

References

1. **Tam Ch. K., Bucknall R., Greig A.** Review of collision avoidance and path planning methods for ships in close range encounters, *Journal of Navigation*, 2009, vol. 62, no. 3, pp. 455–476.
2. **Akmyaykin D. A., Homenko D. B.** *Sovmestnoye opredeleniye parametrov iseli s pomoshhyu sudovoy RLS I transpondera AIS* (The joint definition of the parameters of the goal with the help of the ship's radar and AIS transponder), *Ekspluatatsiya morskogo transporta*, 2010, no. 4, pp. 48–51 (in Russian).
3. **Smetanin S. I., Ignatyuk V. A., Evstifeev A. A.** *Sposob realizatsii programmy veb-chasti sistemy sputnikovogo monitoring* (The method for implementing the program Web Parts satellite monitoring system), *Informatsionnye tehnologii*, 2015, vol. 21, no. 6, pp. 448–455 (in Russian).
4. **Huges C. T.** When is a VTS is not a VTS, *Journal of Navigation*, 2009, vol. 62, no. 3, pp. 439–442.
5. **Maleev P. I., Ledenev N. I.** *Osobennosti, sostoyaniye I perspektivi rasvitiya e-navigatsii morskikh objektov* (Features, the state and prospects of development of e-navigation offshore facilities), *Navigatsiya i Gidrografiya*, 2012, no. 33, pp. 16–20 (in Russian).
6. **Degre T., Lefevre X.** A collision avoidance system, *Journal of Navigation*, 1981, vol. 34, pp. 294–302.
7. **Mitrofanov O.** An anti-collision indicator, *Journal of Navigation*, 1968, vol. 21, pp. 163–170.
8. **Grinyak V. M., Devyatisilny A. S.** *Prognosirovaniye opasnykh situatsiy pri upravlenii dvizheniyem na more* (Prediction of dangerous situations in the management of sea traffic), *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2004, no. 3, pp. 127–136 (in Russian).
9. **Grinyak V. M., Devyatisilny A. S.** *Sistema ekspertnogo otsenivaniya sostoyaniya navigatsionnoy besopasnosti morskoy akvatorii na osnove neyro-nechetkoy seti* (Expert estimation of navigation safety system state marine waters based on neuro-fuzzy network), *Problemy Upravleniya*, 2015, no. 4, pp. 58–65 (in Russian).
10. **Grinyak V. M., Devyatisilny A. S.** *Nechetkaya sistema raspnavaniya opasnogo sblizheniya sudov na morskikh akvatoriayah* (Fuzzy dangerous proximity detection system on ships offshore), *Vestnik Komputernih i Informatsionnih Tehnologiy*, 2014, no. 11, pp. 36–42 (in Russian).
11. **Szlapczynski R., Szlapczynska J.** A target information display for visualising collision avoidance manoeuvres in various visibility conditions, *Journal of Navigation*, 2015, vol. 68, pp. 1041–1055.
12. **Burmaka A. I.** *Strategiya rashozhdeniya sudov v situatsii chresmernogo sblizheniya* (Strategy vessels differences in the situation of excessive proximity), *Vestnik Gosudarstvennogo Universiteta Morskogo i Rechnogo Flota Imeni Admiral S. O. Makarova*, 2014, no. 1, pp. 20–22 (in Russian).
13. **Dorozhko V. M., Lebedeva A. N.** *Ekspertniye predstavleniya ob osnovnykh situatsionnykh modelyakh kollektivnogo dvizheniya sudov* (Expert understanding of the basic situational models of collective movements of ships), *Problemy Upravleniya*, 2006, no. 4, pp. 43–49 (in Russian).
14. **Devyatisilny A. S., Dorozhko V. M., Grinyak V. M.** *Informatsionno-tehnologicheskiye aspekty obespecheniya besopasnosti dvizheniya na morskikh akvatoriayah* (Information-technological aspects of safety in the offshore), *Nauchno-Tehnicheskaya Informatsiya. Seriya 2: Informatsionnye Processy i Sistemy*, 2003, no. 7, pp. 11–14 (in Russian).
15. **Konoplev M. A.** *Primeneniye apparata nechetkoy logiki dlya opredeleniya urovnya opasnosti stolknoveniya* (Application of Fuzzy Logic to determine the level of danger of collision), *Ekspluatatsiya Morskogo Transporta*, 2009, no. 2, pp. 34–39 (in Russian).
16. **Bobyar M. V.** *Vliyaniye chisla pravil na obucheniye nechetkologicheskoy sistemy* (The impact of the rules on the training of fuzzy logic system), *Vestnik Komputernih i Informatsionnih Tehnologiy*, 2014, no. 11, pp. 28–35.
17. **Lelekov C. G., Lyah A. M.** *Nechetkiy vivod v adaptivnykh taksonomicheskikh ekspertnykh sistemah*, *Informatsionnye tehnologii* (Fuzzy adaptive output in taxonomic expert systems), 2015, vol. 21, no. 12, pp. 890–895 (in Russian).
18. **Golovchenko B. S., Grinyak V. M.** *Informatsionnaya sistema sbora dannyh trafika morskoy akvatorii* (Information system of sea area of traffic data collection), *Nauchno-Tehnicheskaya Informatsiya. Seriya 2: Informatsionnye Processy i Sistemy*, 2014, no. 8, pp. 24–28 (in Russian).

УДК 629.78

DOI: 10.17587/mau.18.134-143

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц.,
А. В. Молоденков, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Алгоритм оптимального по энергии разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений

Рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота космического аппарата как твердого тела с одной осью симметрии в кватернионной постановке. С помощью замен переменных исходная задача упрощается (в смысле динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этой задачи представлено новое аналитическое решение в классе конических движений, при этом возникают ограничения на вид начального и конечного значений вектора угловой скорости. Дается алгоритм оптимального разворота космического аппарата. Приводится числовой пример.

Ключевые слова: оптимальное управление, космический аппарат, осесимметричное твердое тело, коническое движение

Введение

Построение управления пространственной перемещением космического аппарата (КА) как твердого тела в традиционной постановке включает задачи нахождения программного углового движения (разворота), программного управления и поиска управления, стабилизирующего программу углового движения в малом. Задача расчета программного углового движения и реализующего его управле-

ния во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления. Точное аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (см., например, работы [1–11], среди

которых по приоритету в отечественных исследованиях следует выделить работы [1, 3, 4], а также [5—9, 11]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем аналитическое решение задачи оптимального разворота КА (твердого тела) в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В настоящей статье (разделы 1—5 и приложение) рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота КА как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на управление. Время переориентации КА произвольно и зафиксировано. С помощью замен переменных исходная задача упрощается (в смысле динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. С использованием кватернионов и принципа максимума Л. С. Понтрягина получено новое аналитическое решение этой задачи в классе конических движений. Представлено явное выражение для оптимального управления и постоянного по модулю оптимального вектора угловой скорости КА. Траектория движения осесимметричного КА представляет собой регулярную прецессию (в этом отличие предлагаемого решения от работы [4]). Векторы начального и конечного значений угловой скорости КА должны принадлежать конической поверхности, порождаемой произвольно заданными постоянными условиями задачи. В разделе 6 приводится числовой пример решения задачи оптимальной в смысле минимума энергетических затрат переориентации КА с одной осью симметрии в классе конических движений (в виде регулярной прецессии).

Статья продолжает исследования, начатые в работах [11—14]. Отметим, что в работе [11] были получены аналитические решения традиционной и модифицированной задач оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота сферически-симметричного КА в классах конических и обобщенных конических движений. В работах [12, 13] получены аналитические алгоритмы решения задач оптимального по быстрдействию и в смысле комбинированного функционала разворотов сферически-симметричного КА в классе конических движений. В работе [14] предложено аналитическое приближенное решение задачи оптимального по энергии разворота КА (твердого тела)

произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях.

1. Постановка задачи

Движение КА с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [1]:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{w}; \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} I_1 \dot{w}_1 &= M_1; \\ I_2 \dot{w}_2 &= M_2 - (I_1 - I_2)w_1 w_3; \\ I_2 \dot{w}_3 &= M_3 + (I_1 - I_2)w_1 w_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{L}(t) = l_0(t) + l_1(t)\mathbf{i}_1 + l_2(t)\mathbf{i}_2 + l_3(t)\mathbf{i}_3$ (кватернион поворота КА), $\mathbf{w}(t) = w_1(t)\mathbf{i}_1 + w_2(t)\mathbf{i}_2 + w_3(t)\mathbf{i}_3$ (вектор угловой скорости КА) — фазовые координаты; $\mathbf{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T$ — (вектор внешнего момента, действующего на КА) — управление. Кватернион $\mathbf{L}(t)$ нормирован, т.е. $\|\mathbf{L}\| = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, символ "o" означает кватернионное умножение. Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ($\mathbf{L}(t), \mathbf{w}(t)$ — функции непрерывные, $\mathbf{M}(t)$ — кусочно-непрерывная функция). В динамических уравнениях Эйлера (1.2) для твердого тела (КА) с одной осью симметрии (направленной в нашем случае вдоль орта \mathbf{i}_1 связанной с КА системы координат) I_1, I_2 — главные центральные моменты инерции твердого тела, $I_1, I_2 = \text{const} > 0$.

В начальный $t = 0$ и в конечный $t = T$ моменты времени заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T \quad (1.3)$$

и угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T. \quad (1.4)$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$ системой (1.1), (1.2) при граничных условиях (1.3), (1.4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt, \quad (1.5)$$

где время T произвольно и зафиксировано.

Следуя работе [15], можно полагать, что функционал (1.5) пропорционален энергетическим затратам на создание управляющего момента КА.

2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам

$$t^{\text{безраз}} = t/T, \mathbf{w}^{\text{безраз}} = \mathbf{w}T, \mathbf{M}^{\text{безраз}} = \mathbf{M}T^2/I^{\text{масш}}, \\ J^{\text{безраз}} = JT^3/(I^{\text{масш}})^2, I_k^{\text{безраз}} = I_k/I^{\text{масш}}, k = 1, 2,$$

$$I^{\text{масш}} = ((I_1^2 + 2I_2^2)/3)^{1/2},$$

при этом вид формул (1.1)–(1.4) не изменится, а функционал (1.5) запишется следующим образом:

$$J = \int_0^1 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt. \quad (2.1)$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (1.1)–(1.4) (где $T = 1$), (2.1) в безразмерных переменных, и верхние индексы у них будут опущены.

2. Замены переменных

В целях упрощения (в смысле динамических уравнений Эйлера) задачи (1.1)–(1.4), (2.1) осуществим замены переменных аналогично выполненным в работах [16, 17], сводящие исходную задачу к задаче оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс. Для этого перепишем уравнения (1.2) в виде

$$\dot{w}_1 = m_1;$$

$$\dot{w}_2 = b_1 m_1 - b w_1 w_3;$$

$$\dot{w}_3 = b_1 m_3 - b w_1 w_2,$$

где $m_1 = M_1/I_1, m_2 = M_2/I_1, m_3 = M_3/I_1, b = (I_1 - I_2)/I_2, b_1 = I_1/I_2$.

Заменим переменные w_1, w_2, w_3 на новые переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ 0 & \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

тогда уравнения (1.2) преобразуются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 \cos\theta(t) & b_1 \sin\theta(t) \\ 0 & b_1 \sin\theta(t) & b_1 \cos\theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

или в кватернионной записи

$$\dot{\omega} = \tilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B}; \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}(t) = \exp\{\mathbf{i}_1 \theta(t)/2\}, \quad (3.4)$$

где " \sim " — сопряжение кватерниона, " $\exp\{\cdot\}$ " — кватернионная экспонента,

$$\theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \quad (3.5)$$

$b_2 = b b_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}$. Отметим, что $|\mathbf{B}(t)| = 1, \forall t$.

Кватернионное уравнение углового движения КА (1.1) при этом запишется в виде

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1} \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3) \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.6)$$

где кватернион \mathbf{B} определяется соотношением (3.4).

С учетом первого уравнения системы (3.2) и начального условия по угловой скорости КА (1.4) уравнение (3.3) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\omega} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta; \quad (3.7)$$

$$\beta(t) = \exp\left\{\mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left(\int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{0_1}\right) d\tau/2\right\}. \quad (3.8)$$

Нелинейное выражение, стоящее в правой части уравнения (3.7) и зависящее только от переменных $m_k(t), k = 1, 3$, примем за новое управление $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta, \quad (3.9)$$

где β определяется выражением (3.8). Отметим, что $u_1(t) = b_1 m_1(t)$, и, поэтому, в замене переменных (3.9) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной $\mathbf{u}(t)$ (когда она будет известна) восстановить управление $\mathbf{m}(t)$ задачи (1.1)–(1.4), (2.1).

Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА следующим образом:

$$|\mathbf{u}| = |\tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta| = \\ = b_1 |\tilde{\beta}| |\mathbf{m}| |\beta| = b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}|/I_1 = |\mathbf{M}|/I_2.$$

Исходя из (3.6) осуществим еще одну замену переменных:

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(t)$ — новая кватернионная переменная, описывающая угловое положение КА.

С учетом всех указанных выше замен переменных задача оптимального разворота КА (1.1)—(1.4), (2.1) примет вид

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega; \quad (3.11)$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{u}; \quad (3.12)$$

$$\dot{\theta} = b_2\omega_1; \quad (3.13)$$

$$\theta(0) = 0; \quad (3.14)$$

$$\omega(0) = \omega_0 = b_1 w_{0_1} \mathbf{i}_1 + w_{0_2} \mathbf{i}_2 + w_{0_3} \mathbf{i}_3;$$

$$\omega(T) = \omega_T =$$

$$= \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)); \quad (3.15)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0 = \mathbf{L}_0, \Lambda(T) = \Lambda_T = \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta(T)), T = 1; \quad (3.16)$$

$$J = I_2^2 \int_0^1 \mathbf{u}^2 dt \rightarrow \min, \quad (3.17)$$

где $w_{0_1}, w_{0_2}, w_{0_3}, w_{T_1}, w_{T_2}, w_{T_3}$ — компоненты вектора $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T$ в начальный и конечный моменты времени соответственно, а кватернион $\mathbf{B}(\theta(T))$ определяется по формуле (3.4).

Из этой задачи найдем оптимальное управление $\mathbf{u}^{\text{опт}}$ и траекторию $\Lambda^{\text{опт}}, \omega^{\text{опт}}$. Как видно, векторное дифференциальное уравнение (3.12) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи.

Далее будем рассматривать задачу (3.11)—(3.17).

4. Применение принципа максимума

Выполним процедуру принципа максимума Л. С. Понтрягина [1, 18]. Введем вспомогательные функции $\Psi(t)$ (кватернион), $\varphi(t)$ (вектор) и $\rho(t)$, сопряженные к фазовым координатам $\Lambda(t), \omega(t)$ и $\theta(t)$. Составим функцию Гамильтона—Понтрягина

$$H = -\psi^* I_2^2 \mathbf{u}^2 + (\Psi, \Lambda \circ \omega)/2 + (\varphi, \mathbf{u}) + b_2 \omega_1 \rho, \quad (4.1)$$

где постоянная $\psi^* \geq 0$, а (\dots) — скалярное произведение векторов.

Будем рассматривать невырожденные решения краевой задачи принципа максимума, для которых $\psi^* > 0$. В силу однородности функции Гамильтона—Понтрягина H [18] в формуле (4.1) положим $\psi^* I_2^2 = 1$.

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega; \\ \dot{\rho} = 0; \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)/2 - b_2 \rho \mathbf{i}_1, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\text{vect}(\dots)$ обозначает векторную часть кватерниона.

Как видно, уравнения для переменных Ψ и Λ совпадают с точностью до константы. Используя этот факт и введя обозначение [1]

$$\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad (4.3)$$

где \mathbf{c}_v — произвольная векторная постоянная, сопряженную систему запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \rho = \rho_0 = \text{const}; \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2 - b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Следует отметить, что применение этого приема [1], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (3.11) (замена кватернионной сопряженной переменной Ψ на векторную переменную \mathbf{p} (3.3)), позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после применения принципа максимума, на четыре.

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (4.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$\mathbf{u}^{\text{опт}} = \varphi/2. \quad (4.5)$$

Как видно, вектор-функция управления в задаче носит непрерывный характер.

Из соотношений (3.11), (3.12), (4.4), (4.5) имеем:

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \omega]; \quad (4.6)$$

$$\mathbf{p} = -4\dot{\omega} + 2b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1, \quad (4.7)$$

где $[\dots]$ означает векторное произведение.

Подставляя выражение (4.7) в (4.6), получим

$$\ddot{\omega} = [\dot{\omega} - b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1/2, \omega]. \quad (4.8)$$

Таким образом, оптимальная угловая скорость твердого тела на всем интервале времени движения удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению третьего порядка (4.8). Решение поставленной задачи оптимального управления сводится, тем самым, к решению краевой задачи (3.11), (4.8), (3.13)—(3.16).

Из постановки задачи видно, что конечные значения фазовых координат $\Lambda(t), \omega(t)$ не являются фиксированными величинами, а принадлежат многообразию, определяемому выражениями (3.5), (3.15), (3.16). Поэтому для фазовых координат $\Lambda(t), \omega(t), \theta(t)$ и сопряженных переменных $\Psi(t), \varphi(t), \rho_0$ в момент времени $t = T = 1$ выполняются условия трансверсальности:

$$\text{scal}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi(t)) = 0, \quad (4.9)$$

где $\text{scal}(\dots)$ обозначает скалярную часть кватерниона, и

$$\rho_0 + p_1(T)/2 + \varphi_2(T)\omega_3(T) - \varphi_3(T)\omega_2(T) = 0, \quad (4.10)$$

построение которых приведено в Приложении.

Относительно условия (4.9) отметим, что оно выполняется автоматически при переходе к вектору сопряженных переменных \mathbf{p} (4.3). Условие (4.10) вытекает из первого интеграла задачи (3.11)—(3.17), (4.2)—(4.8), который справедлив для оптимального управления и оптимальной траектории и получается на основе выражений (3.12), (4.4)—(4.6). Покажем это.

Из соотношений (3.12), (4.5) следует, что $[\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\varphi}] = 0$, $\forall t \in [0, T]$. Тогда с учетом выражения для $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ (4.4) и $\dot{\mathbf{p}}$ (4.6) можем записать

$$\dot{\omega}_2 \varphi_3 - \dot{\omega}_3 \varphi_2 + \omega_2 \dot{\varphi}_3 - \omega_3 \dot{\varphi}_2 = \dot{p}_1/2$$

или

$$p_1(t)/2 + \omega_3(t)\varphi_2(t) - \omega_2(t)\varphi_3(t) = \text{const} = \rho_0, \forall t \in [0, T]. \quad (4.11)$$

Это выражение и есть первый интеграл задачи (3.11)—(3.17), (4.2)—(4.8).

5. Аналитическое решение задачи оптимального разворота КА в классе конических движений

Будем искать решение уравнений (3.11), (4.8) в классе конических движений. Для этого оптимальную угловую скорость КА представим в виде

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1 \gamma + \alpha \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \sin \Omega t + \mathbf{i}_3 \cos \Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta, \quad (5.1)$$

где $\alpha, \delta, \gamma, \Omega$ — неопределенные постоянные, а $\mathbf{e}_\delta = \exp\{\mathbf{i}_1 \delta/2\}$.

Последовательно дифференцируя уравнение (5.1) три раза по переменной t , получим:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \alpha \Omega \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \cos \Omega t - \mathbf{i}_3 \sin \Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta; \quad (5.2)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} = -\alpha \Omega^2 \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \sin \Omega t - \mathbf{i}_3 \cos \Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta; \quad (5.3)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} = -\alpha \Omega^3 \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \cos \Omega t - \mathbf{i}_3 \sin \Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta. \quad (5.4)$$

Подставляя выражения (5.1)—(5.4) в (4.8) и учитывая выражения (3.12), (4.5), (4.11), убедимся в выполнении равенства в (4.8); при этом

$$\gamma = \Omega - b_2 \alpha^2 / ((1 + b_2) \Omega), \rho_0 = 2 \alpha^2 \Omega / (1 + b_2). \quad (5.5)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\omega}} &= [\ddot{\boldsymbol{\omega}} - b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1/2, \boldsymbol{\omega}] = \\ &= ((\ddot{\boldsymbol{\omega}} - b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1/2) \circ \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \circ (\ddot{\boldsymbol{\omega}} - b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1/2))/2. \end{aligned}$$

Траектория движения КА при угловой скорости (5.1) из соотношений (3.11), (3.16) находится явно и имеет вид регулярной прецессии:

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \exp\{(\mathbf{i}_3 \alpha + \mathbf{i}_1(\gamma - \Omega))t/2\} \circ \\ &\circ \exp\{\mathbf{i}_1(\Omega t + \delta)/2\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Вектор оптимального управления \mathbf{u} определяется из формул (3.12), (5.2).

Возвращаясь к исходным безразмерным переменным задачи (1.1)—(1.4), (2.1), запишем окончательные выражения для вектора оптимальной угловой скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= \mathbf{i}_1 b_1^{-1} \gamma + \alpha(\mathbf{i}_2 \sin((\Omega - b_2 \gamma)t + \delta) + \\ &+ \mathbf{i}_3 \cos((\Omega - b_2 \gamma)t + \delta)), \end{aligned} \quad (5.7)$$

кватерниона оптимальной траектории

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= \mathbf{L}_0 \circ \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \exp\{(\mathbf{i}_3 \alpha + \mathbf{i}_1(\gamma - \Omega))t/2\} \circ \\ &\circ \exp\{\mathbf{i}_1(b_2 \gamma + \Omega)t + \delta)/2\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

и вектора оптимального управляющего момента КА

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= I_2 \alpha \Omega (\mathbf{i}_2 \cos((\Omega + b_2 \omega_1)t - \delta) - \\ &- \mathbf{i}_3 \sin((\Omega + b_2 \omega_1)t - \delta)), \end{aligned} \quad (5.9)$$

где γ определяется первым из выражений (5.5).

При $t = 0$ из соотношения (5.7) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(0) &= \mathbf{i}_1 b_1^{-1} (\Omega - b_2 \alpha^2 / ((1 + b_2) \Omega)) + \\ &+ \alpha(\mathbf{i}_2 \sin \delta + \mathbf{i}_3 \cos \delta). \end{aligned} \quad (5.10)$$

При $t = T = 1$ из выражений (5.7), (5.8), (1.3) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(T) &= \mathbf{i}_1 b_1^{-1} (\Omega - b_2 \alpha^2 / ((1 + b_2) \Omega)) + \\ &+ \alpha(\mathbf{i}_2 \sin((\Omega - b_2 \gamma)T + \delta) + \mathbf{i}_3 \cos((\Omega - b_2 \gamma)T + \delta)), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \text{vect}(\tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \exp\{(\mathbf{i}_3 \alpha + \mathbf{i}_1 b_2 \alpha^2 / ((1 + b_2) \Omega))T/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_1(\Omega T(1 + b_2) - b_2 \alpha^2 T / ((1 + b_2) \Omega)) + \delta)/2\} \circ \\ \circ \tilde{\mathbf{L}}_T \circ \mathbf{L}_0) = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В выражения (5.10)—(5.12) входят три произвольные постоянные α, δ, Ω . Определяя их из системы трех нелинейных алгебраических уравнений (5.12), удовлетворим граничные условия по угловому положению КА (1.3) (α, δ, Ω будут зависеть от компонент кватернионов $\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_T$, главных центральных моментов инерции КА (твердого тела) I_1, I_2 и времени переориентации $T = 1$). Из-за недостаточного числа произвольных постоянных в решении задачи на величины $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_T$ (1.4) налагаются требования вида (5.10), (5.11).

Таким образом, в случаях, когда на граничные условия по угловой скорости КА наложены ограничения вида (5.10), (5.11) (это означает, что вектор угловой скорости $\mathbf{w}(t)$ на всем интервале времени движения принадлежит некоторой конической поверхности, определяемой в пространстве заданными постоянными задачи $I_1, I_2, T = 1, \mathbf{L}_0, \mathbf{L}_T$), траектория углового движения осесимметричного КА находится в классе конических движений и определяется явными аналитическими выражениями (5.7), (5.8), управляющий момент КА определяется выражением (5.9).

Оптимальное значение функционала качества в безразмерных переменных (2.1) равно

$$J = \int_0^1 |\mathbf{M}|^2 dt = I_2^2 \alpha^2 \Omega^2. \quad (5.13)$$

Из выражений разделов 3–5 ((3.4), (3.6), (3.9), (3.10), (4.3), (4.5), (4.7), (5.5), (5.7) и (5.8)) можно найти сопряженные переменные. Тем самым, задача при существующих ограничениях решена полностью.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота осесимметричного КА (1.1)–(1.4), (2.1) в безразмерных переменных в классе конических движений.

Шаг 1. По заданным кватернионам \mathbf{L}_0 , \mathbf{L}_T (1.3), главным центральным моментам инерции КА (твердого тела) I_1 , I_2 , времени переориентации $T = 1$ и формуле (5.12) определяются величины α , δ , Ω .

Шаг 2. Используя α , δ , Ω , I_1 , I_2 , $T = 1$, по формуле (5.10)

$$\mathbf{w}_0^{\text{выч}} = \mathbf{i}_1(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))I_2/I_1 + \alpha(\mathbf{i}_2\sin\delta + \mathbf{i}_3\cos\delta)$$

и формуле (5.11)

$$\mathbf{w}_T^{\text{выч}} = \mathbf{i}_1(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))I_2/I_1 + \alpha(\mathbf{i}_2\sin((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)) + \mathbf{i}_3\cos((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)),$$

$$b_2 = 1 - I_2/I_1$$

вычисляются значения векторов $\mathbf{w}_0^{\text{выч}}$, $\mathbf{w}_T^{\text{выч}}$.

Шаг 3. Полученные значения $\mathbf{w}_0^{\text{выч}}$, $\mathbf{w}_T^{\text{выч}}$ сравниваются с заданными в выражении (1.4) величинами \mathbf{w}_0 , \mathbf{w}_T .

Шаг 4. Если равенство на шаге 3 алгоритма выполняется, то оптимальное решение задачи находится в классе конических движений; при этом угловая скорость КА, траектория его углового движения, вектор управляющего момента и значение функционала оптимизации вычисляются по формулам (5.7)–(5.9), (5.13) и шагу 1 алгоритма.

Шаг 5. Сопряженные переменные задачи находятся по формулам (3.4), (3.6), (3.9), (3.10), (4.3), (4.5), (4.7), (5.5), (5.7) и (5.8).

6. Числовой пример

В данном разделе на примере КА "Спейс Шаттл" [19] приводятся результаты численного решения задачи оптимального разворота осесимметричного КА в классе конических движений по формулам раздела 5. Ниже на рисунке представлены графики изменения во времени компонент угловой скорости $w_i(t)$, $i = 1, 3$, векторной части кватерниона ориентации $L_i(t)$, $i = 1, 3$, и компонент вектора управляющего момента $M_i(t)$, $i = 1, 3$ КА.

Расчеты проводили для следующих значений:

$$I_1 = 3\,400\,648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_3 = I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

или $I_1 = 0,1967$, $I_2 = 1,2168$, $I_3 = I_2$
(безразмерные моменты инерции);

$$\mathbf{L}_0 = [0,79505, 0,29814, -0,39752, 0,34783]^T,$$

$$\mathbf{L}_T = [0,84434, 0,39846, -0,3260, 0,14848]^T, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{w}_0 = [0,03268, 0,10119, -0,47492]^T,$$

$$\mathbf{w}_T = [0,03268, -0,17132, -0,45435]^T,$$

где граничные условия по угловой скорости КА удовлетворяют ограничениям раздела 5.

Вначале по формулам (5.12) находили величины α , δ , Ω ($\alpha = 0,48558$, $\delta = -3,35152$, $\Omega = 0,54311$), затем по формулам (5.7)–(5.9), (5.13) определяли векторы \mathbf{w} , \mathbf{M} и кватернион \mathbf{L} .

Отметим, что кватернион ориентации КА $\mathbf{L}(t)$ может быть двузначным [1], т.е. \mathbf{L} и $-\mathbf{L}$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Заключение

Представленное в статье аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного КА (твердого тела) в классе конических движений (в виде регулярной прецессии) может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известное аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА, полученное в классе плоских эйлеровых разворотов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Построение условий трансверсальности

При построении условий трансверсальности воспользуемся работой [18] и подходом, представленным в статье [20]. Для этого перепишем конечные условия (3.15), (3.16) ($\theta(T) = \theta_T$):

$$\boldsymbol{\omega}(T) - \tilde{\mathbf{B}}(\theta_T) \circ$$

$$\circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta_T) = 0, \quad (\text{П. 1})$$

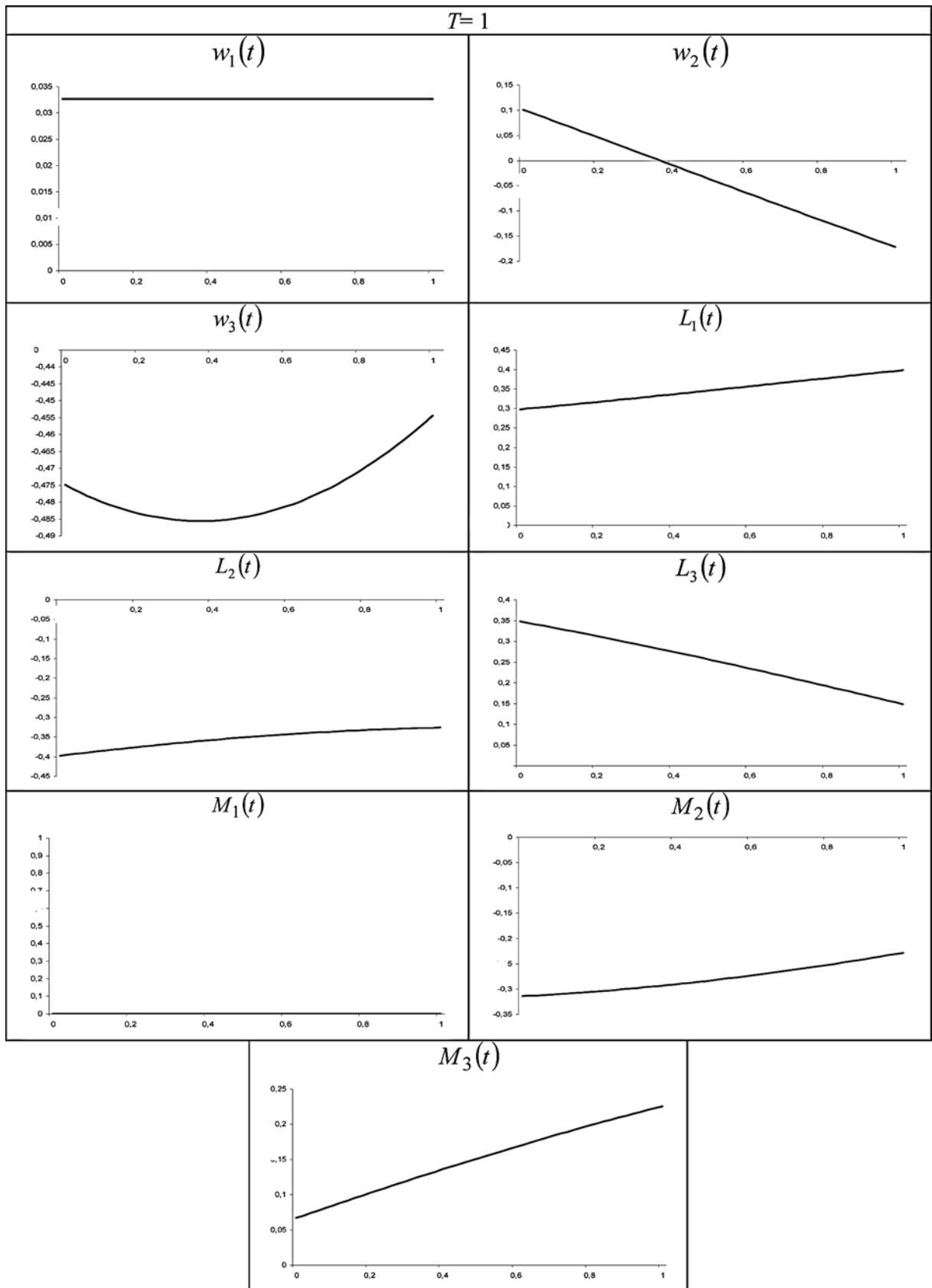
$$\text{vect}(\tilde{\Lambda}(T) \circ \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta_T)) = 0$$

или, записывая кватернион $\tilde{\mathbf{B}}(\theta_T)$ в явном виде,

$$\boldsymbol{\omega}(T) \circ (\cos(\theta_T/2) - \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2)) \circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 +$$

$$+ w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ (\cos(\theta_T/2) + \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2)) = 0, \quad (\text{П. 2})$$

$$\text{vect}(\Lambda(T) \circ \mathbf{L}_T \circ (\cos(\theta_T/2) + \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2))) = 0.$$



Решение задачи в классе конических движений

Фазовые координаты ω , Λ , θ должны удовлетворять условиям трансверсальности

$$\varphi_i + \sum_{k=1}^6 a_k \frac{\partial G_k}{\partial \omega_i} = 0, \quad t = T; \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\psi_j + \sum_{k=1}^6 a_k \frac{\partial G_k}{\partial \lambda_j} = 0, \quad t = T; \quad j = \overline{0, 3};$$

$$\rho_0 + \sum_{k=1}^6 a_k \frac{\partial G_k}{\partial \theta} = 0, \quad t = T,$$

где a_k ($k = \overline{1, 6}$) — множители Лагранжа, подлежащие определению; соотношения

$$G_k(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \theta) = 0 \quad (t = T; \quad k = \overline{1, 6})$$

задают многообразие конечного состояния и соответствуют условиям (П. 1):

$$G_1 = \omega_1 - w_{T1} b_1 = 0;$$

$$G_2 = \omega_2 - w_{T2} \cos \theta_T - w_{T3} \sin \theta_T = 0;$$

$$G_3 = \omega_3 + w_{T2} \sin \theta_T - w_{T3} \cos \theta_T = 0;$$

$$G_4 = F_1 \cos(\theta_T/2) + F_0 \sin(\theta_T/2);$$

$$G_5 = F_2 \cos(\theta_T/2) + F_3 \sin(\theta_T/2);$$

$$G_6 = F_3 \cos(\theta_T/2) + F_2 \sin(\theta_T/2),$$

где

$$F_0 = L_{T0} \lambda_0 + L_{T1} \lambda_1 + L_{T2} \lambda_2 + L_{T3} \lambda_3;$$

$$F_1 = L_{T1} \lambda_0 - L_{T0} \lambda_1 - L_{T3} \lambda_2 + L_{T2} \lambda_3;$$

$$F_2 = L_{T2} \lambda_0 + L_{T3} \lambda_1 - L_{T0} \lambda_2 - L_{T1} \lambda_3;$$

$$F_3 = L_{T3} \lambda_0 - L_{T2} \lambda_1 + L_{T1} \lambda_2 - L_{T0} \lambda_3.$$

Условия трансверсальности примут вид

$$\varphi_1 + a_1 = 0, \quad \varphi_2 + a_2 = 0, \quad \varphi_3 + a_3 = 0, \quad (\text{П. 3})$$

$$\psi(T) - \mathbf{L}_T \circ (\cos(\theta_T/2) + \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2)) \circ (a_4 \mathbf{i}_1 + a_5 \mathbf{i}_2 + a_6 \mathbf{i}_3) = 0, \quad (\text{П. 4})$$

$$\rho_0 + a_2(w_{T2} \sin \theta_T - w_{T3} \cos \theta_T) + a_3(w_{T2} \cos \theta_T + w_{T3} \sin \theta_T) + a_4[F_0 \cos(\theta_T/2) - F_1 \sin(\theta_T/2)]/2 + a_5[F_3 \cos(\theta_T/2) - F_2 \sin(\theta_T/2)]/2 - a_6[F_2 \cos(\theta_T/2) + F_3 \sin(\theta_T/2)]/2 = 0. \quad (\text{П. 5})$$

Исключим из полученных условий трансверсальности множители Лагранжа a_k ($k = \overline{1, 6}$). Из условий (П. 3) имеем

$$a_1 = -\varphi_1, \quad a_2 = -\varphi_2, \quad a_3 = -\varphi_3. \quad (\text{П. 6})$$

Учитывая (3.9), (П. 4) перепишем в виде

$$(a_4 \mathbf{i}_1 + a_5 \mathbf{i}_2 + a_6 \mathbf{i}_3) = \tilde{\Lambda}(T) \circ \psi(T).$$

Поскольку в левой части равенства стоит кватернион с нулевой скалярной частью (вектор), то

$$\text{scal}(\tilde{\Lambda}(T) \circ \psi(T)) = 0,$$

$$(a_4 \mathbf{i}_1 + a_5 \mathbf{i}_2 + a_6 \mathbf{i}_3) = \text{vect}(\tilde{\Lambda}(T) \circ \psi(T)). \quad (\text{П. 7})$$

Таким образом, имеем первое условие трансверсальности, не содержащее неизвестных констант. Запишем его в кватернионной и скалярной формах:

$$\text{scal}(\tilde{\Lambda}(T) \circ \psi(T)) = 0 \quad (\text{П. 8})$$

или (П.8)

$$\lambda_0(T) \psi_0(T) + \lambda_1(T) \psi_1(T) + \lambda_2(T) \psi_2(T) + \lambda_3(T) \psi_3(T) = 0.$$

Используя соотношения (3.1), (3.9), (3.10), (П. 7), а также выражения для первой компоненты вектора \mathbf{p} (4.3) $p_1 = \psi_1 \lambda_0 - \psi_0 \lambda_1 + \psi_2 \lambda_3 - \psi_3 \lambda_2$, второе условие трансверсальности (П. 5) преобразуем в выражение

$$\rho_0 + p_1(T)/2 + \varphi_2(T) \omega_3(T) - \varphi_3(T) \omega_2(T) = 0. \quad (\text{П. 9})$$

Таким образом, условия трансверсальности, связывающие основные фазовые и сопряженные переменные задачи (3.11)—(3.17) (исключена переменная θ), представляются выражениями (П. 8), (П. 9).

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225—233.
3. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 6. С. 1235—1238.
4. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352—360.
5. Сиротин А. Н. Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 36—46.
6. Сиротин А. Н. Об оптимальной по быстродействию пространственной переориентации в положение покоя вращающегося сферически-симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 18—27.
7. Левский М. В. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144—157.
8. Левский М. В. Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7—24.
9. Молоденков А. В. Кватернионное решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота твердого тела // Проблемы механики и управления. Сб. научн. трудов. Пермь: ПГУ, 1995. С. 122—131.
10. Молоденков А. В. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного космического аппарата для одного частного случая // Сб. тр. 6-й Междунар. конф. "Системный анализ и управление космическими комплексами". Крым, Евпатория. М.: МАИ, 2001. С. 42.
11. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметрично-

го космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 167—176.

12. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Алгоритм оптимально-го по быстрдействию разворота космического аппарата в классе конических движений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 10. С. 66—70.

13. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Алгоритм оптимально-го в смысле комбинированного функционала разворота космического аппарата в классе конических движений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 67—72.

14. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Алгоритм оптимально-го по энергии разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Том 16. № 8. С. 536—544.

15. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

16. Челноков Ю. Н. Об осцилляторном и ротационном движениях одного класса механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 28—35.

17. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 90—105.

18. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 384 с.

19. Li F., Bainum P. M. Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Contr., and Dynamics. 1990. V. 13. № 1. P. 38—45.

20. Зелукина О. В., Челноков Ю. Н. Кватернионное решение задач управления угловым движением динамически симметричного космического аппарата // Сб. тр. Междунар. конф. "Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении". Саратов: ИПТМУ РАН, 2002. С. 180—188.

Algorithm of the Optimal in the Sense of Minimum of Energy Loss Turn of an Axially Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motions

Ya. G. Sapunkov, iptmuran@san.ru✉, A. V. Molodenkov, iptmuran@san.ru,
Precision Mechanics and Control Problems Institute of RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: Molodenkov A. V., Ph. D., Senior Researcher,
Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Precision Mechanics
and Control Problems Institute, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation,
e-mail: iptmuran@san.ru

Received on July 05, 2016

Accepted on July 1, 2016

The problem of the optimal turn in the sense of minimum of energy loss of a spacecraft as a rigid body with one axis of symmetry is considered in the quaternion statement. For simplifying problem (concerning dynamic Euler equations), we change the variables reducing the original optimal turn problem of axially symmetric spacecraft to the problem of optimal turn of the rigid body with spherical mass distribution including one new scalar equation. Using the Pontryagin maximum principle, a new analytical solution of this problem in the class of conical motions is obtained. Algorithm of the optimal turn of a spacecraft is given. An explicit expression for the constant in magnitude optimal angular velocity vector of a spacecraft is found. The motion trajectory of a spacecraft is regular precession. The conditions for the initial and terminal values of a spacecraft angular velocity vector are formulated, which make it possible to solve the problem analytically in the class of conical motions. The initial and the terminal vectors of spacecraft angular velocity must be on the conical surface generated by arbitrary given constant conditions of the problem. The numerical example is presented. The example contain reorientation of the Space Shuttle in the class of conical motions.

Keywords: optimal control, spacecraft, axially symmetric rigid body, conical motion

For citation:

Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Algorithm of the Optimal in the Sense of Minimum of Energy Loss Turn of an Axially Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motions, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 134—143.

DOI: 10.17587/mau.18.134-143

References

1. Branets V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachax orientacii tverdogo tela* (The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies), Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).

2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers, *J. guidance, control, and dynamics*, 1994, vol. 17. N. 2. P. 225—233.

3. Petrov B. N., Bodner V. A., Alekseev K. B. *Analiticheskoe reshenie zadachi upravleniya prostranstvennym povorotnym manevrom* (Analytical Solution of the Spatial Slew Manuever), *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970, vol. 192, no. 6, pp. 1235—1238 (in Russian).

4. Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V. *Optimal'nyj razvorot tverdogo tela s odnoj osyu simmetrii* (Optimal Slew of a Solid

Body with a Single Symmetry Axis), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, vol. 22, no. 3, pp. 352—360 (in Russian).

5. Sirotin A. N. *Optimal'noe upravlenie pereorientaciej simmetrichnogo tverdogo tela iz polozheniya pokoya v polozhenie pokoya* (Optimal Reorientation of a Symmetric Solid Body from a State of Rest to Another State of Rest), *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1989, no. 1, pp. 36—46 (in Russian).

6. Sirotin A. N. *Ob optimal'noj po bystrodejstviyu prostranstvennoj pereorientacii v polozhenie pokoya vrashhayushhegosya sfericheski-simmetrichnogo tverdogo tela* (On the Time-Optimal Spatial Reorientation of a Rotating Spherically Symmetric Solid Body to a State of Rest), *Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1997, no. 3, pp. 18—27 (in Russian).

7. Levskij M. V. *Primenenie principa maksimuma L. S. Pontryagina k zadacham optimal'nogo upravleniya orientaciej kosmicheskogo apparata* (Pontryagin's Maximum Principle in Optimal Control Problems of Orientation of a Spacecraft), *Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2008, no. 6, pp. 144—157 (in Russian).

8. Levskij M. V. *Sintez optimal'nogo upravleniya terminal'noj orientacii kosmicheskogo apparata s ispolzovaniem metoda kvaternionov* (Synthesis of Optimal Control of Spacecraft Terminal Orientation Using the Quaternion Method), *Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2009, no. 2, pp. 7—24 (in Russian).

9. **Molodencov A. V.** *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo v smysle minimuma energeticheskikh zatrat razvorota tverdogo tela* (Quaternion-Based Solution of the Energy Optimal Slew of a Solid Body), in *Collected Papers "Problems of Mechanics and Control"*, Perm Gos. Univ., Perm, 1995, pp. 122–131 (in Russian).

10. **Molodencov A. V.** *Solution of the Optimal Slew Problem for a Spherically Symmetric Spacecraft for a Specific Case* (Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota sfericheski simetrichnogo kosmicheskogo apparata dlya odnogo chastnogo sluchaya), in *Proc. of 6-th Int. Conf. on System Analysis and Control of Space Systems*, Evpatoriya, Ukraine, Moscow Institute of Aviation, Moscow, 2001, p. 42 (in Russian).

11. **Molodencov A. V., Sapunkov Ya. G.** *Analiticheskoe reshenie zadachi optimal'nogo razvorota sfericheski-simmetrichnogo kosmicheskogo apparata v klasse konicheskikh dvizhenij* (Analytical Solution of the Optimal Slew Problem of a Spherically Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motion), *Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2013, no. 2, pp. 167–176 (in Russian).

12. **Sapunkov Ya. G., Molodencov A. V.** *Algoritm optimal'nogo po bystrodejstviyu razvorota kosmicheskogo apparata v klasse konicheskikh dvizhenij* (Solution of the Problem of the Time-Optimal Turn of a Spacecraft in the Class of Conical Motion), *Mexatronika, Avtomatizaciya, Upravlenie*, 2013, no. 10, pp. 66–70 (in Russian).

13. **Sapunkov Ya. G., Molodencov A. V.** *Algoritm optimal'nogo v smysle kombinirovannogo funkcionala razvorota kosmicheskogo apparata v klasse konicheskikh dvizhenij* (Algorithm of the Optimal in the Sense of Combined Functional Turn of a Spacecraft in the Class of Conical Motion), *Mexatronika, Avtomatizaciya, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 67–72 (in Russian).

14. **Sapunkov Ya. G., Molodencov A. V.** *Algoritm optimal'nogo po energii razvorota kosmicheskogo apparata pri proizvol'nykh granichnykh usloviyax* (Algorithm for the Optimal Turn of a Spacecraft in the

Sense of Minimal Energy Loss under Arbitrary Boundary Conditions), *Mexatronika, Avtomatizaciya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 8, pp. 536–544 (in Russian).

15. **Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N.** *Upravlenie kolebaniyami* (Control of Oscillations), Moscow, Nauka, 1980. 383 p. (in Russian).

16. **Chelnokov Yu. N.** *Ob oscillyatornom i rotacionnom dvigenii odnogo klassa mehanicheskikh sistem* (About Oscillator and Rotational Motion of the One Class of Mechanic System), *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*. 1989, no. 1, pp. 28–35 (in Russian).

17. **Molodencov A. V., Sapunkov Ya. G.** *Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota ose-simmetrichnogo kosmicheskogo apparata s ogranichennym i impulsnym upravleniem pri proizvol'nykh granichnykh usloviyax* (A Solution of the Optimal Turn Problem of an Axially Symmetric Spacecraft with Bounded and Pulse Control under Arbitrary Boundary Conditions), *Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2007, no. 2, pp. 90–105 (in Russian).

18. **Pontryagin L. S., Boltyanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* (The Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow, Nauka, 1961. 384 p. (in Russian).

19. **Li F., Bainum P. M.** Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, no. 1, pp. 38–45.

20. **Zelepukina O. V., Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnoe reshenie zadach upravleniya uglovym dvizheniem dinamicheski simmetrichnogo kosmicheskogo apparata* (Quaternion Solution of Control Problems of Angular Motion of Dynamically Symmetric Spacecraft), in *Proc. of Int. Conf. of Problems and Perspectives of Precision Mechanics, Precision Mech. and Cont. Problems. Inst., Rus. Acad. of Sci., Saratov*, 2002, p. 180–188 (in Russian).

29—31 мая 2017 г. в Санкт-Петербурге

на базе ГНЦ РФ АО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор" состоится



**XXIV Санкт-Петербургская Международная конференция
ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ
СИСТЕМАМ (МКИНС 2017)**



Председатель программного комитета —
Академик РАН, проф. **В. Г. Пешехонов**

Тематика конференции

- Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- Микромеханические датчики и системы на их основе
- Глобальные навигационные спутниковые системы
- Альтернативные навигационные системы и датчики
- Системы управления, наведения и их элементы
- Интегрированные системы навигации и управления движением

В рамках каждого направления рассматриваются:

схемы построения и конструктивные особенности; методы и алгоритмы; особенности разработки и применения для различных подвижных объектов и условий движения (аэрокосмические, морские, наземные, подземные); испытания и метрология.

Подробную информацию о конференции см. сайте:
<http://www.elektropribor.spb.ru/icins2017/rindex>