систем, включающих существенные нелинейности типа зона нечувствительности, ограничение, зазор и другие нелинейности.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, потенциальные функции, существенные нелинейности, зона нечувствительности, ограничение, зазор, анализ и синтез нелинейных систем

Введение

Теория вейвлет-преобразований нашла широкое применение в задачах обработки, анализа и распознавания изображений [1—13]. Несмотря на достаточно большое число работ по теории вейвлетов, практически отсутствуют исследования данного аппарата применительно к анализу и синтезу систем автоматического управления.

В системах автоматического управления существенные нелинейности проявляются в механической части — это зона нечувствительности, ограничения, люфты в редукторах, передачах и др. В электронной части нелинейности представляют зоны нечувствительности и ограничения. Безусловно, это является недостатками изготовления механических и электронных устройств. Но данные недостатки не всегда возможно устранить за счет технологических процессов при изготовлении, и они особенно проявляются при создании высокоточного станочного оборудования, измерительных приборов и другого точного оборудования. Поэтому разработка методов учета данных нелинейностей при исследовании ошибок и устойчивой работы следящих систем при их наличии позволяет повышать динамические характеристики систем управления.

Исследованию нелинейных систем посвящено достаточно много работ, среди которых следует, в первую очередь, отметить работы А. М. Ляпунова. Общий метод анализа устойчивости систем с использованием функции Ляпунова позволяет анализировать устойчивость систем, в том числе нелинейных. Метод фазовой плоскости, введенный А. А. Андроновым [14], основан на построении фазовых траекторий для систем, содержащих нелинейности. Метод точечных преобразований и построение фазовых портретов позволяет графически рассматривать возникновение автоколебаний. Метод гармонической линеаризации, наиболее полно рассмотренный в работах Е. П. Попова, основывается на построении частотных характеристик для нелинейных систем [15].

Современные методы анализа систем управления, в том числе нелинейных, основаны на приме-

нении численного моделирования и поисковых процедур с использованием быстродействующей вычислительной техники. В данной работе рассматривается возможность применения аппарата теории вейвлет-преобразований для анализа и синтеза динамических характеристик систем управления, содержащих существенные нелинейности. Данный аппарат имеет преимущество в сравнении с частотными методами, так как рассматривает процессы во временной области и позволяет аналитически исследовать переходные процессы.

При анализе сложных систем управления, включающих линейные и нелинейные элементы, во временной области не требуется выполнение условия фильтра для линейной части системы, которое является обязательным при применении частотных методов.

Реакция линейных систем, включающих существенные нелинейности

Рассмотрим выходные сигналы модуля, состоящего из нелинейного и линейного звеньев (рис. 1).

Линейное звено во временной области характеризуется весовой (импульсной переходной) функцией $k(\tau)$ [16], которая представляет реакцию линейной системы на δ -функцию (функцию Дирака):

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{для } \tau \leq t \\ \infty, & \text{для } \tau = t \text{ и } \int \delta(t - \tau) d\tau = 1. \\ 0, & \text{для } \tau \geq t \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим реакцию типовых нелинейностей в совокупности с линейными звеньями на входной

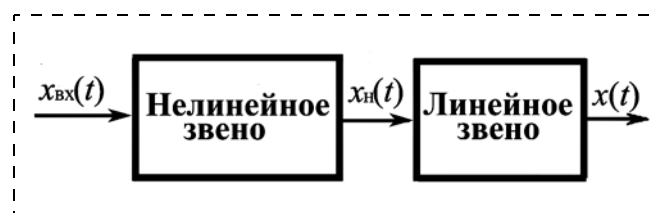


Рис. 1. Модуль, включающий нелинейность и линейное звено

сигнал, представляющий потенциальную функцию

$$x_{\text{вх}}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n)\varphi(j, t, n), \quad (2)$$

где $\varphi(j, t, n) = \frac{1}{1 + (2^j t - n)^2}$ — потен-

циальная функция; $C(j, n)$ — постоянные коэффициенты, определяющие величину $x_{\text{вх}}(t)$ в текущий момент времени t ; n определяет сдвиг и принимает целочисленные значения $n \in [0, \infty)$; j определяет ширину импульса и также принимает целочисленные значения $j \in [0, k)$ (рис. 2).

В работе [2] в качестве масштабирующей функции предложена потенциальная функция (2), а в качестве вейвлета (полуволны) рассматривается функция

$$\psi(t) = \frac{C}{1 + (2^j t - n)} - \frac{C}{1 + (2^j t - n - \Delta n)}. \quad (3)$$

Параметры j и C определяют вид входного сигнала, параметр Δn определяет вид полуволны и принимается равным 1 (рис. 3).

Аппарат вейвлет-преобразований позволяет аппроксимировать произвольный сигнал путем разложения по масштабирующей функции типа потенциальной функции и вейвлета [2, 3]. Поэтому в данной работе рассмотрим результаты исследования реакций линейных систем, включающих существенные нелинейности, на воздействие вида потенциальной функции (2) и вейвлета (3). Далее для удобства понимания воздействия сигналов на систему будем использовать термин "полуволна" вместо "вейвлет".

Выходной сигнал $x(t)$ модуля, содержащего нелинейное и линейное звенья (см. рис. 1) представляет интеграл свертки

$$x(t) = \int_0^t k(t - \tau)x_{\text{н}}(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Сигнал с нелинейности $x_{\text{н}}(t)$ представим как реакцию на воздействие в виде потенциальной функции (2).

Рассмотрим модули, включающие типовые нелинейности. Пусть модуль включает нелинейность типа зона нечувствительности (рис. 4).

Выходной сигнал с нелинейности $x_{\text{н}}(t)$ (рис. 4) при воздействии на вход сигналом (2) принимает вид

$$x_{\text{н}}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n)\varphi_{\text{н}}(j, t, n), \quad (5)$$

где $\varphi_{\text{н}}(j, t, n)$ — реакция нелинейности на воздействие в виде потенциальной функции $\varphi(j, t, n)$ (рис. 5),

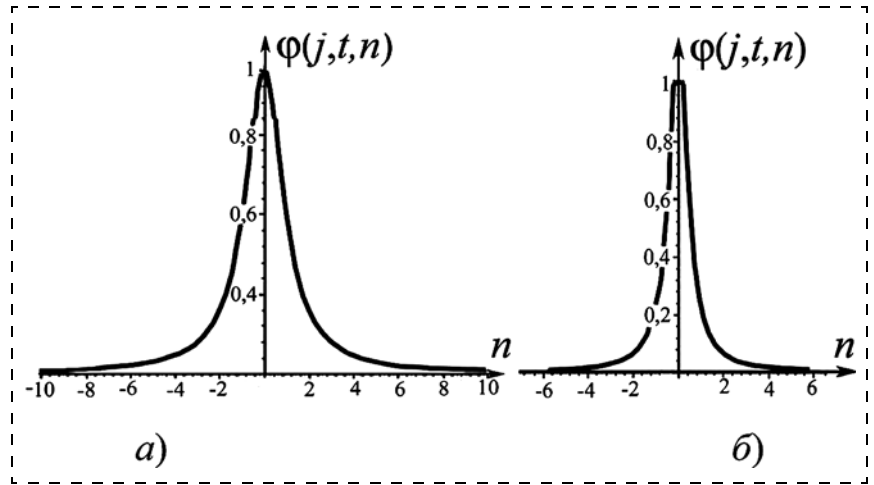


Рис. 2. Графики потенциальной функции $\varphi(j, t, n)$: а — при $n = 0, j = 0$; б — $n = 0, j = 1$

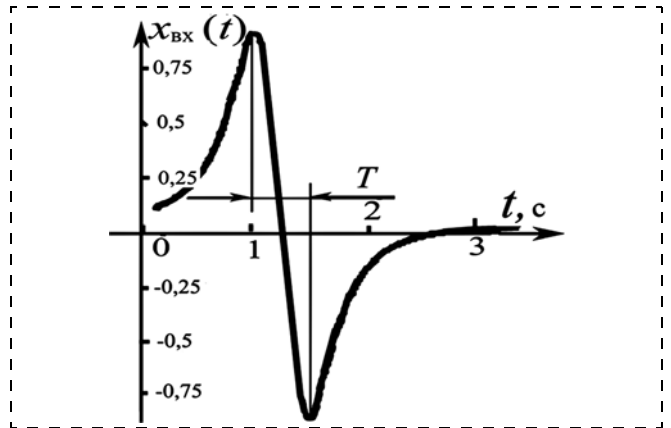


Рис. 3. Полуволна, представляющая сумму двух потенциальных функций

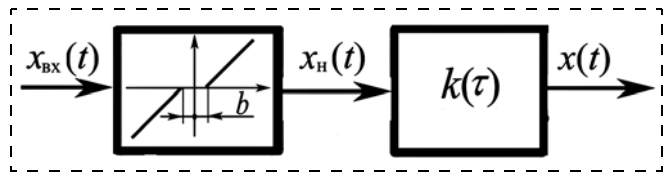


Рис. 4. Модуль, включающий зону нечувствительности

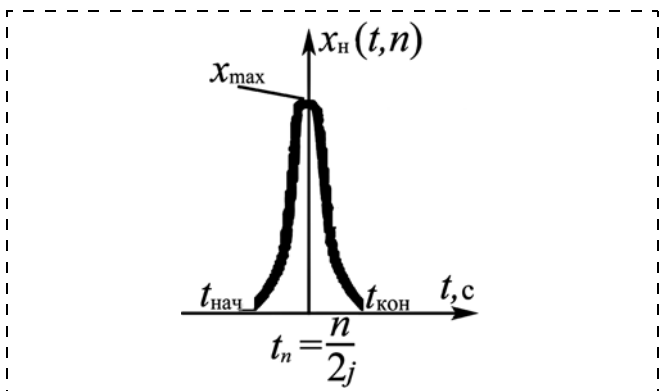


Рис. 5. Реакция нелинейного звена, представляющего зону нечувствительности $x_{\text{н}}(t, n)$, на входной сигнал в виде потенциальной функции

$x_{\max} = C(j, n) - b$, $t_{\text{нач}}$ и $t_{\text{кон}}$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} C(j, n) \frac{1}{1 + (2^j t - n)^2} &= b; \\ t_{\text{нач}} &= \frac{1}{2^j} \left(n - \sqrt{\frac{C(j, n) - b}{b}} \right); \\ t_{\text{кон}} &= \frac{1}{2^j} \left(n + \sqrt{\frac{C(j, n) - b}{b}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Для рассматриваемой нелинейности выходной сигнал с модуля $x(t)$ представляется суммой интегралов свертки

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\int_{t_{\text{нач}}}^t k(t-\tau) (C(j, n) \varphi(j, \tau, n) - b) d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{t_{\text{кон}}}^t k(t-\tau) b d\tau - \int_{t_{\text{кон}}}^t C(j, n) k(t-\tau) \varphi(j, \tau, n) d\tau \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} C(j, n) k(t-\tau) \varphi(j, \tau, n) d\tau - \\ &- \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} k(t-\tau) b d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Выходной сигнал $x(t)$, представляющий интегралы свертки, в которых верхний предел всегда представляет текущее время, которое стремится к бесконечности. Поэтому в начальном исходном уравнении (7) при переходе с одного интервала на другой необходимо исключать действие на предыдущем интервале. Должно быть соблюдено реальное изменение выходного сигнала $x(t)$ при наличии нелинейности и при $t \rightarrow \infty$. Далее исходное уравнение может быть упрощено. На рис. 6 приведены упрощенные интегралы свертки для типовых нелинейностей.

Таким образом, аналитические выражения выходных сигналов в виде интегралов свертки с моделями, включающих существенную нелинейность и линейное звено, позволяют анализировать динамические характеристики систем, содержащих нелинейные звенья во временной области, без введения допущений, так как даже в точках "сшива" нелинейных характеристик $t_{\text{нач}}$ и $t_{\text{кон}}$ аналитическое выражение выходного сигнала отражает реальное поведение системы.

Одним из трудоемких этапов анализа выходных сигналов с модулем является процедура вычисления интегралов свертки. Поэтому прежде чем анализировать динамические свойства сложных систем, рассмотрим процедуры вычисления данных интегралов свертки.

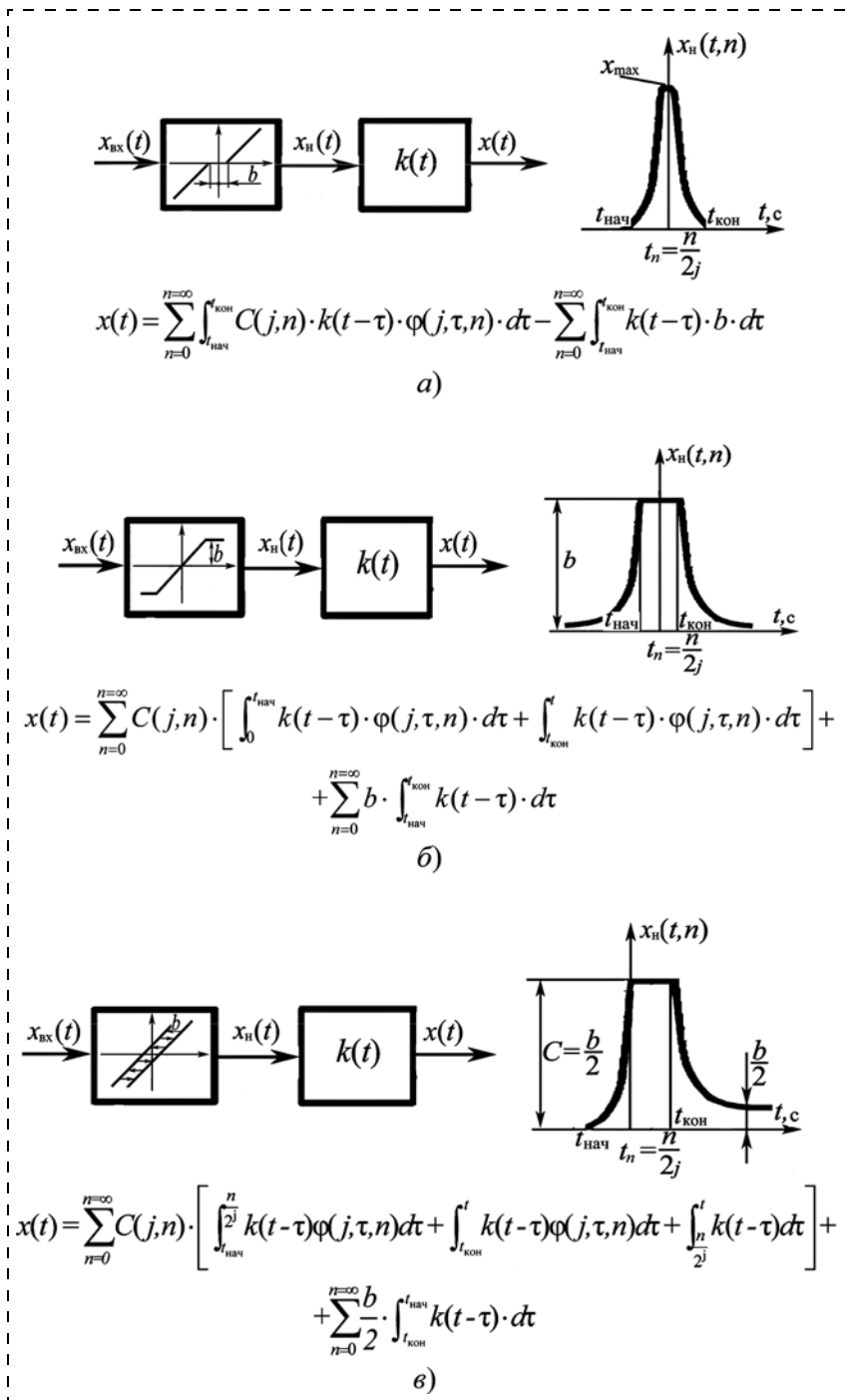


Рис. 6. Упрощенные интегралы свертки для типовых нелинейностей

Особенности вычисления интегралов свертки, включающих потенциальную функцию

Потенциальная функция $\varphi(t)$ и процедура нахождения интегралов вида

$$\int_{t_{нач}}^t k(t - \tau)\varphi(j, \tau)d\tau \quad (8)$$

относятся к нахождению интегралов от специальных функций, которые приведены в справочной литературе [17]. Как правило, данные интегралы приводятся к табличным интегралам.

Для нахождения интегралов вида (8) потенциальная функция $\varphi(t)$ представляется суммой

$$\varphi(t) = \frac{C(j, n)}{2(1 + i(2^j t - n))} + \frac{C(j, n)}{2(1 - i(2^j t - n))}, \quad (9)$$

где i – комплексная переменная ($i = \sqrt{-1}$).

Нахождение интегралов вида (8) рассмотрим на примере линейного звена, представляющего колебательное звено.

Пример 1. Реакция колебательного звена, для которого весовая функция имеет самый сложный вид, при воздействии в виде потенциальной функции $\varphi(t)$ описывается интегралом свертки

$$J_n = A \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} [B \sin(a(t - \tau) + b) - \cos(a(t - \tau) + b)] \frac{d\tau}{1 + (2^j t - n)^2}, \quad (10)$$

где $A = \frac{KC(j, n)}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, $B = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$, $a = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}$,

$$b = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right).$$

Для потенциальной функции в виде суммы двух комплексных выражений (9) интеграл (10) представляется в виде суммы интегралов

$$J_n = AB \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau - A \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau + AB \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau - A \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau. \quad (11)$$

Рассматриваемые интегралы находятся с использованием программных средств Maple, приводятся к интегральным показательным функциям $E_i(1, t)$, значения которых для конкретных значе-

ний t сведены в таблицы [см., например 17]. Поэтому, не приводя сложных символьных выражений, запишем окончательные численные выражения интегралов для $j = 3, n = 40, T = 0,1, \zeta = 0,25, t = \frac{n}{2^j} = 5$ с, $t_{нач} = 4,625$ с и $C = 1, K = 1$:

$$\begin{aligned} J_{n1} &= AB \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau = 0,1427 + 0,045i; \\ J_{n2} &= A \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau = -0,161 - 0,172i; \\ J_{n3} &= AB \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau = 0,1427 - 0,045i; \\ J_{n4} &= A \int_{t_{нач}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau = -0,161 + 0,172i. \end{aligned} \quad (12)$$

Суммарное значение для интеграла

$$J_n = J_{n1} + J_{n2} + J_{n3} + J_{n4} = 0,1427 + 0,045i + 0,161 + 0,172i + 0,1427 - 0,045i + 0,161 - 0,172i = 0,6074.$$

Полученное значение для J_n соответствует реакции колебательного звена на воздействие в виде потенциальной функции (рис. 7), где приведено значение выходного сигнала модуля $x(t) = J_n$ и показано совпадение расчетного значения для одной точки $t = 5$ с. Для построения выходного сигнала для текущих значений t требуется процедура вычисления интегралов выполнять с заданным шагом Δt , позволяющим обеспечивать требуемую точность получения выходного сигнала.

Интегралы свертки, определяющие выходной сигнал на воздействие в виде потенциальной функции, не представляют более сложные выражения, чем в рассмотренном примере, и могут быть определены с использованием программного обеспечения Maple и MATLAB Simulink.

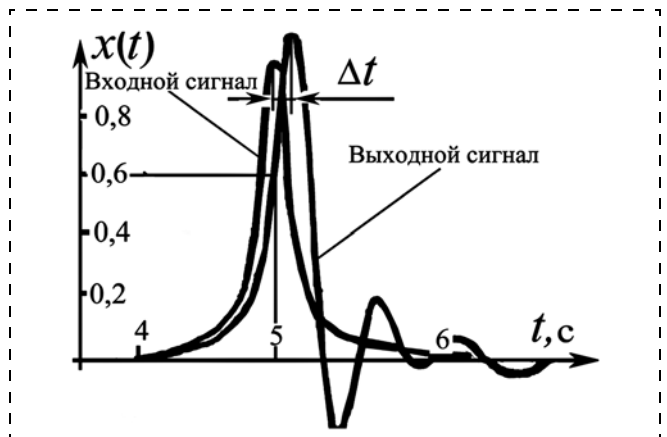


Рис. 7. Входной и выходной сигналы колебательного звена

Вычисление установившейся ошибки в следящей системе, содержащей существенные нелинейности, при воздействии потенциальной функции

Рассмотрим ошибки в установившемся режиме, вносимые существенными нелинейностями в следящей системе при воздействии $x_{вх}(t)$ в виде потенциальной функции $\varphi(t)$ (2).

При анализе ошибок нелинейных систем управления, как правило, используются приближенные методы. При этом осуществляется линеаризация существенных нелинейных звеньев и замена их линейными, либо выполняется точное моделирование системы. Поэтому для высокоточных и быстродействующих систем рассмотрим аналитический метод анализа погрешностей, используя изложенный выше материал.

Исследование поведения системы во временной области по реакции на ограниченное воздействие в виде потенциальной функции позволяет получать точное описание выходного сигнала. Поэтому рассмотрим условия сходимости полученных временных рядов, содержащих нелинейности, и оценим их влияние на точность системы.

Представим каждый временной ряд, представляющий выходной сигнал (см. рис. 6), в виде двух составляющих: ряд, включающий только линейную часть, и ряд, содержащий нелинейную часть.

Первоначально рассмотрим систему, содержащую зону *нечувствительности*, и определим ошибку выходного сигнала относительно входного:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = x_{вх}(t) - x(t) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n)\varphi(j, t, n) - \\ & - \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \\ & + \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)bd\tau = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \left[\varphi(j, t, n) - \right. \\ & - \left. \int_0^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right] + \sum_{n=0}^{n=\infty} b \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)d\tau + \\ & + \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \left[\int_0^{t_{нач}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t_{кон}}^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения $\varepsilon(t)$ в установившемся режиме при $t \rightarrow \infty$ представим соотношение (13) в виде ряда, не учитывающего нелинейность,

$$\varepsilon_{л}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \left[\varphi(j, t, n) - \int_0^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right] \quad (14)$$

и ряда, который включает нелинейную часть

$$\begin{aligned} \varepsilon_{н}(t) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[b \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)d\tau + C(j, n) \times \right. \\ & \left. \times \left(\int_0^{t_{нач}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \int_{t_{кон}}^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Ряд, содержащий только линейную часть (14), будет сходящимся при $t \rightarrow \infty$ для устойчивой системы, так как весовая функция $k(t-\tau)$ ограничена, функция $\varphi(j, \tau, n)$ всегда ограничена по определению, следовательно, и произведение $k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)$ будет ограничено.

Таким образом, наличие нелинейности приводит к дополнительной статической ошибке $\varepsilon_{н}(t)$ в системе, которая определяется линейной частью системы, зоной нечувствительности, а также значением входного сигнала. Значение дополнительной ошибки определяется из соотношения (15). Для зоны нечувствительности всегда существует статическая ошибка и в соответствии с выражением (15) зависит от зоны нечувствительности b , весовой функции линейной части $k(t-\tau)$ и значения $C(j, n)$ для входного сигнала.

Для нелинейности типа *ограничение* дополнительная установившаяся ошибка определяется уравнением

$$\varepsilon_{н}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau) [C(j, n)\varphi(j, \tau, n) - b]d\tau \right\} \quad (16)$$

и может быть минимизирована, если выполнять условие $C(j, n)\varphi(j, t, n) = b$ для каждого значения n . Для произвольного входного сигнала $x_{вх}(t)$ на интервале существования $0 \leq t \leq t_{кон}$ условие минимума $\varepsilon_{н}(t)$ может быть выполнено в среднем $M\{C(j, n)\varphi(j, t, n)\} = b$.

Для нелинейности типа *зазор* дополнительная установившаяся ошибка определяется уравнением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{н}(t) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ C(j, n) \left(\int_{\frac{n}{2^j}}^{t_{кон}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \right. \right. \\ & + \left. \int_{t_0}^{t_{нач}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau - \int_{\frac{n}{2^j}}^t k(t-\tau)d\tau \right) + \\ & \left. + \frac{b}{2} \int_{t_{кон}}^{t_{нач}} k(t-\tau)d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Дополнительная установившаяся ошибка для данной нелинейности в отличие от зоны нечувствительности и ограничения при наличии входного сигнала равна нулю $\varepsilon_{уст}(t) = 0$ и сохраняется при отсутствии входного сигнала $\varepsilon_{уст}(\infty) = \frac{b}{2}$.

Исследование устойчивости следящих систем, включающих существенные нелинейности, с использованием вейвлет-преобразования

При анализе устойчивости следящих систем управления частотными методами используются гармонические сигналы, действующие при $t \rightarrow \infty$. В этом случае анализируется поведение системы в "большом". При анализе устойчивости "в малом" в соответствии с первым методом Ляпунова рассматривается устойчивость линеаризованной системы. Однако линеаризация существенных нелинейностей, рассмотренных выше, возможна только заменой их линейными звеньями. Поэтому для высокоточных и быстродействующих систем такая замена не дает точного представления об устойчивости и поведении нелинейной системы "в малом".

Исследование поведения системы "в малом" во временной области по реакции на ограниченное воздействие в виде потенциальной функции позволяет получать точное описание выходного сигнала и анализировать устойчивость замкнутой единичной обратной связью следящей системы. В качестве сигнала, по которому оценивается устойчивое состояние системы, примем воздействие в виде полуволны (3) (см. рис. 3). Параметр C для удобства анализа целесообразно принимать равным 1.

В качестве параметров, по которым будем оценивать устойчивость замкнутой следящей системы по реакции разомкнутой системы на воздействие в виде полуволны (см. рис. 3), принимаются следующие переменные. Параметр j является основным переменным параметром, относительно которого строятся коэффициент передачи модуля $K(j)$ и относительное запаздывание $T_3(j)$. Относительное запаздывание $T_3(j)$ представляет собой отношение реального запаздывания выходного сигнала $\Delta t(j)$ к интервалу времени между максимумом и минимумом полуволны $T(j)$ (см. рис. 3):

$$T_3(j) = \frac{\Delta t(j)}{T(j)}, \quad (18)$$

где $T(j) = \frac{\Delta n}{2^j}$. Коэффициент передачи $K(j)$ представляет собой отношение максимального сигнала на выходе системы x_{\max} к C :

$$K(j) = \frac{x_{\max}}{C}. \quad (19)$$

Процедуры определения коэффициента передачи $K(j)$ и относительного запаздывания $T_3(j)$ можно выполнять графически, используя программу MATLAB-Simulink. Аналитически для определения коэффициента передачи $K(j)$ и относительного запаздывания $T_3(j)$ целесообразно использовать численные методы дифференцирования и определять значения x_{\max} и значение t , соответствующее x_{\max} . Первоначально рассмотрим реакции линейных звеньев на воздействие в виде полуволны.

Реакция типовых линейных звеньев на воздействие в виде полуволны

Рассмотрим интегрирующее звено. Построим зависимости коэффициента передачи $K(j)$ и относительное запаздывание $T_3(j)$ при воздействии на интегрирующее звено сигнала вида (3). На рис. 8 приведен переходной процесс, а на рис. 9 построены зависимости $K(j)$ и $T_3(j)$ для интегрирующего звена.

Для интегрирующего звена запаздывание $T_3(j)$ имеет постоянное значение, равное $-0,5$, не зависящее от j . Коэффициент передачи $K(j)$ изменяется по убывающей экспоненте (рис. 9).

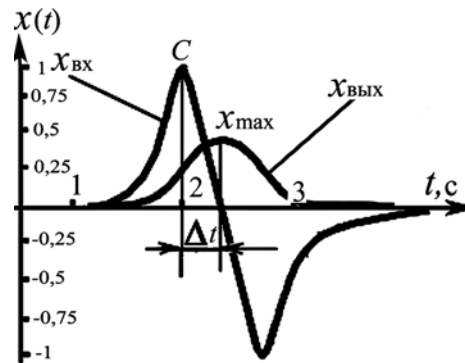


Рис. 8. Переходной процесс интегрирующего звена

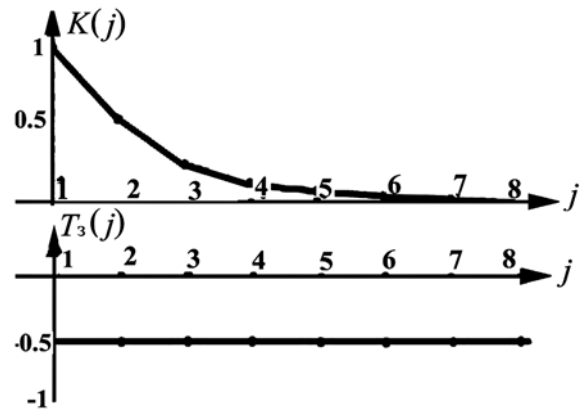


Рис. 9. Функциональные зависимости $K(j)$ и $T_3(j)$ для интегрирующего звена

На рис. 10 приведены переходные процессы и зависимости $K(j)$, $T_3(j)$ для типовых линейных звеньев на воздействие в виде полуволны (3).

Анализ устойчивости замкнутой системы по реакции разомкнутой системы на типовое воздействие в виде полуволны

Рассмотрим устойчивость замкнутой следящей системы (рис. 11) по реакции разомкнутой системы на типовое воздействие вида (см. рис. 3). Для этого строится зависимость коэффициента передачи $K(j)$ и относительное запаздывание $T_3(j)$ для разомкнутой системы.

Для устойчивой системы в разомкнутом состоянии замкнутая система будет устойчива в том случае,

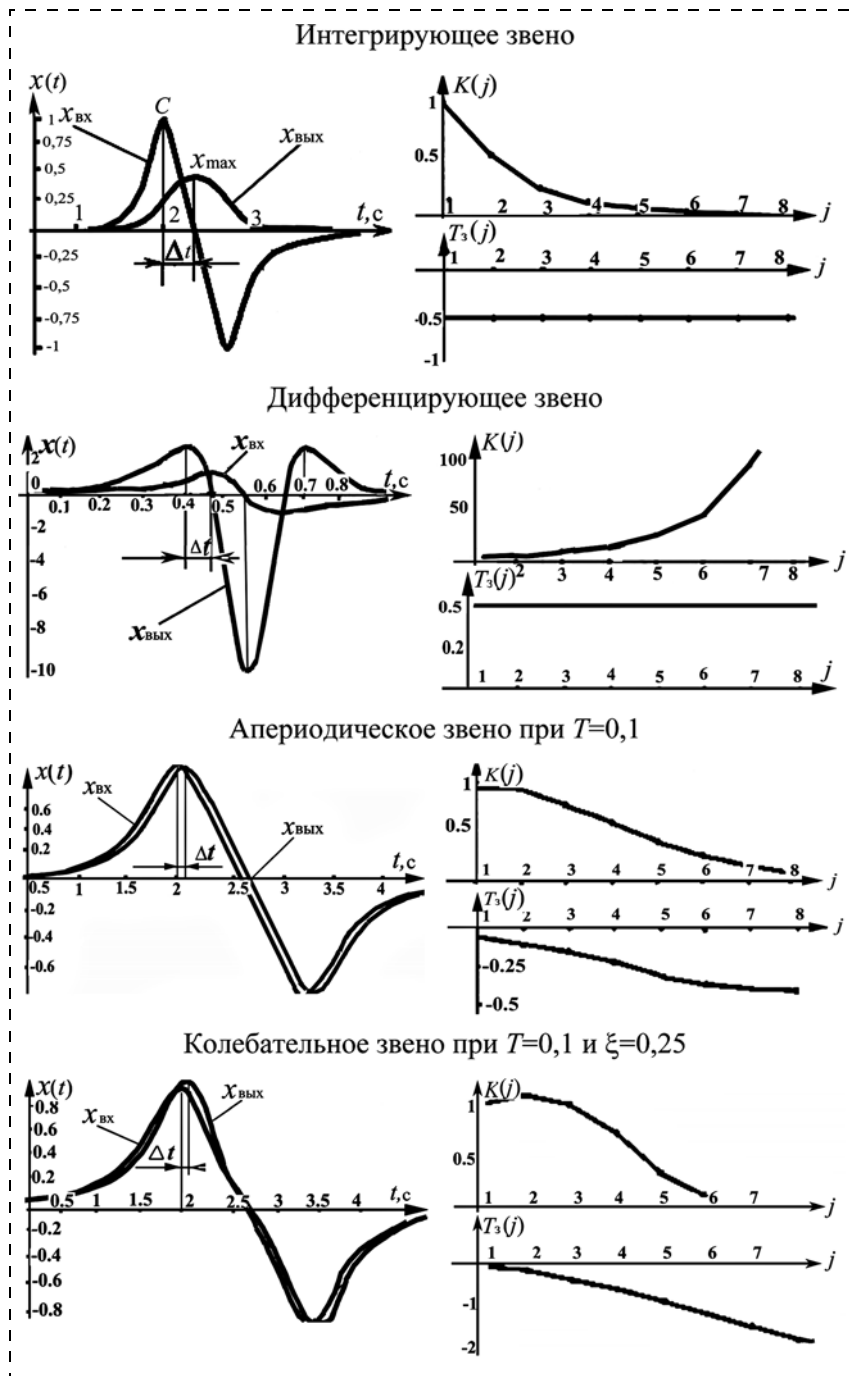


Рис. 10. Переходные процессы и зависимости $K(j)$, $T_3(j)$ для типовых линейных звеньев на воздействие в виде полуволны (3)

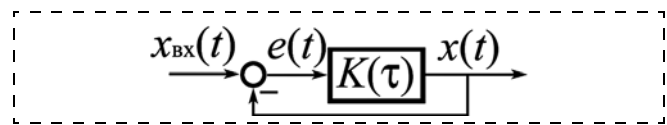


Рис. 11. Замкнутая следящая система, где $e(t)$ — ошибка следящей системы, $K(\tau)$ — оператор преобразования сигнала разомкнутой системы

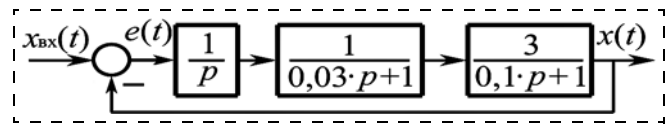


Рис. 12. Система, содержащая линейные звенья

если при изменении j график зависимости $T_3(j) = \frac{\Delta t(j)}{T(j)}$ будет пересекать значение $T_3(j) = -1$ правее точки пересечения $K(j) = \frac{x_{\max}}{C} = 1$, где $T(j) = \frac{\Delta n}{j^2}$.

Данное утверждение вытекает из свойства воздействия в виде полуволны, которая принимает симметрично положительное и отрицательное значения с периодом $T(j)$, а также из структуры следящей системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью.

Если при изменении j возникает условие, когда для значения $j = j_3$ запаздывание $T_3(j_3)$ входного сигнала в прямом тракте системы будет равно $T_3(j_3) = T(j)$ (см. рис. 3), то выходной сигнал будет совпадать по фазе с отрицательной полуволной входного сигнала. В этом случае при наличии единичной отрицательной обратной связи, если коэффициент передачи $K(j)$ для прямого тракта системы будет меньше 1, то выходной сигнал будет убывающим если $K(j)$ больше 1, то выходной сигнал будет расходящимся. В первом случае замкнутая система будет устойчива, а во втором — неустойчива.

Таким образом, для неустойчивой системы в замкнутом состоянии при представлении произвольного входного сигнала в виде суммы потенциальных функций и вейвлетов будут слагаемые, которые приводят к расхождению выходного сигнала.

Первоначально рассмотрим анализ устойчивости замкнутой системы по реакции разомкнутой системы на входное воздействие вида (3) на примере одного модуля, содержащего только линейную часть, и для модуля, включающего существенную нелинейность.

Проверим данное утверждение первоначально на примере линейной системы.

Пример 2. Рассмотрим линейную систему (рис. 12), где оператор преобразования прямого тракта для линейной системы включает интегратор и два аperiodических звена, p — оператор дифференцирования, $1/p$ — оператор интегрирования.

Данная система устойчива в замкнутом состоянии, так как точка пересечения $T_3(j) = -1$ находится правее точки пересечения $K(j) = 1$ (рис. 13).

Если увеличить коэффициент $K(j)$ до значения $K(j) = 40$, то система находится на границе устойчивости, а при $K(j) = 45$ становится неустойчивой. Это следует из построенных характеристик для $K(j)$ и $T_3(j)$. Для неустойчивой системы при изме-

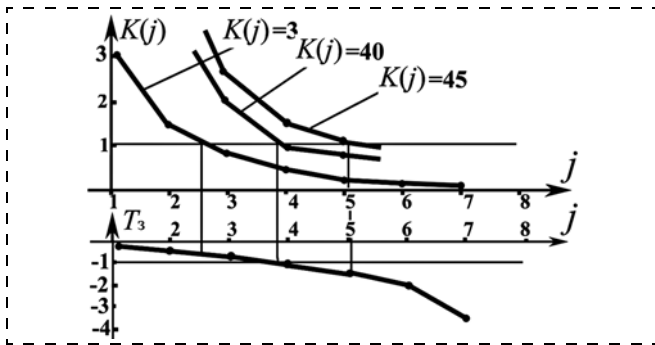


Рис. 13. Функциональные зависимости для $K(j)$ и $T_3(j)$ линейной системы (см. рис. 10)

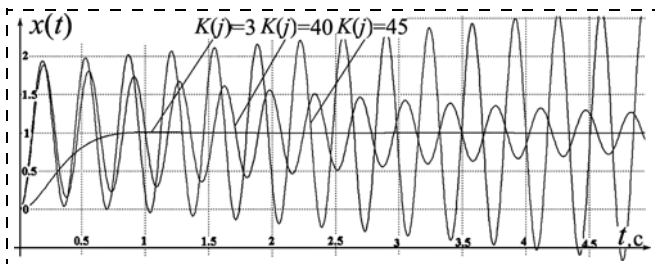


Рис. 14. Переходные процессы для замкнутой системы при единичном воздействии

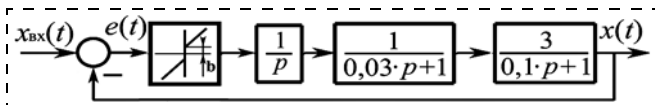


Рис. 15. Следящая система, содержащая линейные звенья и нелинейность типа "опережение"

нении j график $T_3(j)$ пересекает значение $T_3(j) = -1$ левее графика $K(j)$ при значении $K(j) = 1$.

На рис. 14 приведены переходные процессы для замкнутой системы при единичном ступенчатом воздействии, из которых следует, что при $T_3(j) = 45$ процесс становится расходящимся

Утверждение об устойчивости замкнутой следящей системы, изложенное выше только для линейных систем, справедливо и для следящих систем, содержащих существенные нелинейности. Данное утверждение объясняется тем, что устойчивость системы оценивается непосредственно по переходным процессам во временной области.

Рассмотрим пример системы, в которой кроме линейных звеньев содержится нелинейное звено.

Пример 3. Система, представленная на рис. 15, содержит нелинейность типа "опережение". Используя предложенный выше метод, оценим устойчивость замкнутой системы при введении нелинейности. Для этого построим зависимости $K(j)$, $T_3(j)$ и оценим устойчивость замкнутой системы с введенной нелинейностью, у которой $b = 0,2$. Как было показано в предыдущем примере, замкнутая система без нелинейности является устойчивой. Введение нелинейности типа "опережение" приводит к возникновению автоколебаний в замкнутой системе, так как график $T_3(j)$ пересекает точку $T_3(j) = -1$ при значении $K(j) \approx 1$ (рис. 16). Следует отметить, что графики для $T_3(j)$ для разомкнутой линейной



Рис. 16. Функциональные зависимости $K(j)$ и $T_3(j)$ для системы, включающей нелинейность типа "опережение" и системы, не содержащей нелинейность

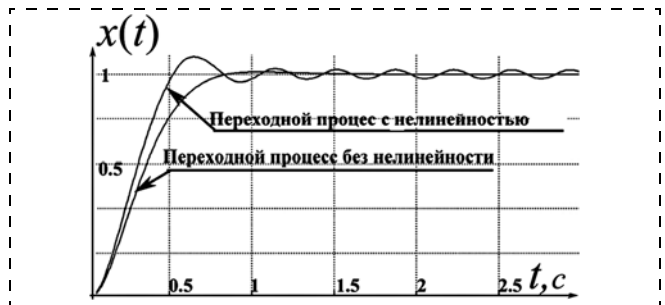


Рис. 17. Переходной процесс замкнутой системы без нелинейного звена и содержащей нелинейность типа "опережение" при единичном воздействии

системы и для системы с введенной нелинейностью совпадают. Наличие автоколебаний в замкнутой системе с нелинейностью подтверждается переходным процессом замкнутой системы на постоянное входное воздействие (рис. 17).

Заключение

Применение теории вейвлет-преобразований для анализа нелинейных систем позволяет исследовать сложные системы, содержащие существенные нелинейности, аналогично линейным системам. Предложенная методика анализа нелинейных систем имеет преимущество в сравнении с частотными методами, так как рассматривает процессы во временной области и позволяет аналитически исследовать ошибки и устойчивость следящих систем.

Список литературы

1. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1998. Т. 166, № 11. С. 1145–1170.
2. Афонин В. Л., Чепелев В. М. Метод потенциальных функций для построения вейвлет-рядов // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 2. С. 104–114.
3. Афонин В. Л., Чепелев В. М. Вейвлет-преобразования на основе потенциальных функций в задачах распознавания образов // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. 94–105.
4. Афонин В. Л., Кондратьев И. М. Применение аппарата вейвлет-разложений для анализа и оценки шероховатости поверхности детали при механической обработке // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2013. № 3. С. 65–70.

5. **Воробьев В. И., Грибунин В. Г.** Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: Изд-во ВУС, 1999.
6. **Добешин И.** Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001.
7. **Дьяконов В. П.** Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН—Пресс, 2004. 400 с.
8. **Смоленцев Н. К.** Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.
9. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 412 с.
10. **Afonin V. L., Sakharova E. I.** Estimation Plane Image Feature Attributes using Wavelet Transform Coefficients // *Engineering & Automation Problems*. 2010. N. 1. P. 82—84.
11. **Dinggang Shen, Horace H. S. Ip.** Discriminative wavelet shape descriptors for recognition of 2-D patterns // *Pattern Recognition*. 1999. V. 32. P. 151—165.

12. **Canuto C., Tabacco A., Urban K.** The Wavelet Element Method. Part II: Realization and Additional Features in 2D and 3D // *NASA/CR—1998—207637, ICASE Report No.* P. 98—117.
13. **Chun—Te Li, Jiang Li, Shizhuo Yin et al.** Synthesize multi-level composite filter for synthetic-aperture radar image identification // *Optics Communications*. 1998. V. 146. P. 285—301.
14. **Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
15. **Попов Е. П.** Теория нелинейных систем автоматического управления и регулирования: учеб. пособ. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1988. 256 с.
16. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления. М.-Л.: Энергия, 1965. 396 с.
17. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.

Wavelet Transform Method in Applications to the Analysis of the Nonlinear Control Systems

V. L. Afonin, afoninwl@rambler.ru,
Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 101990, Russian Federation

*Corresponding author: Afonin Vyacheslav L., D. Sc., Professor, Chief Researcher,
Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Science,
Moscow, 101990, Russian Federation, e-mail: afoninwl@rambler.ru*

*Received on October 03, 2016
Accepted on November 11, 2016*

The article is devoted to the theory of Wavelet—transformations with reference to the analysis and synthesis of the dynamic characteristics of the control systems containing an essential nonlinearity of the type of the zone of tolerance, restriction, backlash, etc. of nonlinearity. In the presented work a possibility of application of a device of the theory of Wavelet—transformations for the analysis and synthesis of the dynamic characteristics of the control systems containing essential nonlinearity is considered. A scaling function and wavelet potential function are proposed. The given device has an advantage in comparison with the frequency methods, because it takes into account the processes in the time area. Reactions of the linear systems, including essential nonlinearity, to the influence of a kind of potential function and wavelet are investigated. Errors in the established mode, because of the essential nonlinearities in the tracking system are considered under the influence of the signals representing a Wavelet—number, made of potential functions and wavelet. The condition of stability of the closed-loop system to reaction of the open-loop on the typical influence in the form of a half wave is formulated. The given condition allows us to analyze the stability of the tracking system containing an essential nonlinearity. For this purpose the dependence of the factor of transfer $K(j)$ and the relative delay $T_3(j)$ for the open-loop system, where parameter j characterizes the width of a half wave, is formed. Application of the theory of Wavelet—transformations for the analysis of the nonlinear systems allows us to investigate the complex systems containing the essential nonlinearity as similarly linear systems. The proposed technique of analysis of the nonlinear systems has an advantage in comparison with the frequency methods, because it considers the processes in the time area and allows us to investigate analytically the errors and stability of the tracking systems.

Keywords: *Wavelet Transform, potential functions, essential nonlinearity, zone of tolerance, restriction, backlash, analysis and synthesis of the nonlinear systems*

For citation:

Afonin V. L. Wavelet Transform Method in Applications to the Analysis of the Nonlinear Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 308—316.

DOI: 10.17587/mau.18.308-316

References

1. **Astafiev N. M.** *Successes of Physical Sciences*, 1998, vol. 166, no. 11, pp. 1145—1170 (in Russian).
2. **Afonin V. L., Shepelev V. M.** *News of the Russian Academy of sciences. The theory and control stems*, 2008, no. 2, pp. 104—114 (in Russian).
3. **Afonin V. L., Shepelev V. M.** *News of the Russian Academy of sciences. The theory and control systems*, 2009, no. 6, pp. 94—105 (in Russian).
4. **Afonin V. L., Kondratiev I. M.** *Engineering & Automation Problems*, 2013, no. 3, pp. 65—70 (in Russian).
5. **Vorobiev V. I., Gribov V. G.** The theory and practice of Wavelet-transformation, SPb., Publishing house of VUS, 1999 (in Russian).
6. **Dobeshin I.** Ten lectures on of Wavelet, Moscow-Igevs, RHCD, 2001 (in Russian).
7. **Diecov V. P.** Wavelet. From the theory to practice, Moscow, COLON-Press, 2004, 400 p. (in Russian).
8. **Smolensceev N. K.** Bases of the theory Wavelet. Wavelet in MATLAB, Moscow, DMK-Press, 2005, 304 p. (in Russian).

9. **Schui K.** Introduction in Wavelet, Moscow, Mir, 2001, 412 p. (in Russian).
10. **Afonin V. L., Sakharova E. I.** *Engineering & Automation Problems*, 2010, no. 1, pp. 82—84 (in Russian).
11. **Dinggang Shen, Horace H. S. Ip.** *Pattern Recognition*, 1999, vol. 32, pp. 151—165.
12. **Canuto Claudio, Tabacco Anita, Urban Karsten.** The Wavelet Element Method. Part II: Realization and Additional Features in 2D and 3D, NASA/CR—1998—207637, ICASE Report No, pp. 98—117.
13. **Chun—Te Li, Jiang Li, Shizhuo Yin et al.** *Optics Communications*, 1998, vol. 146, pp. 285—301.
14. **Андронов А. А., Вит А. А., Хаикин С. Э.** *Теория колебаний* (Theor of fluctuations), Moscow, Physic Mathem State Publishing, 1959, 915 p. (in Russian).
15. **Попов Е. П.** *Теория нелинейных систем автоматического управления и регулирования* (Theor's priests of nonlinear systems of automatic control and regulation), Moscow, Nauka, The main edition. Fis.-mat. Lit, 1988, 256 p. (in Russian).
16. **Voronov A. A.** *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Bas's ravens of the theory of automatic control), Moscow—Leningrad, Energy, 1965, 396 p. (in Russian).
17. **Corn G., Corn T.** *Spravochnik po matematike* (The directory on the mathematician), Moscow, Nauka, 1970, 720 p. (in Russian).