УДК 629.13(075.8) DOI: 10.17587/mau.18.285-288

А. С. Девятисильный, д-р техн. наук, проф., devyatis@iacp.dvo.ru,
А. К. Стоценко, мл. науч. сотр., stotsenko@iacp.dvo.ru,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Исследование относительного продольного движения автомобилей в системе "лидер—ведомый"[1]

Рассматривается аналитическое конструирование моделей управлений линейным движением автомобилей, проведено теоретико-механическое исследование продольного движения одиночного автомобиля и пары автомобилей с использованием парадигмы конструктивной математики. Введено понятие заданного (программного) движения; исследуемое относительное движение представлено в отклонениях от программного. Рассмотрен ряд возможных моделей управления относительным движением.

Ключевые слова: *движение, скорость, расстояние, транспортный поток, транспортная единица, управление, обратная связь, модель, функция Ляпунова, конструктивная математика*

Введение

В будущем практически неизбежна автоматизация управления транспортом, в частности автомобилями, в связи с чем значимой становится задача обеспечения безопасности совместного движения пилотируемых и роботизированных транспортных единиц (далее — ТЕ). Так, возникает необходимость в создании моделей взаимодействия автомобилей в линейном потоке. Заметим, что для предотвращения дорожно-транспортных происшествий принципиально важно моделировать управление движением, достаточно детально описывая силы, которые действуют на автомобиль, что делает недостаточно пригодными для этих целей макроскопические (например, гидродинамические [1]) модели транспортного потока и ряд микроскопических моделей, включая популярные в настоящее время клеточные автоматы [2].

Данная работа, как и ранее опубликованная статья [3], посвящена управлению движением автомобилей в линейном потоке. Построение моделей движения в настоящей работе выполняется под влиянием парадигмы конструктивной математики [4], в неявной форме высказанной в работе [5], развивает представление о моделях управления как о моделях теоретико-механических, в достаточно полной мере отражающих физический смысл движения, причем модель вполне адекватна с точки зрения целей управления движением.

Модели продольного движения одиночной ТЕ

В качестве исходной модели продольного движения отдельно взятой ТЕ массой m возьмем модель, близкую предложенной в работе [3], а именно:

$$\begin{aligned} &\dot{R} = V,\ R(0) = R_0;\\ &\dot{V} = F - S - g_v,\ V(0) = V_0;\ S = A + Q;\\ &\dot{F} = -\mu(F - \varphi_d(V_d) + u + T),\ F(0) = F_0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где R — расстояние, пройденное ТЕ; V — линейная скорость движения ТЕ, причем $V \geqslant 0$ (т.е. рассматриваем однонаправленное движение); F, S — удельные силы (далее — силы): F — сила, создаваемая двигательно-тормозной системой ТЕ, S — сила сопротивления движению; $A = kV^2$ — сила аэродинамического сопротивления; k — фактор обтекаемости, $k = 0{,}5c\rho\sigma$, c — коэффициент лобового сопротивления, ρ — плотность воздуха, $\sigma = \alpha BH/m$ — удельная лобовая площадь ТЕ, α — коэффициент заполнения лобовой площади, B и H — наибольшие ширина и высота ТЕ; Q — значение силы сопротивления качению, $Q = f_q g_h$ при $V > 0$, g_h и g_v — проекции ускорения свободного падения (g) соответственно на направление движения и направление, ему ортогональное (далее примем $g_v = 0$, так что $g_h = g$), f_q — коэффициент сопротивления качению; T — сила торможения; $V_d = V_d(t)$ — задаваемая скорость движения ТЕ; $\varphi_d(V_d)$ — сила, реализующая задаваемое (или программное) движение; $\mu = \tau^{-1}$, τ — постоянная времени реализации силы F, вообще говоря, возможен случай $\mu = \mu(t)$, хотя в данной работе принимается $\mu = \text{const}$; u — дополнительная управляющая сила (далее — просто управление), корректирующая движение.

Модель (1) корректна с момента времени трогания ТЕ с места, принимаемого за $t = 0$, при $F(0) \geqslant Q$ и $V > 0$. Функция $\varphi_d(V_d)$ определяется при $u \equiv 0$ и $T \equiv 0$. Примем, что коэффициенты k, f_q, μ известны точно, и введем следующие соотношения: $V = V_d + v$, $F = F_d + f$, $A = A_d + a$, $Q = Q_d$, где F_d, A_d, Q_d — значения сил, соответствующие заданному движению; дополнительно замечаем, что $a = A - A_d = kV^2 - kV_d^2 = k(V + V_d)v$, или, полагая $k(V + V_d) = \eta$, $a = \eta v$. Тогда уравнения движения ТЕ в отклонениях от заданного движения примут вид

$$\begin{aligned} &\dot{r} = v,\ r(0) = r_0;\\ &\dot{v} = -\eta v + f,\ v(0) = v_0;\\ &\dot{f} = -\mu(f + u + T),\ f(0) = f_0. \end{aligned} \qquad (2)$$

[1] Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН № 15-1-4-006 О (Программа "Дальний Восток").

Учитывая линейность модели (2), ее можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot r &= v,\ r(0) = r_0;\\ \dot v &= -\eta v + f - T_1,\ v(0) = v_0;\\ \dot f &= -\mu(f + u),\ f(0) = f_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $T_1 = \mathbf{e}^{-\mu t}\int_{t_1}^{t}\mu T(\theta)\mathbf{e}^{\mu\theta}d\theta$, или, если $T = \text{const} > 0$, то $T_1 = T(1 - \mathbf{e}^{-\mu(t-t_1)})$; если же системы (2) и (3) рассматривать при $t \geqslant t_1 + 3\tau$, где $\tau = \mu^{-1}$, то логично принять $T_1 = T$.

Очевидно, что системы (2) и (3) эквивалентны. Добавим к этому, что наблюдаемым и управляемым вектором состояний рассматриваемой модели движения при доступности измерений скорости $v = V - V_d$ является, что легко проверить, вектор (v, f); поэтому в этом разделе статьи при ссылках на соотношение (2) и (3) будем иметь в виду только вторые и третьи уравнения систем, а именно:

- для системы (2)

$$\dot v = -\eta v + f,\ v(0) = v_0;$$
$$\dot f = -\mu(f + u + T),\ f(0) = f_0;$$

- для системы (3)

$$\dot v = -\eta v + f - T_1,\ v(0) = v_0;$$
$$\dot f = -\mu(f + u),\ f(0) = f_0.$$

Если проблема наблюдения (оценивания) вектора $(v, f)^{\mathrm{T}}$ решена, то, формируя управление в виде $u = \mu_0 f + \gamma v$, можно изменять динамические свойства системы, в частности, значение времени формирования силы, движущей ТЕ (μ_0 и γ — коэффициенты, в общем случае — функции времени).

Наряду с эквивалентными моделями (2) и (3) укажем еще и на приближенную модель вида

$$\begin{aligned} &\dot v = -\eta v - u - T,\ v(0) = v_0,\ u = \gamma v\\ &\text{или } \dot v = -(\eta + \gamma)v - T,\ v(0) = v_0, \end{aligned} \tag{4}$$

полагая ее допустимость при достаточно большом значении μ, т.е. весьма малом значении $\tau = \mu^{-1}$, или, по сути, при $\mu > \eta$ (например, для легкового автомобиля с массой $m = 1000$ кг и лобовой площадью 2,6 м^2 имеет место значение $\eta = 0{,}605$, в то время как при $\tau = 0{,}1$ с $\mu = 10$ и, очевидно, $10 \gg 0{,}605$).

Исследуем теперь проблему приведения значения v к значению $v = 0$ при $t \to 0$ с целью выявить области значений параметра γ в управлении $u = \gamma v$, иначе говоря, проблему асимптотической устойчивости систем (2), (3), (4) с последующим сравнением условий устойчивости.

Начнем с модели (4). Учитывая однонаправленность движения ТЕ ($V \geqslant 0$), замечаем (полагая $T \equiv 0$), что для асимптотической устойчивости (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma > -\eta. \tag{5}$$

О влиянии на устойчивость силы T (напомним: $T = \text{const} > 0$ при $V \geqslant 0$) будем судить по тому, как меняется во времени кинетическая энергия движения, или функция Ляпунова $L = v^2/2$, с которой в данном случае она отождествляется. Имеем $\dot L = v\dot v = -(\eta + \gamma)L - vT$, откуда видим что наибольший эффект от торможения имеет место только тогда, когда оно реализуется на временных интервалах, на которых $v > 0$.

Продолжим исследование, обращаясь теперь к моделям (2) и (3). Возьмем для них функцию Ляпунова в виде квадратичной формы $L = (v \vdots f)P(v \vdots f)^{\mathrm{T}}$ с матрицей $P = \mathrm{diag}(1, p) = \text{const}$, $p > 0$. Тогда для рассматриваемых моделей движения получим следующие выражения производной функции Ляпунова:

- для (2): $\dot L = \psi(v, f) - fT;$ (6)
- для (3): $\dot L = \psi(v, f) - vT,$ (7)

где

$$\begin{aligned} \psi(v, f) &= -2\eta p v^2 + 2(p - \mu\gamma)vf - 2\mu f^2 =\\ &= (v \vdots f)W(v \vdots f)^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$W = \begin{pmatrix} -2\eta\rho & p - \mu\gamma \\ p - \mu\gamma & -2\mu \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Пусть $T \equiv 0$, т.е. реализуется движение без торможения. Тогда для того чтобы при $t \to \infty$ имело место $v \to 0$, с достаточностью требуется выполнение неравенства $\psi(v, f) < 0$, т.е. условия отрицательной определенности матрицы W. Сначала отметим, что простой взгляд на функцию $\psi(v, f)$ указывает на возможную область значений γ, а именно:

$$\gamma > 0, \tag{10}$$

при этом следует указать значение $p > 0$, т.е. $p = \mu\gamma$, и, таким образом, верифицировать $\psi(v, f)$ как функцию Ляпунова.

Сравнивая теперь области (5) и (10), находим их заметное различие в пользу первой, более соответствующей физической сущности процесса диссипации кинетической энергии при аэродинамических силах сопротивления движению.

Подробнее условия выполнения требования $\psi(v, f) < 0$ рассмотрим, исследуя определенность матрицы W(9); ее характеристическое уравнение и собственные числа имеют следующий вид:

$$\lambda^2 = 2(\mu + \eta p)\lambda + 4\mu\eta p - (p - \mu\gamma)^2 = 0; \tag{11}$$

$$\lambda_{1,2} = -(\mu + \eta p) \pm ((\mu + \eta p) - 4\mu\eta p + (p - \mu\gamma)^2)^{1/2}. \tag{12}$$

Из соотношения (12) находим, что $\lambda_{1,2} < 0$, т.е. матрица W отрицательно определена, если $4\mu\eta p > (p - \mu\gamma)^2$, или $\pi(p, \gamma) = p^2 - 2p(2\mu\eta + \mu\gamma) + \mu^2\gamma^2 < 0$.

В свою очередь, корни уравнения $\pi(p, \gamma) = 0$ есть

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \mu(2\eta + \gamma) \pm \mu((2\eta + \gamma)^2 - \gamma^2)^{1/2} =\\ &= \mu(2\eta + \gamma) \pm 2\mu\sqrt{\eta(\eta + \gamma)}, \end{aligned}$$

а условие их вещественности

$$\gamma \geqslant -\eta \tag{13}$$

одновременно определяет область значений γ, на которой существуют значения p: $0 < p < p_1 = \mu(2\eta + \gamma) +$

$+ 2\mu\sqrt{\eta(\eta+\gamma)}$ когда $\lambda_{1,\ 2} < 0$ и, следовательно, $\psi(v, f) < 0$.

Сравнивая теперь области (5) и (13), отмечаем их практическое совпадение, что вполне оправдывает модель (4). Наконец, обращаясь к выражениям (6) и (7) при $T > 0$, находим, что эффект от торможения достигается только тогда, когда оно реализуется либо при $v > 0$, либо при $f > 0$; более того, второе выполняется одновременно с первым, что следует из эквивалентности уравнений (2) и (3).

Модель относительного продольного движения двух ТЕ

Полагаем, что при продольном движении двух ТЕ, впередиидущей ($ТЕ_1$) и следующей за ней позади ($ТЕ_2$), составляющих пару, или звено ТЕ, ставится задача достижения и сохранения между ними заданного расстояния (d_0). При этом роль лидера, или ведущего, определяющего цели и соответствующий им характер движения пары может быть отведена как $ТЕ_1$, так и $ТЕ_2$. Тогда в первом случае формирования звена из двух ТЕ ответственность за решение указанной задачи возлагается на $ТЕ_2$, а во втором — на $ТЕ_1$; заметим, что наряду с этим ответственность может быть возложена на обе ТЕ одновременно.

Рассмотрим первый случай, наиболее соответствующий реалиям движения транспорта, когда $ТЕ_1$ — лидер.

Учитывая, что движение лидера, по сути, является заданным для ведомого ($ТЕ_2$), для описания относительного движения ТЕ можно воспользоваться моделями (2), (3) или (4), несколько адаптируя их к исследуемой задаче, а именно, вводя следующие обозначения: $v = V - V_d$ — скорость относительного движения ТЕ; V_d и V — соответственно скорости $ТЕ_1$ и $ТЕ_2$; $\eta = k(V + V_d)$; k и μ — коэффициенты модели ординарного движения $ТЕ_2$; $r = R_1 - R_2 - d_0$, R_1 и R_2 — расстояния, проходимые соответственно $ТЕ_1$ и $ТЕ_2$, существенно, что r измеряется бортовыми средствами $ТЕ_2$; принимая во внимание наблюдаемость (при измерении r) и управляемость моделей (2), (3), (4), положим $u = \beta r + \gamma v$, где β и γ — коэффициенты, определение области значений которых, обусловливающей процесс $(r, v) \to 0$ при $t \to \infty$, и является основной целью дальнейшего исследования. Таким образом, речь идет об исследовании асимптотической устойчивости моделей относительного движения.

Вместе с тем, результаты исследования ординарного движения вполне убедительно указывают на то, что и в случае движения пары ТЕ возможно обращение к адаптированной модели вида (4), а именно

$$\dot{r} = v,\ r(0) = r_0;$$
$$\dot{v} = -\beta r - (\eta + \gamma)v - T,\ v(0) = v_0, \qquad (14)$$

где T — сила торможения, реализуемая $ТЕ_2$, причем либо $T \equiv 0$, либо $T \geqslant 0$, если $V \geqslant 0$.

Легко видеть, что в стационарном случае, когда $\beta = \mathrm{const} > 0$ и $\eta + \gamma = \mathrm{const} > 0$, система асимптотически устойчива (при $T \equiv 0$).

Покажем, когда это имеет место в общем случае, доказав, что полная энергия относительного движения

$$E = 0{,}5v^2 + \beta r^2, \qquad (15)$$

где первое слагаемое — кинетическая энергия, а второе — потенциальная, является функцией Ляпунова, т.е. $L = E$ для модели (14). Итак, дифференцируя уравнение (15), имеем

$$\dot{E} = -2D - vT + 0{,}5\dot{\beta}\, r^2, \qquad (16)$$

где $D = (\eta + \gamma)v^2/2$ — функция рассеивания Релея.

Пусть $T \equiv 0$. Тогда $L = E$, 1) если $\beta = \mathrm{const} > 0$, $\gamma > -\eta$; 2) если $\beta(t) > 0$, $\gamma > -\eta$, $\dot{\beta}\, r^2 < 4D$.

Заметим, что еще один способ организации обратной связи (по скорости), как это видно из соотношения (16), может быть реализован в виде ситуационного управления торможением $ТЕ_2$, когда торможение "включается" только на тех временных интервалах, на которых $v > 0$, т.е. $vT > 0$, повышая, таким образом, скорость убывания энергии E, что может привести к расхождению ТЕ по дальности или же к автоколебаниям, нарушающим режим комфортности движения $ТЕ_2$.

Рассмотрим и другие способы формирования совместного связанного движения двух ТЕ (звена ТЕ). Пусть роль лидера в паре играет позади идущая $ТЕ_2$. Тогда для $ТЕ_1$ движение $ТЕ_2$ является заданным. Именуя теперь в определении v (т.е. $v = V - V_d$) скорости V и V_d как скорости, соответственно, $ТЕ_1$ и $ТЕ_2$, приходим к тем же уравнениям (14), что и в случае, когда роль лидера отводилась $ТЕ_1$. Более того, к этим же уравнениям приходим и тогда, когда обе ТЕ одновременно решают задачу формирования звена; при этом $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\eta = \eta_1 + \eta_2 = (k_1 + k_2)(V_1 + V_2)$, $T = T_1 + T_2$, где индексы при параметрах указывают на их соответствие $ТЕ_1$ и $ТЕ_2$.

Обобщая изложенное, отметим следующее. Простой комбинаторный анализ, выполненный с учетом результатов исследования для случая, когда в качестве лидера рассматривалась $ТЕ_1$, указывает, что из 15 возможных сочетаний параметров из множества $(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ только 12 способны обеспечить асимптотическую устойчивость относительного движения ТЕ; назовем оставшиеся из них (с общим для всех трех условием $\beta = \beta_1 = \beta_2 = 0$), которые не обеспечивают сходимость управляемого процесса к состоянию $(v = 0,\ r = 0)$, но обеспечивают сходимость процесса к состоянию $v = 0$, а именно: 1) $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; 2) $\gamma = \gamma_1$; 3) $\gamma = \gamma_2$, где $\gamma > 0$. Это обобщение при $T \equiv 0$ легко верифицируется по виду уравнений (14).

Заключение

В представленной работе рассмотрен ряд моделей управления относительным движением, существенным свойством которых является представление относительного движения как отклонения от заданного (программного) движения. Рассмотрены модели движения одиночного автомобиля и пары автомобилей; представленная модель движения пары автомобилей применима для моделирования линейного потока автомобилей как последовательности пар. В исследовании использован метод функций Ляпунова [6], что обеспечивает достаточные условия устойчивости.

Список литературы

1. **Дрю Д.** Теория транспортных потоков и управление ими. М.: Транспорт, 1972.
2. **Тоффоли Т., Марголус Н.** Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
3. **Девятисильный А. С., Стоценко А. К.** Модели управления относительным движением двух сухопутных транспортных единиц в задаче следования за лидером // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 6. С. 426—431.
4. **Марков А. А.** Избранные труды. Т. II. Теория алгоритмов и конструктивная математика, математическая логика, информатика и смежные вопросы. М.: Изд-во МЦНМО, 2003.
5. **Филимонов Н. Б.** Методологический кризис "всепобеждающей математизации" современной теории управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 291—301.
6. **Малкин. И. Г.** Теория устойчивости. М.: Наука, 1966.

Research of the Relative Longitudinal Vehicle Motion for the Leader-Follower System

A. S. Devyatisilny, devyatis@iacp.dvo.ru✉, **A. K. Stotsenko,** stotsenko@ iacp.dvo.ru,
Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russian Federation

Corresponding author: **Devyatisilny Aleksandr S.**, Ph. D., Professor,
Head of the Navigation and Control Department, Institute of Automation and Control Processes,
Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russian Federation, e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

Received on July 22, 2016
Accepted on August 10, 2016

Prospects for the self-driven vehicles and the existing adaptive cruise-control systems for vehicles put more and more stringent requirements to the longitudinal motion control models. The authors believe that one of the key targets in the contemporary studies is development and research of the motion models suitable for the robot-aided vehicles, showing the difference between the piloted, semi-automated and automated control models. This article is devoted to the theoretical mechanical models of the guided longitudinal motion of vehicles. Such models, precise and robust, are essential for analyzing and construction of complex transportation system models. The article is mainly devoted to the design of the analytical models of the linear movement of the vehicles' control; theoretical and mechanical studies of the longitudinal motion of a single car and a pair of cars are carried out, a paradigm of the constructive mathematics is used. Notably, a traffic flow is introduced as a chain of the vehicle "couples", since their motion is longitudinal. A new approach to the coupled vehicles' movement, taking into account the velocity, acceleration and dynamic parameters of the transport units, is introduced. The article presents a concept of a predetermined (program) motion; the relative vehicles' motion is presented in the deviations from a predetermined motion. Possible relative motion control models are introduced. Ways of keeping the required mode of the coupled movement for different types of control are considered. The asymmetry of the control options for different vehicles is detected and studied.

Keywords: *motion, velocity, distance, traffic flow, transport unit, control, feed-back coupling, model, constructive mathematics*

Acknowledgements: This work was supported by FEB RAS grant № 15-1-4-006 O (Far East Program).

For citation:

Devyatisilny A. S., **Stotsenko A. K.** Research of the Relative Longitudinal Vehicle Motion for the Leader-Follower System, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no 4, pp. 285—288.

DOI: 10.17587/mau.17.285-288

References

1. **Dryu D.** *Teoriya transportnyh potokov i upravlenie imi* (Theory of traffic flow and traffic flow management), Moscow, Transport, 1972 (in Russian).
2. **Toffoli T., Margolus N.** *Mashiny kletochnyh avtomatov* (Machines of cellular automates), Moscow, Mir, 1991 (in Russian).
3. **Devyatisil'nyj A. S., Stotsenko A. K.** *Modeli upravleniya otnositel'nym dvizheniem dvuh suhoputnyh transportnyh edinic v zadache sledovaniya za liderom* (Models of Terrestrial Transport Motion for a Group of Two Units in Terms of the Leader-Following Problem), *Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie,* 2015, vol. 16, no. 6, pp. 426—431 (in Russian).
4. **Markov A. A.** *Izbrannye trudy. T. II. Teoriya algoritmov i konstruktivnaya matematika, matematicheskaya logika, informatika i smezhnye voprosy* (Selected works. T. II. The theory of algorithms and constructive mathematics, mathematical logic, computer science and related matters), Moscow, MCNMO publishing house, 2003 (in Russian).
5. **Filimonov N. B.** *Metodologicheskij krizis "vsepobezhdayushchej matematizacii" sovremennoj teorii upravleniya* (Methodological Crisis of the "All Winning Mathematization" of the Modern Control Theory), *Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 5, pp. 291—301 (in Russian)
6. **Malkin I. G.** *Teoriya ustojchivosti* (Stability Theory), Moscow, Nauka, 1966 (in Russian).

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Е. В. Комиссарова.*

Сдано в набор 31.01.2017. Подписано в печать 14.03.2017. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН417 Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.