М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., dp940@mail.ru,
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

Условия трансверсальности как эффективный инструмент в математических построениях оптимальных процессов

Статья посвящена методам математической теории оптимальных процессов. Рассматривается принцип максимума Л. С. Понтрягина. Детально изучены условия трансверсальности, их роль, место и значение в общей процедуре решения задач поиска оптимальных функций. Данная работа устраняет имеющийся методический пробел, связанный с неполным использованием условий трансверсальности. На конкретных примерах демонстрируется, что условия трансверсальности (как одно из необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума) являются крайне эффективным математическим средством (а в ряде случаев даже единственным) при определении характерных свойств, закономерностей и ключевых характеристик (параметров, констант, интегралов движения) оптимального решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (динамических систем).

Ключевые слова: принцип максимума, условия трансверсальности, критерий оптимальности, функционал качества, условия оптимальности, краевая задача

В настоящее время при решении многих оптимизационных задач с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина значение условий трансверсальности явно недооценивается. Целью данной работы было стремление показать, что условия трансверсальности — не простая формальность, участвующая в процедуре нахождения оптимальных временных функций (присутствующая в системе необходимых условий оптимальности, записанных в соответствии с принципом максимума Л. С. Понтрягина [1]), а эффективное средство (а в ряде случаев единственное, ничем не заменимое) для определения характеристик и свойств оптимального процесса, вычисления ключевых его параметров (констант).

Как правило, многие авторы и исследователи [2—5] (в основном в прикладных областях) ограничиваются лишь тем, что проверяют выполнение условий трансверсальности (как необходимых условий оптимальности) только в конце решения задач построения оптимальных процессов, уже после того, как само решение получено, формализовано конкретными математическими зависимостями. При этом краевая задача принципа максимума решается по-разному [7—11]. Проверку делают путем подстановки найденного оптимального решения исходной системы уравнений и сопряженных функций в уравнения, соответствующие условиям трансверсальности (в некоторых частных случаях условия трансверсальности удовлетворяются автоматически [5—7]). Между тем условия трансверсальности являются таким же равноправным необходимым условием оптимальности, как и общепризнанное условие максимума функции Гамильтона и

сопряженная система дифференциальных уравнений, и их необходимо включать в систему необходимых условий оптимальности с самого начала (наравне с сопряженной системой уравнений и условием максимума функции Гамильтона), сразу после введения сопряженных переменных, записи функции Гамильтона и сопряженной системы уравнений. Такой порядок действий и дальнейшего применения процедуры принципа максимума является наиболее правильным и целесообразным. Как показывает практическое применение формализма принципа максимума, во многих случаях включение условий трансверсальности в общую систему необходимых условий оптимальности еще до формализации закономерностей оптимального движения динамической системы, описываемой исходной системой дифференциальных уравнений (задаваемой формулировкой оптимизационной задачи), является единственно верным и позволяет найти решение сложнейших, казалось бы, задач. Решение краевой задачи принципа максимума также будет учитывать условия трансверсальности, что обеспечит полноту и достоверность результатов решения исходной задачи оптимизации, гарантирует законченность полученного решения.

Постановка задачи

Обычно динамический процесс задается дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор состояния (его компоненты x_i — фазовые переменные, отражающие текущее состоя-

ние динамической системы, $i = \overline{1, n}$; $\mathbf{y}$ — вектор управления, у которого компоненты y_j — искомые функции времени, которые необходимо выбрать оптимальными ($j = \overline{1, l}$). Физическое содержание конкретной оптимизационной задачи определяется видом уравнений $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$. Пусть динамический процесс описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_3 x_4 - y_2 x_7, \quad \dot{x}_2 = y_3 x_5 - y_2 x_8, \quad \dot{x}_3 = y_3 x_6 - y_2 x_9, \\ \dot{x}_4 &= y_1 x_7 - y_3 x_1, \quad \dot{x}_5 = y_1 x_8 - y_3 x_2, \quad \dot{x}_6 = y_1 x_9 - y_3 x_3, \quad (2) \\ \dot{x}_7 &= y_2 x_1 - y_1 x_4, \quad \dot{x}_8 = y_2 x_2 - y_1 x_5, \quad \dot{x}_9 = y_2 x_3 - y_1 x_6. \end{aligned}$$

Система (2) определяет изменение временных функций $x_i(t)$ при известном поведении функций $y_j(t)$ ($i = \overline{1, 9}, j = \overline{1, 3}$). Движение $\mathbf{x}(t)$ есть решение дифференциального уравнения (1). Для конкретизации на решения уравнения (1) необходимо наложить некоторые ограничения, в частности, задать условия в начальный $t = 0$ и конечный $t = T$ моменты времени. Рассмотрим широко распространенный класс задач, когда краевые условия для траектории движения $\mathbf{x}(t)$ формализуются равенствами

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T, \quad (4)$$

где $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T$ — фиксированные векторы, задающие состояние динамической системы в начальный и конечный моменты времени.

Заметим, что в большинстве случаев уравнение (1) имеет не одно, а бесконечно много решений, удовлетворяющих заданным условиям (3), (4). Из всего множества решений системы уравнений (1), (3), (4) интересны только те, которые являются оптимальными (наилучшими) в том или ином смысле. Обычно критерий оптимальности выражается функционалом качества

$$G = \int_0^T g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dt, \quad (5)$$

где $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ — неотрицательная функция; T — время окончания оптимального процесса.

В самом общем случае задача оптимизации формулируется следующим образом: требуется перевести динамическую систему, описываемую уравнением (1), из состояния (3) в состояние (4), чтобы интеграл (5) был минимальным.

Процедура решения задачи

Если принять функции y_j , стоящие в правых частях уравнений (2), кусочно-непрерывными функциями времени, то мы можем использовать принцип максимума Л. С. Понтрягина. В соответствии с ним введем сопряженные переменные q_i , соот-

ветствующие компонентам x_i вектора состояния $\mathbf{x}$, и составим функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H &= \varphi_0 g + q_1(y_3 x_4 - y_2 x_7) + q_2(y_3 x_5 - y_2 x_8) + \\ &+ q_3(y_3 x_6 - y_2 x_9) + q_4(y_1 x_7 - y_3 x_1) + q_5(y_1 x_8 - y_3 x_2) + \\ &+ q_6(y_1 x_9 - y_3 x_3) + q_7(y_2 x_1 - y_1 x_4) + q_8(y_2 x_2 - y_1 x_5) + \\ &+ q_9(y_2 x_3 - y_1 x_6), \end{aligned}$$

где $\varphi_0 = \text{const} < 0$ ($\varphi_0 \neq 0$).

Уравнения для сопряженных функций q_i согласно принципу максимума [1] имеют вид

$$\dot{q}_i = -\partial H / \partial x_i \quad (i = \overline{1, 9}, j = \overline{1, 3}). \quad (6)$$

Сопряженные функции q_i должны удовлетворять условиям трансверсальности:

$$\begin{aligned} q_i(0) &= \sum_{h=1}^m w_h \frac{\partial F_h(\mathbf{x}(0))}{\partial x_i} \Big|_{t=0}; \\ q_i(T) &= \sum_{k=1}^p z_k \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{x}(T))}{\partial x_i} \Big|_{t=T}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $F_h(\mathbf{x}(0))$ — функции, задающие краевое условие на левом конце траектории $\mathbf{x}(t)$ в форме $F_h(\mathbf{x}(0)) = 0$, причем $h = \overline{1, m}$ ($m \leq n$); w_k — числа, не все равные нулю; $\Phi_k(\mathbf{x}(T))$ — функции, задающие краевое условие для правого конца траектории $\mathbf{x}(t)$ в форме $\Phi_k(\mathbf{x}(T)) = 0$, причем $k = \overline{1, p}$ ($p \leq n$); z_k — числа, не все равные нулю; для задачи в постановке (2) — (5) число фазовых переменных $n = 9$.

Если время T окончания оптимального процесса не фиксировано, то оптимальные сопряженные функции $q_i(t)$ должны удовлетворять еще одному необходимому условию оптимальности, выраженному условием трансверсальности

$$H(\mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{q}(T), T) = - \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{x}(T), T)}{\partial T}, \quad (8)$$

где $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_9\}$ — вектор сопряженных переменных; $\Phi_k(\mathbf{x}(T), T)$ — функции, задающие краевое условие на правом конце траектории $\mathbf{x}(t)$ в форме $\Phi_k(\mathbf{x}(T), T) = 0$, причем $k = \overline{1, p}$ ($p \leq n$); v_k — числа, не все равные нулю (напомним, что для задачи (2)–(5) $n = 9$, а $l = 3$).

Из структуры функции Гамильтона, уравнений (6) и условий трансверсальности (7), (8) следует, что оптимальные функции q_i пропорциональны отрицательной константе φ_0 . Поэтому справедливо принять $\varphi_0 = -1$.

Так как рассматриваемая задача (2)–(5) — это задача с закрепленными левым и правым концами траектории $\mathbf{x}(t)$, то условие трансверсальности (7) для сопряженных переменных q_i на момент времени $t = 0$ имеет вид [12]: $q_i(0) = w_i$ ($i = \overline{1, 9}$), где $w_1, w_2, \dots, w_9$ — некоторые числа, одновременно не равные нулю. Для сопряженных переменных q_i на момент времени $t = T$ условие трансверсальности (7) имеет аналогичный вид [12]: $q_i(T) = z_i$ ($i = \overline{1, 9}$), где хотя бы одно из чисел $z_1, z_2, \dots, z_9$ отлично от

нуля; условие трансверсальности (8) принимает форму

$$H(T) = 0. \quad (9)$$

Первые два условия трансверсальности эквивалентны неравенствам

$$\sum_{i=1}^9 \dot{q}_i^2(0) > 0 \text{ и } \sum_{i=1}^9 \dot{q}_i^2(T) > 0 \quad (10)$$

и становятся очевидными, если краевые условия (3), (4) переписать в форме равенств

$$x_i(0) - x_{i0} = 0 \text{ и } x_i(T) - x_{iT} = 0,$$

где x_{i0} — элементы вектора $\mathbf{x}_0$; x_{iT} — элементы вектора $\mathbf{x}_T$; отсюда $F_k = x_i(0) - x_{i0}$; $\Phi_k = x_i(T) - x_{iT}$; $\partial F_k / \partial x_i = \partial \Phi_k / \partial x_i = 1$ для $k = i$ и $\partial F_k / \partial x_i = \partial \Phi_k / \partial x_i = 0$, если $k \neq i$.

Последнее условие трансверсальности (требование (9)) получается, если граничное условие (4) для правого конца траектории представить в виде $\Phi_k = 0$, где $\Phi_k = x_i(T) - x_{iT}$, откуда становится очевидным утверждение $\partial \Phi_k / \partial T \equiv 0$ для всех k , а значит, условия (8) и (9) являются эквивалентными. Стоит отметить, что в задачах с нефиксированным временем T , если гамильтониан H не зависит явно от времени, то $H = 0$ в любой момент времени t , а не только $H(T) = 0$ [13].

Задача нахождения оптимальной функции $\mathbf{y}(t)$ и оптимального движения $\mathbf{x}(t)$ системы (2) сводится к поиску решения уравнений (2), (6) с одновременной максимизацией в каждый момент времени t функции Гамильтона, удовлетворяющего условиям трансверсальности (10) (если время T фиксировано) или (9), (10) (если время T не фиксировано).

Краевая задача принципа максимума заключается в определении таких начальных значений $q_i(0)$ для сопряженных функций, при которых решение $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ системы уравнений (2), (6) с начальными условиями (3), удовлетворяющее условию максимума функции Гамильтона в каждый текущий момент времени t и условиям трансверсальности (10) (или (9), (10) для задач с нефиксированным временем T) в начальный и конечный моменты времени, удовлетворяет граничному условию (4).

Предположим, что функционал (5) не содержит переменных состояния x_i . В этом случае сопряженная система дифференциальных уравнений для q_i запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= y_3 q_4 - y_2 q_7, \quad \dot{q}_2 = y_3 q_5 - y_2 q_8, \quad \dot{q}_3 = y_3 q_6 - y_2 q_9, \\ \dot{q}_4 &= y_1 q_7 - y_3 q_1, \quad \dot{q}_5 = y_1 q_8 - y_3 q_2, \quad \dot{q}_6 = y_1 q_9 - y_3 q_3, \\ \dot{q}_7 &= y_2 q_1 - y_1 q_4, \quad \dot{q}_8 = y_2 q_2 - y_1 q_5, \quad \dot{q}_9 = y_2 q_3 - y_1 q_6. \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно показать, что в этом частном варианте постановки задачи (2)—(5) (когда функционал (5) не зависит явным образом от фазовых переменных x_i) условия трансверсальности $\mathbf{q}(0) \neq 0$ и $\mathbf{q}(T) \neq 0$ выполняются автоматически, если считать функцию $\mathbf{q}(t)$ не тождественно равной нулю ($\mathbf{q}$ — вектор со-

пряженных переменных q_i). Чтобы убедиться в этом, достаточно проанализировать сумму

$$\sum_{i=1}^9 \dot{q}_i^2(t). \quad (12)$$

Взяв производную по времени от суммы (12) и заменив в получившемся выражении величины $\dot{q}_i$ правыми частями уравнений (11), получим тождество

$$\sum_{i=1}^9 \dot{q}_i q_i \equiv 0,$$

означающее, что сумма (12) есть величина постоянная. Поэтому, если допустить, что хотя бы одно из условий (10) не выполняется, то вектор $\mathbf{q}$ сопряженных переменных окажется тождественно равным нулю $\mathbf{q} \equiv 0$, а такие сопряженные функции $q_i(t)$ очевидно не могут быть оптимальными. Следовательно, любое решение $\mathbf{q} \neq 0$, удовлетворяющее системе (11), неизбежно будет удовлетворять условиям трансверсальности (7).

Системы уравнений (2) и (11) однотипны относительно коэффициентов y_1, y_2, y_3 . Решения уравнений (2) для переменных x_i и уравнений (11) для переменных q_i отличаются начальными условиями.

В функции H сгруппируем множители для y_1, y_2, y_3 , содержащие фазовые переменные x_i , и обозначим их r_1, r_2, r_3 . Выделив в явном виде такие множители при y_j , представим функцию Гамильтона H в следующем виде:

$$H = -g + y_1 r_1 + y_2 r_2 + y_3 r_3,$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= q_4 x_7 + q_5 x_8 + q_6 x_9 - q_7 x_4 - q_8 x_5 - q_9 x_6; \\ r_2 &= q_7 x_1 + q_8 x_2 + q_9 x_3 - q_1 x_7 - q_2 x_8 - q_3 x_9; \\ r_3 &= q_1 x_4 + q_2 x_5 + q_3 x_6 - q_4 x_1 - q_5 x_2 - q_6 x_3. \end{aligned}$$

Для переменных r_j справедливы дифференциальные уравнения:

$$\dot{r}_1 = y_3 r_2 - y_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = y_1 r_3 - y_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = y_2 r_1 - y_1 r_2. \quad (13)$$

Дифференцируя по времени равенства для r_j ($j = \bar{1}, 3$) и подставляя в них выражения для $\dot{x}_i$ и $\dot{q}_i$, вычисленные по уравнениям (2) и (11) соответственно, получим необходимые дифференциальные уравнения для временных функций $r_j(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= q_4 \dot{x}_7 + \dot{q}_4 x_7 + q_5 \dot{x}_8 + \dot{q}_5 x_8 + q_6 \dot{x}_9 + \dot{q}_6 x_9 - \\ &- q_7 \dot{x}_4 - \dot{q}_7 x_4 - q_8 \dot{x}_5 - \dot{q}_8 x_5 - q_9 \dot{x}_6 - \dot{q}_9 x_6 = \\ &= y_2 (q_4 x_1 + q_5 x_2 + q_6 x_3 - x_4 q_1 - x_5 q_2 - x_6 q_3) + \\ &+ y_3 (q_7 x_1 + q_8 x_2 + q_9 x_3 - x_7 q_1 - x_8 q_2 - x_9 q_3) = \\ &= y_3 r_2 - y_2 r_3 \end{aligned}$$

(для переменных r_2, r_3 получаем аналогичные выражения). Изменение вектора $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$ определяется решением уравнения $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{y}$, где $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Уравнения (13) для компонент r_j вектора $\mathbf{r}$ заменяют сопряженную систему уравнений (11). Как нетрудно видеть из уравнений (13), для вектора $\mathbf{r}$ спра-

ведливо свойство $|\mathbf{r}| = \text{const}$. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы при любом $t \in [0, T]$ не выполнялись равенства $x_i = \chi q_i$, потому что при их выполнении $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$, и дальнейшее решение задачи теряет смысл. Поэтому при поиске оптимального решения векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{q}$ считаются такими, что $\mathbf{x} \neq \chi \mathbf{q}$, где χ — скалярная величина (в противном случае $\mathbf{r} \equiv 0$), и рассматривается только вариант $\mathbf{r} \neq 0$ (т. е. когда функции q_i не пропорциональны переменным x_i). Понятно, что если $\mathbf{r} \neq 0$, то $\mathbf{q}(t) \neq 0$, и условия трансверсальности (7) удовлетворяются.

Задача нахождения оптимальной функции $\mathbf{y}(t)$ и оптимального движения $\mathbf{x}(t)$ системы (2) свелась к решению уравнений (2), (13) с одновременной максимизацией в каждый момент времени t функции Гамильтона и удовлетворением условия трансверсальности (9), если время T не фиксировано. Краевая задача принципа максимума заключается в определении такого значения вектора $\mathbf{r}(0) \neq 0$, при котором решение $\mathbf{x}(t)$ системы уравнений (2), (13) с начальными условиями (3), удовлетворяющее условию максимума функции Гамильтона в каждый момент времени t и условию трансверсальности (9) (для задач с нефиксированным временем T), удовлетворяет граничному условию (4).

Примеры задач, когда условия трансверсальности определяют ключевые характеристики оптимального процесса

Для примера приведем решение задачи (2)—(5), в которой оптимизируемый функционал (5) имеет вид

$$G = \int_0^T \sqrt{k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2} dt, \quad (14)$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$ — постоянные положительные коэффициенты.

Особенностью минимизируемого функционала (14) является тот факт, что его значение не зависит от длительности T оптимального процесса; значение G определяется исключительно краевыми условиями (векторами $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_T$) и коэффициентами k_1, k_2, k_3 (данное утверждение будет доказано ниже).

Считается, что y_j — кусочно-непрерывные функции времени. Запишем функцию Гамильтона для задачи (2)—(4), (14):

$$H = -\sqrt{k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2} + r_1 y_1 + r_2 y_2 + r_3 y_3.$$

Для построения искомой функции $\mathbf{y}(t)$ и нахождения оптимальной функции $\mathbf{r}(t)$ сделаем замену переменных $u_j = y_j \sqrt{k_j}$; $\mu_j = r_j / \sqrt{k_j}$ и введем векторы $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ и $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$. Функцию Гамильтона перепишем в виде:

$$H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\mu} - |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|(|\boldsymbol{\mu}| \cos \gamma - 1),$$

где γ — угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$. Функция Гамильтона H максимальна, если $\gamma = 0$ (когда векторы

$\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$ имеют одинаковое направление). Оптимальные функции y_j и r_j удовлетворяют равенствам

$$r_j = a r_j / k_j, \quad (15)$$

где $a \geq 0$ — скалярная величина, кроме $a \equiv 0$.

В любой момент времени $t \in [0, T]$ модуль оптимального вектора $\boldsymbol{\mu}$ остается постоянным $|\boldsymbol{\mu}| = \text{const}$. Оптимальные функции r_j удовлетворяют условию

$$r_1^2/k_1 + r_2^2/k_2 + r_3^2/k_3 = \text{const}. \quad (16)$$

Убедимся в этом, продифференцировав по времени левую часть равенства (16) и заменив по формулам (13) производные компонент r_j вектора $\mathbf{r}$, а затем в полученном выражении компоненты y_j вектора $\mathbf{y}$ заменяются по формулам (15), связывающим r_j и y_j . В результате имеем

$$r_1 \dot{r}_1/k_1 + r_2 \dot{r}_2/k_2 + r_3 \dot{r}_3/k_3 = y_1 r_2 r_3/k_3 - y_1 r_2 r_3/k_2 + y_1 r_2 r_3/k_2 - y_2 r_1 r_3/k_3 + y_2 r_1 r_3/k_3 - y_1 r_2 r_3/k_3 \equiv 0.$$

Получили ключевое свойство оптимального по критерию (14) процесса.

В задаче (2)—(4), (14) время T не фиксировано. Поэтому оптимальные векторы $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$ должны удовлетворять условию трансверсальности (9). Для выполнения $H(T) = 0$ надо выполнить хотя бы одно из условий $|\boldsymbol{\mu}(T)| = 1$ или $|\mathbf{u}(T)| = 0$. Функция H является линейной по аргументу $|\mathbf{u}|$. Если $|\boldsymbol{\mu}(T)| > 1$, то при оптимальном решении $|\mathbf{u}(T)| \rightarrow \infty$, как того требует условие максимума функции Гамильтона, но тогда $H \rightarrow \infty$, т.е. $H(T) \neq 0$, и условие трансверсальности (9) будет нарушено. Если $|\boldsymbol{\mu}(T)| < 1$, то в силу (16) условие максимума функции H в каждый текущий момент времени t требует, чтобы $|\mathbf{y}(t)| \equiv 0$; но в этом случае будет нарушено краевое условие (4). Единственным допустимым для оптимальных функций r_j вариантом является условие $|\boldsymbol{\mu}| = 1$. Учитывая свойство (16), пришли к выводу, что оптимальное значение $\mathbf{r}(0)$ обязано удовлетворять условию

$$r_1^2(0)/k_1 + r_2^2(0)/k_2 + r_3^2(0)/k_3 = 1. \quad (17)$$

Из свойств оптимальных функций r_j следует, что при оптимальном решении $\mathbf{y}(t)$ максимум функции Гамильтона H не зависит от модуля $|\mathbf{y}|$ (а зависит только от направления искомого вектора $\mathbf{y}$), и равенство $H = 0$ наблюдается на всем отрезке времени $[0, T]$. Величина $|\mathbf{y}|$ не влияет на выполнение необходимых условий оптимальности, а значит, значение функционала качества (14) не зависит от значения функции $a(t)$ в конкретный момент времени t .

Можем утверждать, что любое решение системы (2), (13), (15), удовлетворяющее краевым условиям (3), (4) и равенству (17), является оптимальным в смысле минимума интеграла (14). Условие (17) определяет значение ключевой характеристики $r_0 = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}(0)|$ для оптимальных функций $r_j(t)$. Линия, соединяющая точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_T$, остается в конфигурационном гиперпространстве R^9 одной и той же независимо от вида масштабирующей функции

$a(t)$, определяющей темп приближения к конечной точке $\mathbf{x}_T$. Длина оптимальной кривой из точки $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{x}_T$, вычисленная в соответствии с выражением (14), определяется в процессе решения краевой задачи принципа максимума одновременно с оптимальным значением $\mathbf{r}(0)$ и зависит только от $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_T$ и коэффициентов k_1, k_2, k_3 .

Задача минимизации интеграла (14) свелась к решению системы уравнений (2), (13), (15) с одновременным выполнением краевых условий (3), (4) и требования (17). Сформулированная задача (2)–(4), (14) решается с точностью до неотрицательной функции $a(t)$.

Произвол в выборе функции $a(t)$ позволяет сделать так, чтобы построенная оптимальная функция $\mathbf{y}(t)$ могла удовлетворять каким-то дополнительным условиям (не оговоренным в рамках задачи (2)–(4), (14)), что может оказаться весьма полезным при решении прикладных задач, связанных с оптимизацией физических процессов. Кроме случая выполнения требования $a(t) \geq 0$ функция $a(t)$, присутствующая в уравнениях (15), будет оптимальной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет равенству

$$\int_0^T a(t) dt = G_{\text{opt}}, \quad (18)$$

где G_{opt} — оптимальное значение интеграла (14), рассчитанное в результате решения краевой задачи принципа максимума (напомним, что $a(t)$ не может быть тождественно равной нулю).

Свойство инвариантности интеграла (14) по отношению к характеру поведения скалярной функции $a(t)$ — несомненное преимущество оптимизации по критерию (14). Кроме того, произвольность функции $a(t)$ и независимость значения (14) от величины $a(t)$ упрощает решение краевой задачи принципа максимума (нахождение оптимального значения $\mathbf{r}(0)$) и определение характеристики (14) для оптимального процесса. Пользуясь указанным свойством независимости оптимальных значений $\mathbf{r}(0)$ и (14) от функции $a(t)$, при решении краевой задачи принципа максимума мы можем принять $a(t) = \text{const} = a_0$. Тогда $G = a_0 T$, где T — время достижения условия (4) для решения $\mathbf{x}(t)$ системы (2), в которой функции y_1, y_2, y_3 вычисляются по выражениям (15) с учетом уравнений (13), (17) и условия $a = a_0$. Если $a_0 = 1$, то $G = T$. Отсюда следует, что мы можем интерпретировать характеристику (14) оптимального процесса следующим образом: для оптимального закона изменения функции $\mathbf{y}(t)$ обобщенные затраты G_{opt} численно равны времени достижения равенства $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_T$ для решения системы уравнений (2), (13), (17), (15), в которых $a = 1$ (начальное состояние $\mathbf{x}(0)$ зафиксировано условием (3)). При произвольном поведении функции $a(t)$ условие (18) определяет продолжительность оптимального процесса T .

Данный пример наглядно иллюстрирует, как условия трансверсальности (и только они) дают воз-

можность выявить ключевые свойства оптимального процесса. Для случая минимизации интеграла (14) такими отличительными свойствами оптимального решения являются равенство (17) и независимость значения (14) от неотрицательной тождественно не равной нулю функции $a(t)$ и, как следствие, от модуля $|y|$ в конкретный момент времени t . На данном примере видно, что без условия трансверсальности (9) однозначно определить оптимальное значение вектора $\mathbf{r}(0)$ и решить краевую задачу принципа максимума было бы невозможно.

Вторым примером является задача оптимального перевода динамической системы (2) из состояния (3) в состояние (4) с минимальным значением функционала

$$S = \int_0^T (k_0 + k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2) dt, \quad (19)$$

где $k_0 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0$ — постоянные положительные коэффициенты.

Принятый нами функционал (19) соответствует квадратичному критерию качества с добавлением затраченного времени, умноженного на постоянный положительный коэффициент ($k_0 \neq 0$). Фактор времени, присутствующий в критерии оптимальности (19), ограничивает длительность T оптимального процесса некоторым конечным значением T_{opt} .

Как и в предыдущей задаче, оптимальное решение $\mathbf{y}(t)$ ищем в классе кусочно-непрерывных функций. Для задачи (2)–(4), (19) функция Гамильтона имеет вид

$$\Gamma = r_1 y_1 + r_2 y_2 + r_3 y_3 - k_0 - k_1 y_1^2 - k_2 y_2^2 - k_3 y_3^2.$$

Поскольку Γ — квадратичная функция искомого вектора $\mathbf{y}$, то ее максимальное значение достигается в точке локального экстремума. Из необходимых условий экстремума $\partial \Gamma / \partial y_j = 0$ находим, что функция Γ максимальна, если $r_j - 2k_j y_j = 0$. Оптимальные функции y_j связаны с r_j соотношениями

$$y_j = r_j / 2k_j. \quad (20)$$

Сравнив условия оптимальности (20) с равенствами (15), заключаем, что для оптимального по критерию (19) решения справедливо свойство (16). Поэтому функция Гамильтона Γ является постоянной. Из условия трансверсальности (9), которое имеет вид $\Gamma(T) = 0$, находим необходимое условие оптимальности для функций $r_j(t)$:

$$(r_1^2/k_1 + r_2^2/k_2 + r_3^2/k_3)/4 - k_0 = 0.$$

Следовательно, оптимальное значение $\mathbf{r}(0)$ обязано удовлетворять соотношению

$$r_1^2(0)/k_1 + r_2^2(0)/k_2 + r_3^2(0)/k_3 = 4k_0.$$

Оптимальные функции $y_j(t)$ удовлетворяют зависимости

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2 = k_0. \quad (21)$$

Из полученного свойства оптимальных функций $y_i(t)$ находим, что значение S функционала (19) связано с длительностью оптимального процесса зависимостью $S = 2k_0T$. Учитывая, что равенства (20) — частный случай условий (15), определим оптимальное время T_{opt} через известную характеристику G_{opt} , рассчитанную при решении задачи (2)—(4), (14): $T_{\text{opt}} = G_{\text{opt}}/\sqrt{k_0}$ (функции $y_i(t)$, оптимальные в смысле минимума (19), являются оптимальными по критерию (14)). Соответственно значение показателя (19) при оптимальном поведении функций y_1, y_2, y_3 равно $S_{\text{opt}} = 2\sqrt{k_0} G_{\text{opt}}$. Значения коэффициентов k_1, k_2, k_3 влияют только на значение G_{opt} и определяют его совместно с заданными начальной $\mathbf{x}_0$ и конечной $\mathbf{x}_T$ точками траектории $\mathbf{x}(t)$.

Таким образом, рассмотренные примеры демонстрируют, что условия трансверсальности — исключительно эффективный инструмент в определении оптимальных функций $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{r}(t)$, и в ряде случаев они являются незаменимыми (а порой и единственным средством), чтобы выявить ключевые свойства оптимального процесса.

Заметим, что если под фазовыми переменными x_i понимать направляющие косинусы между связанной системой координат твердого тела и инерциальной системой координат, то вектор $\mathbf{u}$ будет соответствовать угловой скорости вращения связанной системы координат относительно инерциальной системы координат, а управляющие функции y_j интерпретируются как проекции вектора абсолютной угловой скорости твердого тела на оси связанной системы координат. В этом случае рассмотренные выше задачи оптимизации приобретают вполне конкретный физический смысл. Если при этом коэффициенты k_1, k_2, k_3 в задаче (2)—(4), (19) пропорциональны значениям J_1^2, J_2^2, J_3^2 , где J_1, J_2, J_3 — моменты инерции твердого тела, то условие трансверсальности $\Gamma(T) = 0$ определяет модуль кинетического момента во время оптимального по критерию (19) вращения твердого тела из положения (3) в положение (4) (уравнение (21) наглядно подтверждает сказанное). Из уравнения (21) следует такая закономерность: для оптимального движения системы (2) с минимальным значением (19) длительность T перехода из состояния (3) в состояние (4) и значение интеграла (19) связаны прямо-пропорциональной зависимостью $S_{\text{opt}} = 2k_0T_{\text{opt}}$.

Заключение

Проблематика статьи относится к математической теории оптимальных процессов и ее методам. В частности, обсуждаются крайне актуальные вопросы методологии принципа максимума и особенности процедуры его практического применения. Представленная работа устраняет имеющийся методический пробел, связанный с неполным использованием условий трансверсальности. Отмеченный

методологический недостаток, который присутствует в рассуждениях при решении задач оптимального управления на основе принципа максимума, наблюдается у многих авторов.

В статье показано, что для максимально корректного и полного решения задачи оптимального управления условия трансверсальности, являясь необходимыми условиями оптимальности наравне с условием максимума функции Гамильтона и сопряженной системой дифференциальных уравнений, должны учитываться с самого начала и должны быть включены в систему уравнений, формализующих принцип максимума, сразу после введения сопряженных переменных, записи функции Гамильтона и сопряженной системы уравнений, непосредственно определяя свойства оптимальных сопряженных функций и управляющих переменных. Рассмотренные в статье конкретные примеры указывают на исключительно важную роль (нередко ключевую роль) условий трансверсальности в общем алгоритме процедуры применения принципа максимума.

Список литературы

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. **Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В.** Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космические исследования. 1984. Вып. 3.
3. **Сиротин А. Н.** Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Механика твердого тела. 1989. № 1.
4. **Голубев Ю. Ф.** Брахистохрона с кулоновским и вязким сопротивлением // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2).
5. **Сапунков Я. Г., Молоденков А. В.** Решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота космического аппарата в классе конических движений // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2013. № 2 (70). Вып. 1.
6. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. 2015. Vol. 21, N. 2 (44).
7. **Левский М. В.** Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4.
8. **Левский М. В.** К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1.
9. **Lastman G. J.** A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems // International Journal of control. 1978. Vol. 27, N. 4.
10. **Li F., Bainum P. M.** Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1990. Vol. 13, № 1.
11. **Enrico Bertolazzi, Francesco Biral, Mauro Da Lio.** Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 185, Iss. 2, 15.
12. **Моисеев Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
13. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. W. B. Saunders Company. Philadelphia, London, Toronto, 1969.

Conditions of Transversality as an Effective Instrument in the Mathematical Constructions of the Optimal Processes

M. V. Levskii, dp940@mail.ru✉,

Maximov Research Institute of Space Systems, Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow Region

Corresponding author: **Levskii Mikhail V.**, Ph. D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems, Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow Region, e-mail: dp940@mail.ru

Received on June, 30, 2016

Accepted on July, 21, 2016

The topic of the article concerns the mathematical theory of the optimal processes and its methods. In particular, the extremely topical aspects of the methodology of the maximum principle and the procedure of its practical use are discussed. The article presents in details the transversality conditions, their role, place and significance in the general procedure for solving the problems of finding the optimal functions. This work eliminates the existing methodical defect connected with an incomplete use of the transversality conditions. On concrete examples, it shows that the transversality conditions (as one of the necessary conditions of optimality in the form of the maximum principle) are an extremely effective mathematical tool (and even the only one, in some cases) for determination of the characteristic properties, laws and key characteristics (parameters, constants, integrals of motion) of the optimal solutions for the systems of ordinary differential equations (of the dynamic systems). The importance of the topic is explained by the fact that in the overwhelming majority of cases the authors believe that the transversality conditions complicate the problem of search for the optimum functions, instead of simplifying it. However, it is far from being so, and it is a standard error, which has become almost typical. In the paper, the authors convincingly demonstrate the following conclusion: for a maximally correct and complete solution of the problems of the optimal control, the transversality conditions, being the necessary conditions for a optimality similarly as the condition of the Hamiltonian maximum and the adjoint system of the differential equations, should be taken into account since the beginning and be included in the system of the equations, which formalize the maximum principle, directly after defining the adjoint variables, formation of the Hamiltonian and the adjoint system of equations, determination of the properties of the optimal adjoint functions and the control variables. The concrete examples presented in the article confirm the exclusively significant role (quite often critical role) of the transversality conditions in the general algorithm of the procedure for application of the maximum principle.

Keywords: maximum principle, transversality conditions, optimality criterion, functional of quality, conditions of optimality, boundary value problem

For citation:

Levskii M. V. Conditions of Transversality as an Effective Instrument in the Mathematical Constructions of the Optimal Processes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 4, pp. 291–297.

DOI: 10.17587/mau.18.291-297

References

1. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., and Mishchenko E. F.** *Teoriya optimal'nyh processov* (The Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian); Gordon and Breach, New York, 1986. 320 p.
2. **Branets V. N., Chertok M. B., Raznacheev Yu. V.** *Optimal'ny razvorot tverdogo tela s odnoy os'yu simmetrii* (Optimal turn of axi-symmetric rigid body), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, iss. 3 (in Russian).
3. **Sirotnin A. N.** *Optimal'noe upravlenie pereorientatsiy simmetrichnogo tverdogo tela iz pologeniya pokoya v pologinie pokoya* (Optimal control of reorientation of symmetric rigid body from state of rest into state of rest), *Mehanika Tverdogo Tela*, 1989, no. 1 (in Russian).
4. **Golubev Yu. F.** *Brahistokhrona s kulonovskim i vyazkim soprotivleniem* (Brahistokhron with Kulon and viscous resistance), *Vestnik Nijegorodskogo universiteta im. N. I. Lobochevskogo*, 2011, no. 4 (2) (in Russian).
5. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** *Reshenie zadachi optimal'nogo v smysle minimuma energeticheskikh zatrat razvorota kosmicheskogo apparata v klasse konicheskikh dvizheniy* (Solution of the problem of spacecraft's optimal turn with minimum of energy expenditures

in class of conical motions), *Vestnik Saratovskogo Gosudarstvennogo Tehnicheskogo Universiteta*, 2013, no. 2 (70), iss. 1 (in Russian).

6. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation, *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, 2015, vol. 21, no. 2 (44).

7. **Levskii M. V.** *Ob odnom sluchae optimal'nogo upravleniya prostranstvennoy orientatsiy kosmicheskogo apparata* (A special case of spacecraft optimal attitude control), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2012, no. 4 (in Russian).

8. **Levskii M. V.** *K voprosu optimal'nogo uspokoeniya kosmicheskogo apparata* (On optimal spacecraft damping), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2011, no. 1 (in Russian).

9. **Lastman G. J.** A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems, *International Journal of Control*, 1978, vol. 27, no. 4.

10. **Li F., Bainum P. M.** Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, no. 1.

11. **Enrico Bertolazzi, Francesco Biral, Mauro Da Lio.** Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, vol. 185, iss. 2, 15.

12. **Moiseev N. N.** *Chislennyye metody v teorii optimal'nyh sistem* (Numerical methods in optimal systems theory), Moscow, Nauka, 1971 (in Russian).

13. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, W. B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1969.