

И. Б. Фуртат, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., проф., cainenash@mail.ru,
Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

Алгоритмы скользящей аппроксимации*

Представлены алгоритмы аппроксимации функций, которые имеют непрерывную и ограниченную производную первого или более порядка. Синтез алгоритмов основан на применении теоремы Лагранжа о среднем и ее обобщении. Для каждого алгоритма указаны время и ошибка аппроксимации. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность предложенных схем.

Ключевые слова: скользящая аппроксимация, теорема Лагранжа о среднем, наблюдатель производных

Введение

В теории управления часто возникают задачи, связанные с аппроксимацией сигналов, которые соответствуют выходным переменным системы, внешним воздействиям или иным процессам. Нередко в таких задачах аппроксимацию необходимо осуществлять в реальном режиме времени. Именно такому классу алгоритмов посвящена данная статья.

В настоящее время предложено достаточно большое число алгоритмов аппроксимации, в основу которых заложены концепции о параметрической или непараметрической форме представления сигнала. Большая часть работ посвящена аппроксимации на базе параметрической формы представления сигнала [1–5], т. е. предполагается знание структуры генератора внешнего сигнала, иначе называемого внутренней моделью. Аппроксимация на базе непараметрической формы представления сигнала [6–10] основана на измерениях сигнала по его предшествующим значениям.

В классе аппроксимирующих алгоритмов, основанных на параметрической форме представления сигнала, отметим алгоритмы с дискретным временем [1] и алгоритмы с непрерывным временем [2–5]. Огромный пласт работ посвящен идентификации синусоидальных сигналов [1–5], где динамический порядок алгоритмов, точность аппроксимации и сложность расчета параметров аппроксимирующего синусоидального сигнала (в основном частот) зависит от числа синусоидальных функций в исходном сигнале.

В работах [9, 10] рассматриваются алгоритмы, основанные на непараметрической форме представ-

ления сигнала, полученные с применением теоремы Лагранжа о среднем и использующие конечное число скользящих измерений. Так, в статье [9] рассматривается дискретный алгоритм аппроксимации функций, которые имеют непрерывную и ограниченную производную n -го порядка, где n — это число конечных разностей в алгоритме аппроксимации. Для аналогичного класса функций, но с максимальным спектром возмущения, не превосходящим величины $1/2h$ (где h — время запаздывания в измерении сигнала), в статье [10] предложен алгоритм, позволяющий сократить время аппроксимации до $2h$. Однако алгоритм, рассмотренный в работе [10], имеет ограничения на число измерений, которое зависит от времени запаздывания.

В данной статье предлагается развитие результатов работ [9, 10] для получения алгоритмов аппроксимации с непараметрической формой представления сигнала. Будем рассматривать скалярную функцию $f(t)$, которая имеет непрерывную и ограниченную i -ю производную, где значение i зависит от способа решения и будет конкретно указано в статье. Предложено развитие обобщенной теоремы Лагранжа о среднем для разностей с постоянным и переменным шагом. Предложены алгоритмы скользящей аппроксимации на базе результатов второго раздела. Получены алгоритмы скользящей аппроксимации с частичной компенсацией ошибки аппроксимации. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность предложенных схем аппроксимации.

1. Модификация теоремы Лагранжа о среднем

Рассмотрим функцию $f(t)$, определенную на некотором промежутке Θ . Будем полагать, что все значения аргумента функции f , которые будут встречаться далее, принадлежат промежутку Θ . Зададим первую разность для $f(t)$ в виде

$$\Delta^1 f(t) = f(t) - f(t - k_1 h), \quad (1.1)$$

* Результаты разделов 3 и 5 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор № 14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)). Результаты раздела 2 получены в ИПМаш РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-29-00142). Другие исследования частично поддержаны грантом Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.Z50.31.0031) и грантом Правительства Российской Федерации (проект № 074-U01).

где $k_1 > 0$ и $h > 0$. Заметим, что выводы для $h < 0$ будут аналогичными.

Вторую разность определим как

$$\Delta^2 f(t) = \Delta^1 f(t) - \Delta^1 f(t - k_2 h), \quad (1.2)$$

где $k_2 > 0$. Определим i -ю разность в форме

$$\Delta^i f(t) = \Delta^{i-1} f(t) - \Delta^{i-1} f(t - k_i h), \quad (1.3)$$

где $k_i > 0$, $i = \overline{3, n}$.

Сформулируем обобщенную теорему Лагранжа для разностей с переменным шагом.

Теорема 1. Функцию $f(t)$ на промежутке Θ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(t) = & \sum_{i_1=1}^n f(t - k_{i_1} h) - \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^n f(t - k_{i_1} + k_{i_2}) h + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2} + k_{i_3}) h) + \\ & + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n}}^n f(t - k_{i_1} + k_{i_2} + \\ & + \dots + k_{i_n}) h + R(t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $k_{i_j} \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка на промежутке Θ , то остаток $R(t)$ определяется как

$$\begin{aligned} R(t) = & k_1 h \left[\dot{f}(t - \theta_1 k_1 h) - \sum_{i_2=2}^n \dot{f}(t - k_{i_2} h - \theta_{i_2} k_1 h) + \right. \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_2 \neq i_3}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3}) h - \theta_{i_2, i_3} k_1 h) + \\ & + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \\ & + \dots + k_{i_n}) h - \theta_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) \left. \right]; \end{aligned} \quad (1.5)$$

если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную n -го порядка на промежутке Θ , то остаток $R(t)$ определяется как

$$R(t) = k_1^n h^n f^{(n)} \left(t - \vartheta h \sum_{i=1}^n k_i \right). \quad (1.6)$$

Здесь $\theta_{i_2}, \theta_{i_2, i_3}, \dots, \theta_{i_2, i_3, \dots, i_n}, \vartheta \in (0; 1)$, $i_2, i_3, \dots, i_n = 2, 3, \dots, n$.

Отметим, что $\theta_{ij} = \theta_{ji}$. Например, $\theta_{1,2} = \theta_{2,1}$, поскольку $f(t - (k_{i_2} + k_{i_3}) h) = f(t - (k_{i_3} + k_{i_2}) h)$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 воспользуемся теоремой Лагранжа о среднем. Перепишем первую разность (1.1) в виде

$$\Delta^1 f(t) = k_1 h \dot{f}(t - \theta_1 k_1 h). \quad (1.7)$$

С учетом выражения (1.1), перепишем вторую разность (1.2) как

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(t) = & f(t) - f(t - k_1 h) - \\ & - [f(t - k_2 h) - f(t - (k_1 + k_2) h)]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Принимая во внимание соотношение (1.7), перепишем (1.8) в виде

$$\Delta^2 f(t) = k_1 h \dot{f}(t - \theta_1 k_1 h) - k_1 h \dot{f}(t - k_2 h - \theta_2 k_1 h) \quad (1.9)$$

или

$$\Delta^2 f(t) = k_1^2 h^2 \ddot{f}(t - \vartheta_1 (k_1 + k_2) h), \quad (1.10)$$

где $0 < \vartheta_1 < 1$. Запишем третью разность как

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(t) = & f(t) - f(t - k_1 h) - [f(t - k_2 h) - \\ & - f(t - (k_1 + k_2) h)] - [f(t - k_3 h) - \\ & - f(t - (k_1 + k_3) h)] + [f(t - (k_2 + k_3) h) - \\ & - f(t - (k_1 + k_2 + k_3) h)]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Принимая во внимание соотношение (1.7) и (1.10), перепишем выражение (1.11) в виде

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(t) = & k_1 h [\dot{f}(t - \theta_1 k_1 h) - \dot{f}(t - k_2 h - \theta_2 k_1 h) - \\ & - \dot{f}(t - k_3 h - \theta_3 k_1 h) + \dot{f}(t - (k_2 + k_3) h - \theta_{2,3} k_1 h)], \end{aligned}$$

или

$$\Delta^3 f(t) = k_1^3 h^3 \dddot{f}(t - \vartheta_2 (k_1 + k_2 + k_3) h),$$

где $0 < \vartheta_2 < 1$. По аналогии со второй и третьей разностью, запишем n -ю разность по формуле (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \Delta^n f(t) = & f(t) - \sum_{i_1=1}^n f(t - k_{i_1} h) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2}) h) - \\ & - \frac{1}{3!} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2} + k_{i_3}) h) + \dots \\ & + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{n-1}}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_{n-1}}) h) - \\ & - \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=1 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_n}) h). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Применяя теорему Лагранжа к формуле (1.12), получим результаты (1.4)–(1.6).

Следствие 1. При $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$ имеем обобщенную теорему Лагранжа о среднем [8, 9], где функция $f(t)$, определенная на промежутке Θ , может быть представлена в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i f(t - ih) + R(t), \quad (1.13)$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка на промежутке Θ , то остаток $R(t)$ определяется как

$$R(t) = h \left[\dot{f}(t - \theta_1 h) - \sum_{i_2=2}^n \dot{f}(t - h - \theta_{i_2} h) + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_2 \neq i_3}}^n \dot{f}(t - 2h - \theta_{i_2, i_3} h) + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \dot{f}(t - (n-1)h - \theta_{i_2, i_3, \dots, i_n} h) \right]; \quad (1.14)$$

если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную n -го порядка на промежутке Θ , то остаток $R(t)$ определяется в виде

$$R(t) = h^n f^{(n)}(t - \vartheta_n h). \quad (1.15)$$

Отметим, что в теореме 1 и следствии 1 коэффициенты $k_i \geq 1$. В частности, если t — это время, а h — запаздывание, то все переменные в правой части выражений (1.4) и (1.13) доступны измерению (за исключением функции остатка). Рассмотрим случай, когда все или часть коэффициентов k_i принадлежит интервалу $(0; 1)$. Это означает, что некоторые функции не доступны измерению. Покажем, как в данном случае выразить искомую функцию через измеряемые переменные. Как отмечалось во введении, подобная идея была предложена в работе [10]. Однако полученный в этой работе результат не содержит значение ошибки и время аппроксимации, а кроме того, предложенный алгоритм [10] имеет ограничения на число слагаемых в правой части аппроксимирующей функции в зависимости от времени запаздывания. Рассмотрим решение данной задачи.

Заменим в выражении (1.13) h на h/k , где $k > 1$, и перепишем (1.13) в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i f\left(t - \frac{i}{k}h\right) + R(t). \quad (1.16)$$

Здесь остаток $R(t)$ определяется согласно формулам (1.14) или (1.15) заменой h на h/k .

Рассмотрим число z , которое равно целой части числа k , если k — не целое число, или z равно $k - 1$, если k — целое число. Сдвинем влево аргумент функции $f(t)$ в соотношении (1.16) на величину h/k последовательно z раз:

$$\begin{aligned} f\left(t - \frac{1}{k}h\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i f\left(t - \frac{i+1}{k}h\right) + R\left(t - \frac{1}{k}h\right); \\ f\left(t - \frac{2}{k}h\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i f\left(t - \frac{i+2}{k}h\right) + R\left(t - \frac{2}{k}h\right); \quad (1.17) \\ &\vdots \\ f\left(t - \frac{z}{k}h\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i f\left(t - \frac{i+z}{k}h\right) + R\left(t - \frac{z}{k}h\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что правая часть в последнем выражении системы (1.17) содержит слагаемые, у которых запаздывание больше, чем h . Выразим функцию $f(t)$ относительно переменных $f\left(t - \frac{i+z}{k}h\right)$,

..., $f\left(t - \frac{n+z}{k}h\right)$. Для этого перепишем систему, состоящую из уравнений (1.16) и (1.17), в матричном виде:

$$A_1 f(t) + A_2 F_1(t) + A_3 F_2(t) = \tilde{R}(t), \quad (1.18)$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_1(t) = \begin{bmatrix} f\left(t - \frac{1}{k}h\right) \\ f\left(t - \frac{2}{k}h\right) \\ \vdots \\ f\left(t - \frac{z}{k}h\right) \end{bmatrix},$$

$$F_2(t) = \begin{bmatrix} f\left(t - \frac{1+z}{k}h\right) \\ f\left(t - \frac{2+z}{k}h\right) \\ \vdots \\ f\left(t - \frac{n+z}{k}h\right) \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}(t) = \begin{bmatrix} R(t) \\ R\left(t - \frac{1}{k}h\right) \\ \vdots \\ R\left(t - \frac{z}{k}h\right) \end{bmatrix},$$

элементы матриц A_2 и A_3 соответствуют коэффициентам системы (1.17), (1.18).

Теорема 2. Функция $f(t)$ на промежутке Θ может быть представлена в виде

$$f(t) = -(lA_2^L A_1)^{-1} lA_2^L (A_3 F_2(t) - \tilde{R}(t)), \quad (1.19)$$

где квадратная матрица A_2^L — левый делитель нуля матрицы A_2 ; порядок A_2^L равен числу уравнений в системе (1.17) и (1.18), $l = [1 \ 0 \dots 0]$. Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка на промежутке Θ , то первая компонента $R(t)$ вектора $\tilde{R}(t)$ определяется в виде (1.14) с заменой h на h/k ; если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную n -го порядка на множестве Θ , то первая компонента $R(t)$ вектора $\tilde{R}(t)$ определяется в виде (1.15) с заменой h на h/k .

Под левым делителем нуля матрицы A_2 понимается матрица A_2^L такая, что $A_2^L A_2 = O$, где O — нулевая матрица соответствующего порядка [11, 12]. Ради простоты выводов в теореме 3 матрица A_2^L полагается квадратной. На самом деле число строк в матрице A_2^L можно свести к единице, тогда в выражении (1.19) $l = 1$. Это следует из того, что система (1.16), (1.17) имеет единственное решение $f(t)$ относительно переменных $f(t - \frac{1+z}{k}h), \dots, f(t - \frac{n+z}{k}h)$.

Доказательство. Умножив слева уравнение (1.18) на матрицу A_2^L , получим

$$A_2^L A_1 f(t) + A_2^L A_3 F_2(t) = A_2^L \tilde{R}(t). \quad (1.20)$$

Система (1.20) состоит из линейно зависимых уравнений. Выделим первое уравнение в (1.20), умножив слева (1.20) на вектор l :

$$lA_2^L A_1 f(t) + lA_2^L A_3 F_2(t) = lA_2^L \tilde{R}(t). \quad (1.21)$$

Так как $lA_2^L A_1 \neq 0$, то из уравнения (1.21) получим формулу (1.19).

Теорема 3 сформулирована для постоянного шага в разностях (1.1)–(1.3). Обобщим теорему 3 на случай с переменным шагом. Для этого рассмотрим формулу (1.4), где все или часть k_i меньше единицы. Далее будем сдвигать влево аргументы функции (1.4) до тех пор, пока в правой части не получим функции со сдвигом не менее, чем h . В результате имеем систему уравнений с единственным решением $f(t)$ со сдвигом аргумента влево не менее чем h . Введем обозначения в данной системе: A_2 — матрица, элементы которой соответствуют коэффициентам, стоящим перед функциями $f(t)$ с запаз-

дыванием, меньшим, чем h ; $\tilde{A}_2^L$ — левый делитель нуля матрицы $\tilde{A}_2$; $\tilde{F}_2(t)$ — вектор, содержащий функции, запаздывание которых не менее, чем h ; $\tilde{A}_3$ — матрица, элементы которой содержат коэффициенты перед функциями, запаздывание которых не менее, чем h .

Сформулируем теорему, обобщающую теорему 2 для разностей с переменным шагом в формулах (1.1)–(1.3).

Теорема 3. Функция $f(t)$ на промежутке Θ может быть представлена в виде

$$f(t) = -(l\tilde{A}_2^L A_1)^{-1} l\tilde{A}_2^L (\tilde{A}_3 \tilde{F}_2(t) - \hat{R}(t)), \quad (1.22)$$

где $\hat{R}(t)$ — остаток, вид которого зависит от числа раз дифференцируемости функции $f(t)$; первая компонента $R(t)$ вектора $\hat{R}(t)$ определяется согласно теореме 1.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, поэтому из-за громоздких выводов, возникающих при использовании переменного шага, доказательство здесь не приводится.

2. Алгоритмы скользящей аппроксимации

Положим, что $f(t)$ — это функция времени, определенная на интервале $[0; \infty)$. Измерению доступна только функция $f(t - h)$, где $h > 0$ — время запаздывания. Воспользуемся результатами предыдущего раздела для получения алгоритмов аппроксимации функции $f(t)$ со сдвигом на время h .

Теорема 4. Функция $f_a^1(t)$, заданная формулой

$$\begin{aligned} f_a^1(t) = & \sum_{i_1=1}^n f(t - k_{i_1}h) - \\ & - \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2})h) + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2} + k_{i_3})h) + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n}}^n f(t - (k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_n})h), \end{aligned} \quad (2.1)$$

при $k_i \geq 1$ является аппроксимирующей для функции $f(t)$ по ее предшествующим значениям. Для формулы (2.1):

1) время аппроксимации T составляет

$$T = \sum_{i=1}^n k_i h; \quad (2.2)$$

2) если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка, то ошибка аппроксимации

$e_1(t) = R(t)$, где $R(t)$ определяется выражением (1.5), и для $e_1(t)$ справедлива оценка

$$e_1(t) \leq k_1 h \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{n-1}^i}{i!} \right) \sup_{t>T} |\dot{f}(t)|, \quad (2.3)$$

где $A_n^l = \frac{n!}{(n-l)!}$;

3) если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную n -го порядка, то ошибка аппроксимации $e_1(t) = R(t)$, где $R(t)$ определяется выражением (1.6), для которого справедлива оценка

$$e_1(t) \leq k_1^n h^n \sup_{t>T} |f^{(n)}(t)|. \quad (2.4)$$

Доказательство. Доказательство первой части теоремы 5 очевидно, так как T — максимальное запаздывание в формуле (1.4).

Рассмотрим вторую часть теоремы. Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка, то ошибка аппроксимации $e_1(t)$ определяется выражением (1.5). Так как время аппроксимации равно T , то рассмотрим оценку сверху для функции $e_1(t)$ на интервале $(T; \infty)$:

$$\begin{aligned} e_1(t) &\leq k_1 h \sup_{t>T} \left| \dot{f}(t - \theta_1 k_1 h) - \right. \\ &\quad - \sum_{i_2=2}^n \dot{f}(t - k_{i_2} h - \theta_{i_2} k_1 h) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_2 \neq i_3}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3})h - \theta_{i_2, i_3} k_1 h) + \dots + \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - \\ &\quad - \theta_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) \left| \leq k_1 h \sup_{t>T} \left[|\dot{f}(t - \theta_1 k_1 h)| + \right. \right. \\ &\quad + \left| \sum_{i_2=2}^n \dot{f}(t - k_{i_2} h - \theta_{i_2} k_1 h) \right| + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left| \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - \right. \\ &\quad - \theta_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) \left. \right| \leq k_1 h \sup_{t>T} |\dot{f}(t)| \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{A_{n-1}^1}{1!} + \dots + \frac{A_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \right]. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Из соотношения (2.5) следует оценка (2.3). Выражение (2.4) является очевидной оценкой сверху функции (1.6).

Следствие 2. При $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$ аппроксимирующая функция $f_a^2(t)$ для $f(t)$ задается формулой

$$f_a^2(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i f(t - ih). \quad (2.6)$$

Время аппроксимации T определяется выражением

$$T = nh. \quad (2.7)$$

Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка, то ошибка аппроксимации $e_2(t) = R(t)$, где $R(t)$ определяется выражением (1.14). Для $e_2(t)$ справедлива оценка сверху

$$e_2(t) \leq h \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{n-1}^i}{i!} \right) \sup_{t>T} |\dot{f}(t)|;$$

если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную n -го порядка, то ошибка аппроксимации $e_2(t) = R(t)$, где $R(t)$ определяется выражением (1.15) и для $e_2(t)$ справедлива оценка

$$e_2(t) \leq h^n \sup_{t>T} |f^{(n)}(t)|.$$

При $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$ и дискретном времени формула (2.6) приведена в работе [9].

Теорема 5. Аппроксимирующую функцию $f_a^3(t)$ для $f(t)$ можно представить в виде

$$f_a^3(t) = -(LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L A_3 F_2(t). \quad (2.8)$$

Время аппроксимации T определяется как

$$T = \frac{n+z}{k} h. \quad (2.9)$$

Ошибка аппроксимации задается выражением

$$e_3(t) = (LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L \tilde{R}(t). \quad (2.10)$$

Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка, то для ошибки аппроксимации (2.10) справедлива оценка

$$\begin{aligned} e_3(t) &\leq \|(LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L\| \times \\ &\times \sqrt{z+1} \frac{h}{k} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{n-1}^i}{i!} \right) \sup_{t>T} |\dot{f}(t)|. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную n -го порядка, то для ошибки аппроксимации справедлива оценка

$$e_3(t) \leq \|(LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L\| \sqrt{z+1} \frac{h^n}{k^n} \sup_{t>T} |f^{(n)}(t)|. \quad (2.12)$$

Доказательство. Так как вектор $\tilde{R}(t)$ в выражении (1.19) содержит максимальное запаздывание $\frac{n+z}{k} h$, то время аппроксимации задается формулой (2.9).

Пусть $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка. Тогда первая компонента вектора $\tilde{R}(t)$ определяется в виде (1.14) с заменой h на h/k . С учетом этого рассмотрим оценку сверху для $e_3(t)$ на интервале $(T; \infty)$:

$$e_3(t) \leq \| (LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L \| |\tilde{R}(t)| = \| (LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L \| \times \\ \times \sqrt{R^2(t) + R^2\left(t - \frac{1}{k}h\right) + \dots + R^2\left(t - \frac{z}{k}h\right)} \leq \\ \leq \| (LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L \| \sqrt{z+1} \sup_{t > T} |R(t)|. \quad (2.13)$$

Принимая во внимание соотношение (2.3), получим оценку (2.11). С учетом выражений (1.15) (с заменой h на h/k) и (2.4) получим оценку (2.13).

Теорема 6. Аппроксимирующую функцию $f_a^4(t)$ для $f(t)$ можно представить в виде

$$f_a^4(t) = -(LA_2^L A_1)^{-1} LA_2^L \tilde{A}_3 \tilde{F}_2(t), \quad (2.14)$$

где ошибка аппроксимации $e_4(t)$ задается функцией $\tilde{R}(t)$ в теореме 4.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теорем 3 и 5.

3. Алгоритмы скользящей аппроксимации с частичной компенсацией ошибки аппроксимации

Точность аппроксимации в алгоритмах (2.1), (2.6), (2.8) и (2.13) определяется соответствующими функциями остатков. Настоящий раздел посвящен синтезу алгоритмов, использующих информацию об остатках разложения, что может позволить увеличить точность аппроксимации.

Теорема 7. Функция $\tilde{f}_a^1(t)$, заданная формулой

$$\tilde{f}_a^1(t) = f_a^1(t) + u_1(t), \quad (3.1)$$

при $k_i \geq 1$ является оценкой функции $f(t)$ по ее предшествующим значениям, $u_1(t)$ — сигнал, несущий информацию об остатке (1.5) или (1.6). Если $f(t)$ имеет непрерывные и ограниченные производные первого и второго порядков, то сигнал $u_1(t)$ и оценка ошибки аппроксимации $\tilde{e}_1(t)$ определяются выражениями

$$u_1(t) = k_1 h \left[\hat{f}(t - \hat{\theta}_1 k_1 h) - \sum_{i_2=2}^n \hat{f}(t - k_{i_2} h - \hat{\theta}_{i_2} k_1 h) + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_1 \neq i_2}}^n \hat{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3})h - \hat{\theta}_{i_2, i_3} k_1 h) + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \hat{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - \hat{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) \right]; \quad (3.2)$$

$$\tilde{e}_1(t) \leq k_1 h \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{n-1}^i}{i!} \right) \times \\ \times \left((k_1 h \sup_{t > T} |\tilde{f}(t)| + \sup_{t > T} |\delta^1(t)|) \right). \quad (3.3)$$

Если $f(t)$ имеет непрерывные и ограниченные производные n -го и $(n+1)$ -го порядков, то сигнал $u_1(t)$ и оценка ошибки аппроксимации $\tilde{e}_1(t)$ определяются в виде

$$u_1(t) = k_1^n h^n \hat{f}^{(n)} \left(t - \hat{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i \right), \quad (3.4)$$

$$\tilde{e}_1(t) \leq k_1^n h^n \left[h \sum_{i=1}^n k_i \sup_{t > T} |f^{(n+1)}(t)| + \sup_{t > T} |\delta^n(t)| \right]. \quad (3.5)$$

Здесь $\hat{f}^{(i)}(t)$ — оценка i -й производной функции

$$f(t), \quad \delta^1(t) = \hat{f}(t) - f(t), \quad \delta^n(t) = f^{(n)} \left(t - \hat{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i \right) - \hat{f}^{(n)} \left(t - \hat{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i \right) - \text{ошибки оценки первой и } n\text{-й}$$

производной соответственно, коэффициенты $\hat{\theta} = \left(1 / \sum_{i=1}^n k_i; 1 \right)$ и $\hat{\theta}_{i_2} \in (1/k_1; 1)$, $\hat{\theta}_{i_2, i_3}, \dots, \hat{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} \in (0; 1)$ выбираются разработчиком, время T определено выражением (2.2).

Отметим, что время аппроксимации T в алгоритме (3.1) не меньше значения (2.2) и зависит от наблюдателя, посредством которого получены оценки $\hat{f}^{(i)}(t)$.

Доказательство. Ради простоты изложения доказательства рассмотрим сначала получение оценки (3.5). С учетом (1.6) и (3.4) найдем разность $\tilde{e}_1(t) = R(t) - u_1(t)$ в виде

$$\tilde{e}_1(t) = \\ = k_1^n h^n \left[f^{(n)} \left(t - \theta h \sum_{i=1}^n k_i \right) - \hat{f}^{(n)} \left(t - \hat{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i \right) \right] = \\ = k_1^n h^n \left[f^{(n)} \left(t - \theta h \sum_{i=1}^n k_i \right) - f^{(n)} \left(t - \hat{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i \right) + \right. \\ \left. + f^{(n)} \left(t - \hat{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i \right) - \hat{f}^{(n)} \left(t - \hat{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i \right) \right]. \quad (3.6)$$

Пусть $\hat{\theta} = \theta + \tilde{\theta}$. Тогда, применяя теорему Лагранжа к соотношению (3.6), получим

$$\tilde{e}_1(t) = k_1^n h^n \left[\tilde{\theta} h \sum_{i=1}^n k_i f^{(n+1)} \times \right. \\ \left. \times (t - (\theta + \tilde{\theta} \tilde{\theta}) h \sum_{i=1}^n k_i) + \delta^n(t) \right], \quad (3.7)$$

где $\tilde{\theta} \in (0; 1)$. Так как $(\theta + \tilde{\theta} \tilde{\theta}) \in (0; 1)$, то функцию (3.7) можно оценить сверху в виде (3.5).

Аналогичным образом получим оценку (3.3). Принимая во внимание выражения (1.5) и (3.2), найдем разность $\tilde{e}_1(t) = R(t) - u_1(t)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1(t) = & k_1 h \left[\dot{f}(t - \theta_1 k_1 h) - \sum_{i_2=2}^n \dot{f}(t - k_{i_2} h - \theta_{i_2} k_1 h) + \right. \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_2 \neq i_3}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3})h - \theta_{i_2, i_3} k_1 h) + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - \\ & - \theta_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) - \hat{f}(t - \hat{\theta}_1 k_1 h) + \\ & + \sum_{i_2=2}^n \hat{f}(t - k_{i_2} h - \hat{\theta}_{i_2} k_1 h) - \\ & - \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_1 \neq i_2}}^n \hat{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3})h - \hat{\theta}_{i_2, i_3} k_1 h) + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \hat{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - \\ & - \hat{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) \left. \right] \pm k_1 h \left[\dot{f}(t - \hat{\theta}_1 k_1 h) - \right. \\ & - \sum_{i_2=2}^n \dot{f}(t - k_{i_2} h - \hat{\theta}_{i_2} k_1 h) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_2 \neq i_3}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3})h - \hat{\theta}_{i_2, i_3} k_1 h) + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - \\ & - \hat{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) \left. \right]. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Пусть $\hat{\theta}_{i_2} = \theta_{i_2} + \tilde{\theta}_{i_2}, \dots, \hat{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} = \theta_{i_2, i_3, \dots, i_n} + \tilde{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n}, i_2, i_3, \dots, i_n = 2, 3, \dots, n$. Применяя теорему Лагранжа о среднем к выражению (3.8), получим

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1(t) = & k_1 h \left[\tilde{\theta}_1 k_1 h \ddot{f}(t - (\theta_1 + \tilde{\theta}_1) k_1 h) - \right. \\ & - \sum_{i_2=2}^n \tilde{\theta}_{i_2} k_1 h \ddot{f}(t - k_{i_2} h - (\theta_{i_2} + \tilde{\theta}_{i_2}) k_1 h) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i_2, i_3=2 \\ i_1 \neq i_2}}^n \tilde{\theta}_{i_2, i_3} k_1 h \ddot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3})h - \\ & - (\theta_{i_2, i_3} + \tilde{\theta}_{i_2, i_3}) k_1 h) + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n \tilde{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h \ddot{f} \times \\ & \times (t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - (\theta_{i_2, i_3, \dots, i_n} + \\ & + \tilde{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n}) k_1 h) \left. \right] + k_1 h \left[\hat{f}(t - \hat{\theta}_1 k_1 h) - \right. \\ & - \dot{f}(t - \hat{\theta}_1 k_1 h) + \sum_{i_2=2}^n (\hat{f}(t - k_{i_2} h - \hat{\theta}_{i_2} k_1 h) - \\ & - \dot{f}(t - k_{i_2} h - \hat{\theta}_{i_2} k_1 h)) + \dots + \\ & + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{\substack{i_2, i_3, \dots, i_n=2 \\ i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_n}}^n (\hat{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + k_{i_n})h - \\ & - \hat{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h) - \dot{f}(t - (k_{i_2} + k_{i_3} + \dots + \\ & + k_{i_n})h - \hat{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} k_1 h)) \left. \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_{i_2}, \bar{\theta}_{i_2, i_3}, \dots, \bar{\theta}_{i_2, i_3, \dots, i_n} \in (0; 1)$. Из последнего выражения следует оценка (3.3).

Теорема 8. Функция $\tilde{f}_a^2(t)$, заданная формулой

$$\tilde{f}_a^2(t) = f_a^2(t) + u_2(t), \quad (3.9)$$

является оценкой функции $f(t)$ по ее предшествующим значениям, где $u_2(t)$ — сигнал, несущий информацию об остатке (1.14) или (1.15). Если $f(t)$ имеет непрерывные и ограниченные производные первого и второго порядков, то сигнал $u_2(t)$ и оценка ошибки аппроксимации $\tilde{e}_2(t)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_2(t) = & h[\hat{f}(t - h) - \hat{f}(t - h - \hat{\theta}_2 h) + \frac{1}{2!} \hat{f}(t - 2h - \\ & - \hat{\theta}_3 h) + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \hat{f}(t - (n-1)h - \hat{\theta}_n h)]; \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\tilde{e}_2(t) \leq h \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{n-1}^i}{i!} \right) (h \sup_{t > T} |\ddot{f}(t)| + \sup_{t > T} |\delta^1(t)|).$$

Если $f(t)$ имеет непрерывные и ограниченные производные n -го и $(n+1)$ -го порядков, то сигнал $u_2(t)$ и точность аппроксимации $\tilde{e}_2(t)$ в виде

$$u_2(t) = h^n \hat{f}^{(n)}(t - \hat{\theta} nh), \quad (3.11)$$

$$\tilde{e}_2(t) \leq h^n [nh \sup_{t > T} |f^{(n+1)}(t)| + \sup_{t > T} |\delta^n(t)|].$$

Здесь $\hat{f}^{(i)}(t)$ — оценка i -й производной функции $f(t)$, $\delta^1(t) = \hat{f}^1(t) - \dot{f}(t)$, $\delta^n(t) = f^{(n)}(t - \hat{\theta} nh) - \hat{f}^{(n)}(t - \hat{\theta} nh)$, коэффициенты $\hat{\theta} = (1/nh; 1)$, $\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \dots, \hat{\theta}_n \in (0; 1)$ выбираются разработчиком, время T определено выражением (2.7).

Доказательство теоремы 8 следует из доказательства теоремы 7.

Теорема 9. Функция $\tilde{f}_a^3(t)$, заданная формулой

$$\tilde{f}_a^3(t) = f_a^3(t) + u_3(t), \quad (3.12)$$

является оценкой функции $f(t)$ по ее предшествующим значениям, где

$$u_3(t) = (lA_2^L A_1)^{-1} lA_2^L Z(t); \quad (3.13)$$

$$Z(t) = \left[\tilde{u}(t), \tilde{u}\left(t - \frac{1}{k}h\right), \dots, \tilde{u}\left(t - \frac{z}{k}h\right) \right];$$

$$\tilde{e}_3(t) \leq \|(lA_2^L A_1)^{-1} lA_2^L\| \sup_{t > T} |\tilde{R}(t) - Z(t)|.$$

Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную первого порядка, то сигнал $\tilde{u}(t)$ задается функцией (3.10) с заменой h на h/k , $k > 1$, причем, если запаздывание в некотором слагаемом (3.10) меньше h , то данное слагаемое заменяется на $\hat{f}^1(t-h)$ или 0. Если $f(t)$ имеет непрерывную и ограниченную производную n -го порядка, то сигнал $\tilde{u}(t)$ определяется функцией (3.11) с заменой h на h/k , причем, если запаздывание в выражении (3.11) меньше h , то (3.11) заменяется на $\hat{f}^{(n)}(t-h)$ или 0, время T определено выражением (2.9).

Доказательство теоремы 9 следует из доказательства теоремы 8.

Теорема 10. Функция $\tilde{f}_a^4(t)$, заданная формулой

$$\tilde{f}_a^4(t) = f_a^4(t) + u_4(t), \quad (3.14)$$

является оценкой функции $f(t)$ по ее предшествующим значениям, где

$$u_4(t) = (l\tilde{A}_2^L A_1)^{-1} l\tilde{A}_2^L W(t), \quad (3.15)$$

$$\tilde{e}_4(t) \leq \|(l\tilde{A}_2^L A_1)^{-1} l\tilde{A}_2^L\| \sup_{t > T} |\hat{R}(t) - W(t)|.$$

Здесь $W(t)$ — оценка сигнала $\hat{R}(t)$, где первая компонента $W(t)$ задается выражением (3.2) или (3.4). Если запаздывание некоторых компонент вектора $W(t)$ меньше h , то данные компоненты заменяются на 0 или соответствующие функции с запаздыванием h .

Доказательство теоремы 10 следует из доказательства теоремы 7.

Продemonстрируем полученные результаты на численных примерах.

4. Алгоритмы скользящей аппроксимации

Рассмотрим алгоритмы (2.1), (2.6), (2.8) и (2.13).

1. Пусть $n = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 3$. Тогда алгоритм (2.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_a^1(t) = & \sum_{i_1=1}^3 f(t - k_{i_1}h) - \frac{1}{3} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^3 f(t - (k_{i_1} + k_{i_2})h) + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3}}^3 f(t - (k_{i_1} + k_{i_2} + k_{i_3})h). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Время аппроксимации $T = 6h$.

2. Зададим $n = 3$ и $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. В результате получим алгоритм (2.6) в форме

$$f_a^2(t) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} C_3^i f(t - ih). \quad (4.2)$$

Время аппроксимации $T = 3h$.

3. Сформируем алгоритм (2.8). Пусть $n = 3$ и $k = 4$. Отметим, что для данных параметров алгоритм аппроксимации, представленный в работе [10], не реализуем. Остальные параметры алгоритма (2.8) определены в виде

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$F_2(t) = \begin{bmatrix} f(t-h) \\ f\left(t - \frac{5h}{4}\right) \\ f\left(t - \frac{3h}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Зададим A_2^L в виде

$$A_2^L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}.$$

В результате алгоритм (2.8) будет иметь вид

$$f_a^3(t) = 15f(t-h) - 24f\left(t - \frac{5h}{4}\right) + 10f\left(t - \frac{3h}{2}\right). \quad (4.3)$$

Время аппроксимации $T = 1,5h$.

4. Сформируем алгоритм (2.13). Пусть $k_1 = 1/2$, $k_2 = 3/4$ и $k_3 = 1$. Остальные параметры алгоритма определены в виде

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, F_2(t) = \begin{bmatrix} f(t-h) \\ f(t-\frac{5h}{4}) \\ f(t-\frac{3h}{2}) \end{bmatrix}.$$

Зададим A_2^L в виде матрицы третьего порядка, все элементы которой равны единице. В результате алгоритм (2.13) примет вид

$$\begin{aligned} f_a^4(t) = & 2f(t-h) + f\left(t-\frac{5h}{4}\right) + f\left(t-\frac{3h}{2}\right) - \\ & - f\left(t-\frac{7h}{4}\right) - 2f(t-2h) - f\left(t-\frac{9h}{4}\right) + f\left(t-\frac{11h}{4}\right) - \\ & - f\left(t-\frac{5h}{2}\right) + f(t-3h). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Время аппроксимации $T = 3h$.

Продemonстрируем качество аппроксимации алгоритмов (4.1)–(4.4). Для этого рассмотрим неизвестную функцию $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) = & 0,1t + 1 + \sin(0,05t) + \cos(0,11t) + \\ & + \sin(0,21t + \pi/3) + \sin(0,27t + \pi/4). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аппроксимируем функцию (4.5) с запаздыванием $h = 1$ (с) в реальном режиме времени. На рис. 1 представлены графики ошибок аппроксимации $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ и $e_4(t)$. При моделировании $e_i(t)$ считались как $e_i(t) = f_a^i(t) - f(t)$, $i = \overline{1,4}$.

На рис. 1 установившиеся значения ошибок $e_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, не превосходят значений 0,66, 0,12, 0,035 и 0,126 после 6, 3, 1,5 и 3 с соответственно.

Рассмотрим случайную функцию

$$f(t) = W(p)x(t), \quad (4.6)$$

где $p = d/dt$, $W(s) = \frac{1}{s(20s+1)}$, s — комплексная переменная, $x(t)$ — кусочно-непрерывная функция, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 0, дисперсией 1 и временем дискретизации 0,001 с.

Аппроксимируем функцию (4.6) с запаздыванием $h = 1$ (с) в реальном режиме времени. На рис. 2, а представлен график случайной функции $f(t)$, на рис. 2, б — графики $e_1(t)$ и $e_2(t)$, на рис. 2, в — графики $e_3(t)$ и $e_4(t)$.

На рис. 2, б, в установившиеся значения ошибок $e_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, не превосходят значений 0,007, 0,004, 0,005 и 0,0045 после 6, 3, 1,5 и 3 с соответственно. Отметим, что алгоритмы [2–5], аппроксимирующие синусоидальные сигналы, не могут быть применимы к аппроксимации функций (4.5) и (4.6).

5. Алгоритмы скользящей аппроксимации с частичной компенсацией ошибки аппроксимации

Теперь рассмотрим алгоритмы (3.1), (3.9), (3.12) и (3.14) с частичной компенсацией ошибки аппроксимации. Для оценки i -й производной $f^{(i)}(t)$ воспользуемся алгоритмом

$$\hat{f}^{(i)}(t) = \left[\frac{p}{0,01p+1} \right]^i f(t).$$

1. Выберем $\hat{\theta}_1 = 1$, $\hat{\theta}_2 = 0,5$, $\hat{\theta}_3 = 0,5$, $\hat{\theta}_{2,3} = 0,5$ и $\hat{\theta} = 5/12$. Принимая во внимание выражение (4.1), сформируем алгоритм (3.1), где

$$\begin{aligned} u_1(t) = & h[\hat{f}(t-h) - \hat{f}(t-2,5h) - \\ & - \hat{f}(t-3,5h) + \hat{f}(t-5,5h)] \end{aligned}$$

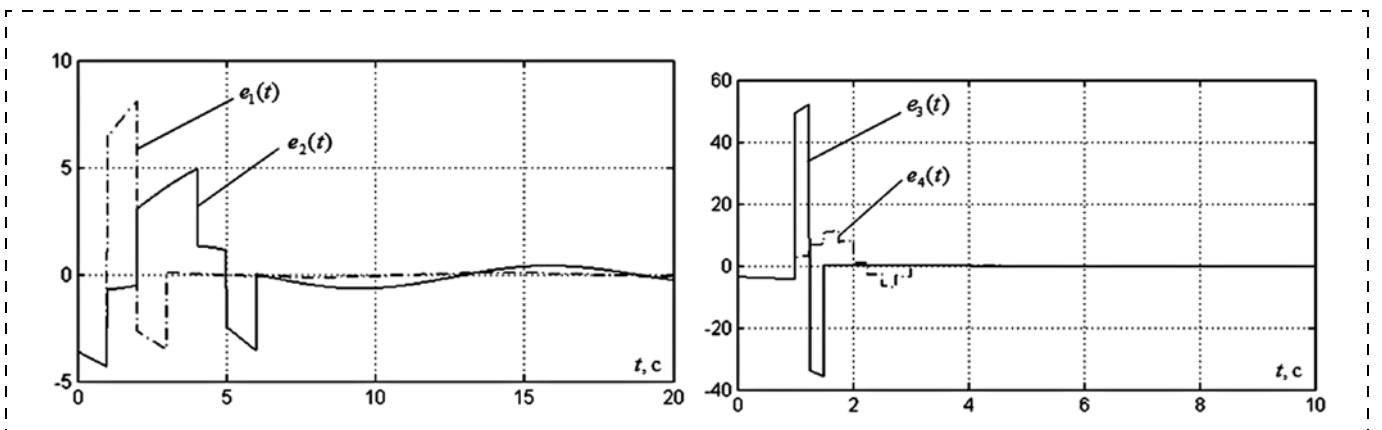


Рис. 1. Графики ошибок аппроксимации $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ и $e_4(t)$

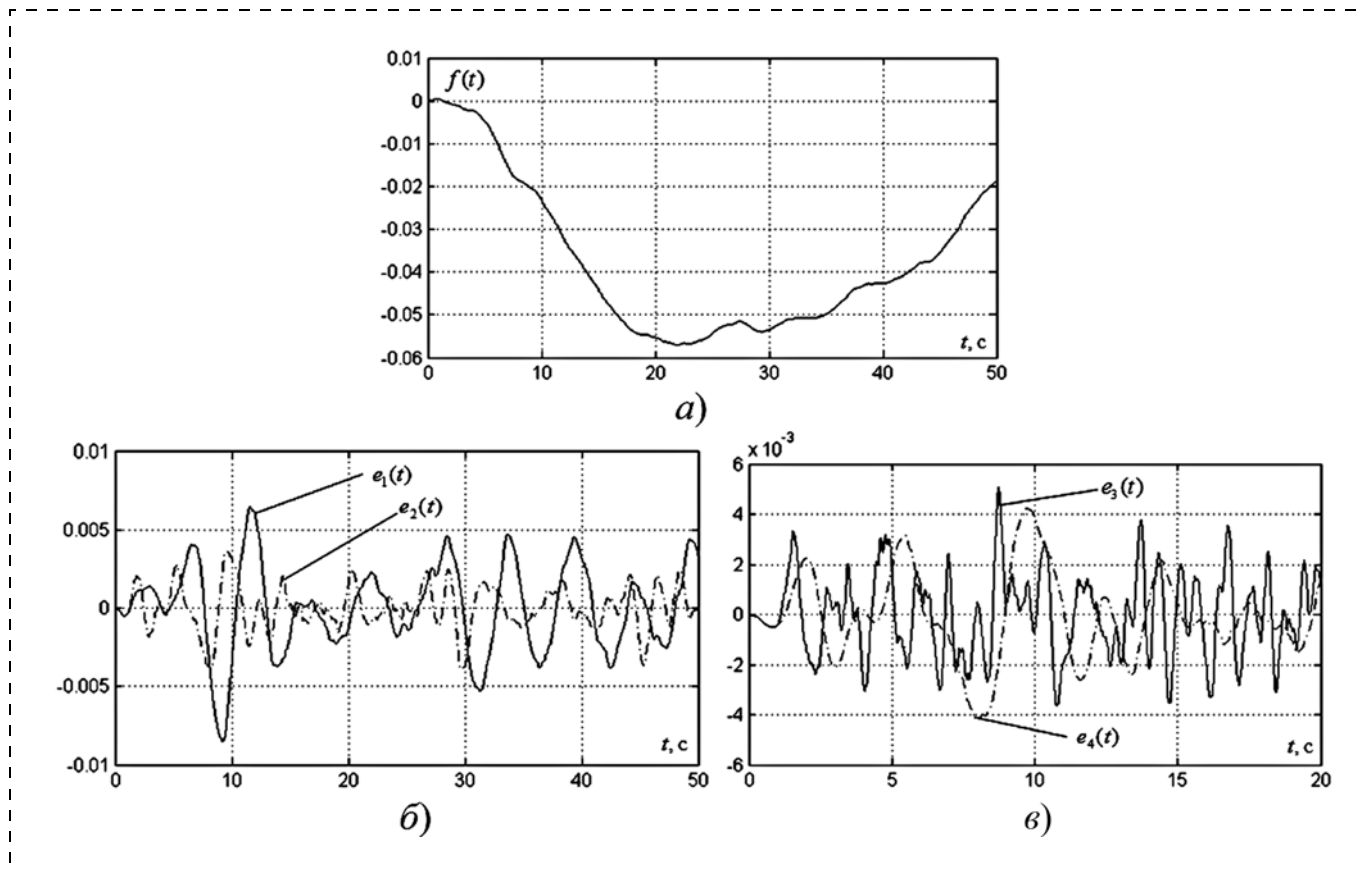


Рис. 2. График случайной функции $f(t)$ (а); графики ошибок аппроксимации $e_1(t)$, $e_2(t)$ (б), $e_3(t)$ и $e_4(t)$ (в)

или

$$u_1(t) = h^3 \hat{f}^{(3)}(t - 2,5h).$$

2. Зададим $\hat{\theta}_1 = 1$, $\hat{\theta}_2 = 1$, $\hat{\theta}_3 = 1$ и $\hat{\theta} = 0,6$. С учетом выражения (4.2) определим алгоритм (3.9), где

$$u_2(t) = h[\hat{f}(t-h) - 2\hat{f}(t-2h) + \hat{f}(t-3h)]$$

или

$$u_2(t) = h^3 \hat{f}^{(3)}(t - 1,8h).$$

3. Выберем $\hat{\theta}_1 = 2$, $\hat{\theta}_2 = 1$, $\hat{\theta}_3 = 1$, $\hat{\theta}_{2,3} = 0,1$ и $\hat{\theta} = 8/9$. Принимая во внимание выражение (4.3), сформируем алгоритм (3.12), где

$$u_3(t) = [111][\tilde{u}(t)\tilde{u}(t-0,5h)\tilde{u}(t-0,75h)]^T,$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & 0,5h[\hat{f}(t-h) - \hat{f}(t-1,25h) - \\ & - \hat{f}(t-1,5h) + \hat{f}(t-1,8h)] \end{aligned}$$

или

$$u_3(t) = h^3 \hat{f}^{(3)}(t - 2h).$$

Аппроксимируем неизвестную функцию (4.5) с запаздыванием $h = 1$ (с). На рис. 3, а–в представлены ошибки аппроксимации $e_i(t)$ и $\tilde{e}_i^j(t)$, $i = 1, 2, 4$, $j = 1, 3$, где $\tilde{e}_i^1(t) = \tilde{e}_i(t)$, если используется $u_i(t)$ с оценкой первой производной от $f(t)$, $\tilde{e}_i^3(t) = \tilde{e}_i(t)$, если используется $u_i(t)$ с оценкой третьей производной от $f(t)$. При моделировании $\tilde{e}_i^j(t)$ находится как $\tilde{e}_i^j(t) = \tilde{f}_a^j(t) - f(t)$.

Установившиеся значения ошибок $e_i(t)$, $\tilde{e}_i^1(t)$ и $\tilde{e}_i^3(t)$, представленные на рис. 3, а, не превосходят значений 0,66, 0,535, 0,1 после 6 с, на рис. 3, б не превосходят 0,12, 0,029, 0,0095 после 3 с, на рис. 3, в не превосходят 0,126, 0,103, 0,0145 после 3 с, причем значения ошибок аппроксимации существенно зависят от выбора $\hat{\theta}_i$ и $\hat{\theta}$.

Отметим, что при выводе алгоритма (3.14), (3.15) большая часть компонент вектора $\hat{R}(t)$ содержит запаздывание, меньшее, чем h . Поэтому результаты моделирования алгоритма (3.14) показали неудовлетворительные переходные процессы. Следовательно, использование алгоритмов (3.12) и (3.14) возможно, если остатки разложений содер-

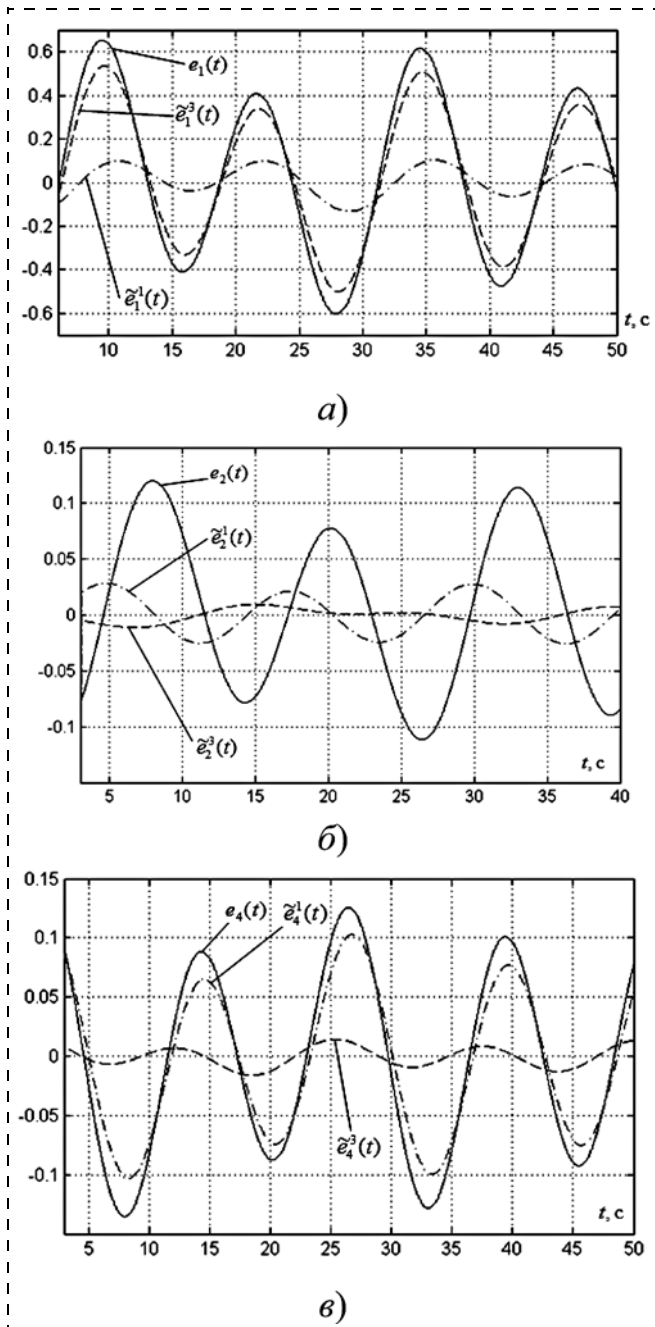


Рис. 3. Графики ошибок аппроксимации:

$a - e_1(t), \tilde{e}_1^1(t) \text{ и } \tilde{e}_1^3(t)$; $b - e_2(t), \tilde{e}_2^1(t) \text{ и } \tilde{e}_2^3(t)$; $в - e_4(t), \tilde{e}_4^1(t) \text{ и } \tilde{e}_4^3(t)$

жат незначительное число компонент с запаздыванием, меньшим, чем h .

Анализ результатов моделирования показал, что для гладких функций использование алгоритмов с частичной компенсацией ошибки аппроксимации позволяет уменьшить установившееся значение ошибки аппроксимации по сравнению с алгоритмами аппроксимации без частичной компенсации ошибки аппроксимации. Если аппроксимируемая функция имеет разрывы в производных, то реко-

мендуется использовать алгоритмы без частичной компенсации ошибки аппроксимации, так как значение функции на выходе наблюдателя в точках отсутствия производной может принимать достаточно большие значения.

Заключение

В статье представлен класс алгоритмов аппроксимации функции в реальном режиме времени, основанных на результатах теоремы Лагранжа о среднем с постоянным и переменным шагом. Синтезированы алгоритмы с частичной компенсацией ошибки аппроксимации. Получены значения времени и оценки ошибки аппроксимации.

Результаты моделирования показали, что для гладких функций использование алгоритмов с частичной компенсацией ошибки аппроксимации позволяет уменьшить установившееся значение ошибки аппроксимации по сравнению с алгоритмами аппроксимации без частичной компенсации ошибки аппроксимации. Если аппроксимируемая функция имеет разрывы в производных, то рекомендуется использовать алгоритмы без частичной компенсации ошибки аппроксимации, так как значение функции на выходе наблюдателя в точках разрыва производной может принимать достаточно большие значения.

Список литературы

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователей. М.: Наука, 1991.
2. Xia X. Global Frequency Estimation Using Adaptive Identifiers // IEEE Trans. on Automatic Control. 2002. Vol. 47. P. 1188—1193.
3. Marino R., Tomei P. Global Estimation of n Unknown Frequencies // IEEE Trans. on Automatic Control. 2002. Vol. 47. P. 1324—1328.
4. Бобцов А. А., Пыркин А. А. Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 19—23.
5. Фуртат И. Б. Алгоритм компенсации неизвестных мультigarмонических возмущений для объектов с запаздыванием по управлению // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5 (66). С. 19—25.
6. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: ГИТТЛ, 1954.
7. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
9. Цыпкин Я. З. Скользящая аппроксимация и принцип поглощения // Доклады академии наук. 1997. Т. 357. № 6. С. 750—751.
10. Цыкунов А. М. Следящие системы для линейных объектов с запаздывающим управлением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 3. С. 9—14.
11. Буков В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научной литературы Н. Ф. Бочкаревой, 2006.
12. Гантмахер Ф. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

Moving Approximation Algorithms

I. B. Furtat, cainenash@mail.ru✉,

ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation,
Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

Corresponding author: **Furtat Igor B.**, D.Sc., Leading Researcher,
ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation,
Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS, St. Petersburg, 199178, Russian Federation,
e-mail: cainenash@mail.ru

Received on October 13, 2016

Accepted on October 21, 2016

The paper describes the moving approximation algorithms for the functions, which have continuous and bounded derivatives of the first or higher orders. Firstly, Lagrange mean theorem is generalized for the equal and not equal steps. Additionally, Lagrange mean theorem is generalized for the reduced time approximation. Estimations of the residuals in the generalized Lagrange theorems are proposed. Secondly, we consider application of the generalized Lagrange theorems for the design moving approximation algorithms. It is demonstrated, that an error approximation depends on the appropriate residual in the generalized Lagrange theorems. Thirdly, we obtain results which allow us to compensate for an error approximation with a given accuracy. This fact is achieved due to a feedback compensation for the error approximation by using the derivative observers. The values of the time approximation and estimates of the approximation errors are presented. Simulations demonstrate that an approximation of the smooth functions by using algorithms with a compensation for the approximation error is better than an approximation without a compensation for the approximation error. If an approximated function has discontinuities in derivatives, it is recommended to use the algorithms without approximation with an error compensation, since the value of the function at the output of the observer in the derivative points of the discontinuity can be quite large.

Keywords: moving approximation, Lagrange mean value theorem, derivative observer

Acknowledgements: The results of Sections 3 and 5 were obtained with support of the Russian President's grant (№ 14.W01.16.6325-MD (MD-6325.2016.8)). Section 2 results were obtained by IPME RAS with support of the Russian Science Foundation (Project № 14-29-00142). Other studies were supported in part by a grant from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project № 14.Z50.31.0031) and a grant from the Government of the Russian Federation (project number 074-U01).

For citation:

Furtat I. B. Moving Approximation Algorithms, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 3, pp. 147–158.

DOI: 10.17587/mau.18.147-158

References

1. **Ljung L.** *System identification — Theory for the User*. Prentice-Hall, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, 1999, 609 p.
2. **Xia X.** Global Frequency Estimation Using Adaptive Identifiers, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2002, vol. 47, pp. 1188–1193.
3. **Marino R., Tomei P.** Global Estimation of n Unknown Frequencies, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2002, vol. 47, pp. 1324–1328.
4. **Bobtsov A. A., Pyrkin A. A.** The compensation of a harmonic perturbation under conditions of a delay in control, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 47, no. 4, pp. 513–517 (in Russian).
5. **Furtat I. B.** *Algoritm kompensatsii neizvestnykh multigarmonicheskikh vozmushcheniy dlya objektov s zapazdyvaniyem po upravleniyu* (Compensation algorithm of unknown multiharmonic disturbances for plants with time-delay in control), *Informatsionno-Upravlyayushchiye Sistemy*, 2013, vol. 66, no. 5, pp. 19–25 (in Russian).
6. **Goncharov V. L.** *Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy* (Theory of interpolation and approximation of functions), Moscow, GITTL, 1954, 327 p. (in Russian).
7. **Demidovich B. P., Maron I. A.** *Osnovy vychislitel'noy matematiki* (Basics of Computational Mathematics), Moscow, Fizmatgiz, 1963, 664 p. (in Russian).
8. **Fikhtengol'ts G. M.** *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Cours of differential and integral calculations), vol. 1, Moscow, FIZMATLIT, 2003, 616 p. (in Russian).
9. **Tsyppin Ya. Z.** Moving approximation and the absorption principle, *Doklady Mathematics*, 1997, vol. 56, no. 3, pp. 976–977 (in Russian).
10. **Tsykunov A. M.** *Sledyashchiye sistemy dlya lineynykh ob"yektov s zapazdyvayushchim upravleniyem* (Tracking systems for linear plants with time-delay in control), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 3, pp. 9–14 (in Russian).
11. **Bukov V. N.** Vlozheniye sistem. Analiticheskiy podkhod k analizu i sintezu matrichnykh sistem, (Imbedded systems. Analytical approach to the analysis and synthesis of matrix systems), Kaluga, Izdatel'stvo nauchnoy literatury N. F. Bochkarevoy, 2006, 720 p. (in Russian).
12. **Gantmacher F. R.** *The theory of matrices*, AMS Chelsea Publishing, Reprinted by American Mathematical Society, 2000, 276 p. (in Russian).