

3. Marino R., Tomei P. Nonlinear Control Systems Design, New York, Prentice-Hall, 1995.

4. Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. Control Theory from the Geometric Viewpoint, Berlin, Springer-Verlag, 2004.

5. Krasnoshetchenko V. I., Krischenko A. P. *Nelineinye sistemy: Geometricheskie metody analiza i sinteza* (Nonlinear Systems: Geometric Methods of Analysis and Synthesis), Moscow, Bauman State Technical University Press, 2005 (in Russian).

6. Vorotnikov V. I. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem po otosheniyu k chasti peremennykh* (Stability of Dynamical Systems with Respect to a Part of the Variables), Moscow, Nauka, 1991 (in Russian).

7. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998.

8. Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999.

9. Matyukhin V. I. *Upravlenie mekhanicheskimi sistemami* (Control of Mechanical Systems), Moscow, Fizmatlit, 2009 (in Russian).

10. Zubov V. I. Theorie de la Commande, Moscow, Mir, 1978.

11. Lurie A. I. Analytical Mechanics, Berlin, Springer-Verlag, 2002.

12. Filippov A. F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1988.

13. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511–561.

14. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes, New York, Interscience, 1962.

15. Vorotnikov V. I., Martyschenko Yu. G. On the Nonlinear Uniaxial Reorientation Problem for a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 9, pp. 1469–1480.

16. Vorotnikov V. I., Martyschenko Yu. G. On the Nonlinear Problem of Three-Axis Reorientation of a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Cosmic Research*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 372–378.

17. Vorotnikov V. I., Martyschenko Yu. G. *K probleme pereorientatsii trekh-rotornogo girostata pri nekontroliruemyykh vneshnikh pomekhakh* (To Problem of Three-Rotor Gyrostat Reorientation under Uncontrolled External Disturbances), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie* (Mechatronics, Automation, Control), 2016, vol. 17, no. 6, pp. 414–419 (in Russian).

УДК 621.518.52

DOI:10.17587/mau.18.7-21

В. В. Сизых¹, д-р техн. наук, проф., vszykh@yandex.ru,

Б. И. Шахтарин², д-р техн. наук, проф., shakhtarin@mail.ru, В. А. Шевцев¹, vshevtsev@inbox.ru,

¹Московский технологический университет (МИРЭА),

²Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Механизм срыва слежения в стохастических аналоговых системах фазовой автоподстройки первого и второго порядков*

На основе марковской модели фазовой автоподстройки частоты проведено исследование апостериорных характеристик входного широкополосного шума в процессе срыва слежения в аналоговой системе фазовой автоподстройки частоты. Показано, что срыв слежения вызван маловероятным событием — наличием продолжительного отрезка времени, на котором случайный процесс, описывающий шум, преимущественно сохраняет знак. Представлена математическая модель наиболее вероятных траекторий процесса срыва слежения в аналоговых стохастических системах фазовой автоподстройки первого и второго порядков в виде обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния системы. Показана эквивалентность подходов к нахождению наиболее вероятных траекторий срыва слежения на основе поиска максимума совместной плотности распределения вероятностей координат точек траектории и решения вариационной задачи. Представлена модель аномального шума, связанного с наличием срывов слежения. Предложена приближенная формула для описания спектральной плотности мощности аномального шума. Исследован процесс срыва слежения в системе фазовой автоподстройки с нелинейным звеном в петле обратной связи. Показано, что такие системы имеют улучшенные характеристики времени до срыва слежения по сравнению с традиционными. Предложено объяснение увеличения времени до срыва слежения при использовании нелинейного элемента в петле обратной связи. Предложены подходы к выбору вида нелинейности. Приведены данные для среднего времени до срыва слежения при различных видах нелинейности и параметрах системы автоподстройки.

Ключевые слова: фазовая автоподстройка частоты, срыв слежения, аномальный шум, фазовая ошибка, нелинейный элемент

Введение

В статье описан механизм срыва слежения в аналоговых системах фазовой автоподстройки (ФАП) первого и второго порядков при наличии широкополосного шума на входе.

В стохастических системах радиоавтоматики со счетным числом устойчивых точек равновесия (устойчивые фокусы на фазовой плоскости системы),

* Работа выполнена в рамках проекта № 1776 по заданию № 8.1776.2014/К на выполнение НИР в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России (научный руководитель Б. И. Шахтарин).

к которым, в частности, относятся системы ФАП, под срывом слежения понимается переход системы из окрестности одного состояния равновесия в окрестность другого состояния равновесия. При этом, что характерно для ФАП, достаточно часто переход осуществляется не между соседними точками равновесия, т.е. во время срыва слежения может происходить приращение ошибки слежения по фазе на величину $2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Различные аспекты анализа вероятностных характеристик времени до срыва слежения в подобных системах рассматривались в большом числе работ, например, в работах [1–8]. Характеристики

времени до срыва слежения являются наиболее важными, так как при наличии таких срывов возникают аномальные фазовые ошибки, обусловленные достаточно быстрым "ступенчатым" изменением фазовой ошибки на величину, близкую к $2\pi k$. При этом явлении характерно изменение во времени производной фазовой ошибки (ошибки по частоте) в форме относительно короткого ярко выраженного импульса. Известны различные модели данного явления, например, модель Райса. Исследование одной из таких моделей приведено в работе [1]. Однако эти модели носят описательный характер, не вскрывая особенности поведения случайного шума на входе ФАП, приводящего к срыву слежения. Например, не исследовался вопрос: является ли срыв слежения результатом кратковременного выброса шума с большим абсолютным значением или это относительно продолжительное действие шума, имеющего однополярные значения? Исследовав механизм этого явления, рассмотрев характерные траектории движения системы на фазовой плоскости, можно в дальнейшем предложить способы увеличения среднего времени до срыва слежения.

1. Срыв системы фазовой автоподстройки частоты первого порядка

Поставим перед собой задачу найти наиболее вероятную траекторию срыва слежения системы ФАП первого порядка. Срывом слежения будем считать состояние системы, при котором фазовая ошибка x достигает заданной границы, например ближайшего состояния неустойчивого равновесия. Дифференциальное уравнение, описывающее работу системы ФАП первого порядка при воздействии шума, имеет стандартный вид в форме Ланжевена [2]:

$$\frac{dx}{dt} = \beta - \sin x + \sqrt{\frac{2}{r}} n(t) \quad (1)$$

или в форме стохастического дифференциального уравнения (ДУ)

$$dx = (\beta - \sin x)dt + \sqrt{\frac{2}{r}} d\omega_t(t), \quad (2)$$

где x — фазовая ошибка; β — начальная расстройка по частоте между сигналом управляемого генератора и полезным входным сигналом; r — отношение сигнал/шум в линеаризованной системе; $n(t)$ — стандартный белый шум (с единичной математической спектральной плотностью мощности); ω_t — стандартный винеровский случайный процесс.

Устойчивые состояния равновесия системы (2) находятся в точках $x_k = \arcsin\beta + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а неустойчивые — в точках $x_m = \pi m + \arcsin\beta$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Воспользовавшись методом Эйлера численного решения стохастических ДУ, перейдем от диффе-

ренциального уравнения в непрерывном времени (2) к уравнению в дискретном времени:

$$x_i = x_{i-1} + \beta\Delta t - \sin x_{i-1}\Delta t + \sqrt{\frac{2\Delta t}{r}} n_i, \quad (3)$$

где n_i — отсчеты стандартного (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией) дискретного белого гауссовского шума; x_i — значение фазовой ошибки в момент времени $t_i = i\Delta t$, Δt — шаг дискретизации.

Будем считать, что в начальный момент случайный процесс, заданный уравнением (3), находится в точке устойчивого равновесия $x_0 = \arcsin\beta$ и за N шагов достигает ближайшего неустойчивого положения равновесия $x_N = \arcsin\beta + \pi$, т.е. пусть за N шагов произойдет срыв слежения. Найдем совместную плотность распределения вероятностей (ПРВ) значений данного случайного процесса за N шагов $W_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_N | x_0)$. Учитывая, что x_i является марковской последовательностью, совместную ПРВ с учетом (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & W_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_N | x_0) = \\ & = W_{X_N | X_{N-1}}(x_N | x_{N-1}) W_{X_{N-1} | X_{N-2}}(x_{N-1} | x_{N-2}) \dots \\ & \dots W_{X_2 | X_1}(x_2 | x_1) W_{X_1}(x_1 | x_0) = \\ & = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^N \frac{[x_i - m_i]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $m_i = x_{i-1} + \beta\Delta t - \sin x_{i-1}\Delta t$; $\sigma^2 = 2\Delta t/r$.

Наиболее вероятная траектория срыва слежения соответствует тем значениям x_i , $i = \overline{1, N}$, при которых ПРВ (4) достигает максимального значения. Заметим, что ПРВ (4) имеет наибольшее значение, когда слагаемое в показателе экспоненты минимально, поэтому найдем значения x_i , $i = \overline{1, N}$, при которых

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{[x_i - m_i]^2}{2\sigma^2} = \\ & = \frac{r}{4} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} - \beta + \sin x_{i-1} \right]^2 \Delta t \rightarrow \min. \quad (5) \end{aligned}$$

Множитель $r/4$ не влияет на положение точки максимума ПРВ, поэтому его можно опустить. Чтобы найти максимум ПРВ, продифференцируем сумму (5) по всем аргументам и приравняем частные производные к нулю:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} - \beta + \sin x_{i-1} \right]^2 \Delta t = \\ & = 2 \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} - \beta + \sin x_{i-1} \right] + \\ & + 2 \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - \beta + \sin x_i \right] [-1 + \cos x_i \Delta t] = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем это выражение и разделим его правую и левую часть на Δt :

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} + \frac{\sin x_i - \sin x_{i-1}}{\Delta t} - \frac{x_{i+1} \cos x_i - x_i \cos x_i}{\Delta t} + \beta \cos x_i - \frac{1}{2} \sin 2x_i = 0. \quad (6)$$

Перейдем в соотношении (6) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и найдем обыкновенное ДУ, решением которого является наиболее вероятная траектория движения системы ФАП первого порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0. \quad (7)$$

В целях анализа наиболее вероятной траектории срыва слежения за время T для уравнения (7) необходимо рассматривать краевую задачу: $x(0) = \arcsin \beta$; $x(T) = \arcsin \beta + \pi$. В частном случае $\beta = 0$ имеем $x(0) = 0$; $x(T) = \pi$. Так как мы ставили перед собой задачу поиска наиболее вероятной траектории срыва, то время T должно равняться наиболее вероятному времени работы ФАП до срыва.

Уравнение (7) можно получить и вариационным способом. Перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, в результате выражение (5) преобразуется в интеграл

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} - \beta + \sin x_{i-1} \right]^2 \Delta t = \int_0^T [\dot{x} - \beta + \sin x]^2 dt, \quad (8)$$

где $N = T/\Delta t$.

Таким образом, получили, что наиболее вероятная траектория срыва слежения является такой функцией $x(t)$, при которой интеграл (8) принимает наименьшее значение. Для выполнения этого условия нужно минимизировать функционал

$$\int_0^T F(\dot{x}, x, t) dt = \int_0^T [\dot{x} - \beta + \sin x]^2 dt. \quad (9)$$

Траектория срыва, при которой функционал (9) принимает наименьшее значение, находится по формуле Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0.$$

После вычисления частных производных, входящих в это уравнение, и упрощений получаем дифференциальное уравнение (7).

Интересно отметить, что мы также приходим к интегралу (9), решая следующую задачу. Будем рассматривать слагаемое с шумом $\sqrt{\frac{2}{r}} n(t)$ как некоторое воздействие, которое за время T переводит систему

из точки устойчивого равновесия в точку ближайшего неустойчивого равновесия. Найдем такую траекторию перехода между двумя этими точками, т. е. такую траекторию срыва ФАП, при которой энергия воздействия будет наименьшей. Выражение для энергии $n(t)$ найдем из уравнения (1):

$$E = \int_0^T \frac{2}{r} n^2(t) dt = \int_0^T [\dot{x} - \beta + \sin x]^2 dt.$$

Таким образом, получили, что наиболее вероятная траектория срыва соответствует такой траектории срыва, при которой энергия шума будет минимальной.

2. Наиболее вероятная траектория срыва ФАП второго порядка с пропорционально-интегрирующим фильтром

Найдем дифференциальное уравнение, описывающее наиболее вероятную траекторию срыва ФАП второго порядка с пропорционально-интегрирующим фильтром (ПИФ). Система стохастических дифференциальных уравнений, описывающих работу ФАП с ПИФ, имеет вид [2]

$$\begin{aligned} dy &= -\alpha_0^2 [y + (1-a)(\sin x - \beta)] dt + \sqrt{\frac{2}{r}} \alpha_0^2 (1-a) d\omega_y; \\ dx &= [y - a(\sin x - \beta)] dt + \sqrt{\frac{2}{r}} a d\omega_x, \end{aligned} \quad (10)$$

где α_0^2 — величина, обратная постоянной времени фильтра; a — коэффициент пропорциональности между постоянными времени фильтра. В данном случае будем считать, что произошел срыв слежения, если точка на фазовой плоскости системы (10) достигла сепаратрисы.

Решая систему (10) методом Эйлера, получим

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} - \alpha_0^2 [y_{i-1} + (1-a)(\sin x_{i-1} - \beta)] \Delta t + \\ &+ \sqrt{\frac{2\Delta t}{r}} \alpha_0^2 (1-a) n_i; \end{aligned} \quad (11)$$

$$x_i = x_{i-1} + [y_{i-1} - a(\sin x_{i-1} - \beta)] \Delta t + \sqrt{\frac{2\Delta t}{r}} a n_i,$$

где n_i — отсчеты стандартного дискретного белого гауссовского шума.

Как и ранее, будем считать, что в начальный момент случайный процесс, заданный системой (11), находится в точке устойчивого равновесия (x_0, y_0) и за N шагов достигает точки на сепаратрисе с координатами (x_N, y_N) . Найдем совместную ПРВ координат траектории движения при переходе из состояния (x_0, y_0) в состояние (x_N, y_N) $W(x_N, y_N, x_{N-1}, y_{N-1}, \dots, x_1, y_1 | x_0, y_0)$.

Из соотношения (11) найдем условные математические ожидания и дисперсии y_i и x_i , а также коэф-

коэффициент корреляции, при условии что x_{i-1} и y_{i-1} имеют фиксированные значения:

$$\begin{aligned} m_{y_i|x_{i-1};y_{i-1}} &= \\ &= y_{i-1} - \alpha_0^2 [y_{i-1} + (1-a)(\sin x_{i-1} - \beta)]\Delta t; \\ m_{x_i|x_{i-1};y_{i-1}} &= x_{i-1} + [y_{i-1} - a(\sin x_{i-1} - \beta)]\Delta t; \\ \sigma_{y_i|x_{i-1};y_{i-1}}^2 &= \frac{2\Delta t}{r} \alpha_0^4 (1-a)^2; \\ \sigma_{x_i|x_{i-1};y_{i-1}}^2 &= \frac{2\Delta t}{r} a^2; \\ \rho_{x_i y_i|x_{i-1};y_{i-1}} &= 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя свойство марковости случайной последовательности (11), совместную ПРВ можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(x_N, y_N, x_{N-1}, y_{N-1}, \dots, x_1, y_1 | x_0, y_0) &= \\ &= \prod_{i=1}^N W(x_i, y_i | x_{i-1}, y_{i-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим отдельный множитель, входящий в произведение (13). По правилу умножения вероятностей имеем

$$\begin{aligned} W(x_i, y_i | x_{i-1}, y_{i-1}) &= \\ &= W(y_i | x_{i-1}, y_{i-1}) W(x_i | y_i, x_{i-1}, y_{i-1}). \end{aligned}$$

Так как случайные величины x_i и y_i суть линейное преобразование нормальной случайной величины n_i , то они являются нормальными.

Условная плотность распределения вероятностей $W(y_i | x_{i-1}, y_{i-1})$ равна

$$\begin{aligned} W(y_i | x_{i-1}, y_{i-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_i|x_{i-1};y_{i-1}}^2}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{y_i|x_{i-1};y_{i-1}}^2} [y_i - m_{y_i|x_{i-1};y_{i-1}}]^2\right\} = \\ &= \sqrt{\frac{r}{4\pi\Delta t\alpha_0^4(1-a)^2}} \exp\left\{-\frac{r}{4\alpha_0^4(1-a)^2} \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \alpha_0^2 y_{i-1} + \alpha_0^2(1-a)(\sin x_{i-1} - \beta)\right]^2 \Delta t\right\}. \end{aligned}$$

Выражения для условных математического ожидания и дисперсии для нормального распределения известны и после преобразования с учетом (12) примут вид

$$\begin{aligned} m_{x_i|y_i, x_{i-1}, y_{i-1}} &= \\ &= m_{x_i|x_{i-1};y_{i-1}} + \rho \frac{\sigma_{x_i|x_{i-1};y_{i-1}}}{\sigma_{y_i|x_{i-1};y_{i-1}}} (y_i - m_{y_i|x_{i-1};y_{i-1}}) = \\ &= x_{i-1} + y_{i-1}\Delta t + \frac{a}{\alpha_0^2(1-a)} (y_i - y_{i-1} + \alpha_0^2 y_{i-1}\Delta t); \\ \sigma_{x_i|y_i, x_{i-1}, y_{i-1}}^2 &= (1 - \rho^2) \sigma_{x_i|x_{i-1};y_{i-1}}^2 = 0. \end{aligned}$$

Так как условная дисперсия $\sigma_{x_i|y_i, x_{i-1}, y_{i-1}}^2$ равна нулю, имеем

$$W(x_i | y_i, x_{i-1}, y_{i-1}) = \delta(x_i - m_{x_i|y_i, x_{i-1}, y_{i-1}}),$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака.

Тогда совместную ПРВ (13) координат траектории срыва можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(x_N, y_N, \dots, x_1, y_1 | x_0, y_0) &= \\ &= \prod_{i=1}^N W(y_i | x_{i-1}, y_{i-1}) W(x_i | y_i, x_{i-1}, y_{i-1}) = \\ &= \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{r}{4\pi\Delta t\alpha_0^4(1-a)^2}} \delta(x_i - m_{x_i|y_i, x_{i-1}, y_{i-1}}) \times \\ &\times \exp\left\{\frac{r}{4\alpha_0^4(1-a)^2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} + \alpha_0^2 y_{i-1} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \alpha_0^2(1-a)(\sin x_{i-1} - \beta)\right]^2 \Delta t\right\}. \end{aligned}$$

Так как в данное выражение входит произведение функций Дирака, то совместная ПРВ не равна нулю только при условии

$$x_i = m_{x_i|y_i, x_{i-1}, y_{i-1}} \quad \text{при } i = \overline{1, N},$$

или

$$x_i = x_{i-1} + y_{i-1}\Delta t + \frac{a}{\alpha_0^2(1-a)} (y_i - y_{i-1} + \alpha_0^2 y_{i-1}\Delta t).$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\alpha_0^2(1-a) \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} - \alpha_0^2 y_{i-1} = a \frac{y_{i-1} - y_i}{\Delta t}. \quad (14)$$

Как и для ФАП первого порядка, наиболее вероятная траектория срыва слежения соответствует тем значениям $x_i, y_i, i = \overline{1, N}$, при которых совместная ПРВ (13) достигает максимального значения. Совместная ПРВ достигает максимума, когда минимальна сумма в показателе экспоненты

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} + \alpha_0^2 y_{i-1} + \right. \\ \left. + \alpha_0^2(1-a)(\sin x_{i-1} - \beta)\right]^2 \Delta t \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя в соотношениях (14) и (15) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем, что для нахождения наиболее вероятной траектории срыва ФАП нужно найти минимум функционала

$$\begin{aligned} &\int_0^T F(\dot{y}, y, \dot{x}, x, t) dt = \\ &= \int_0^T [\dot{y} + \alpha_0^2 y + \alpha_0^2(1-a)(\sin x - \beta)]^2 dt \end{aligned} \quad (16)$$

при условии

$$\alpha_0^2(1-a)\dot{x} - \alpha_0^2y - \dot{y}a = 0. \quad (17)$$

Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Умножим условие (17) на множитель Лагранжа $\lambda(t)$ и прибавим к $F(\dot{y}, y, \dot{x}, x, t)$. В результате получим новый функционал

$$\int_0^T G(\dot{y}, y, \dot{x}, x, t)dt = \int_0^T F(\dot{y}, y, \dot{x}, x, t) + \lambda(t)[\alpha_0^2(1-a)\dot{x} - \alpha_0^2y - \dot{y}a]dt. \quad (18)$$

Чтобы получить наиболее вероятную траекторию срыва, нужно найти минимум функционала (18), решая систему

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} = 0.$$

В результате получаем систему из трех обыкновенных ДУ:

$$\dot{x} = \frac{1}{\alpha_0^2(1-a)} [\alpha_0^2y + a\dot{y}];$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2[\dot{y} + \alpha_0^2y + \alpha_0^2(1-a)(\sin x - \beta)]\cos x; \quad (19)$$

$$\ddot{y} = \alpha_0^2y + \alpha_0^4(1-a)(\sin x - \beta) - \alpha_0^2(1-a)\dot{x}\cos x + \frac{a}{2}\dot{\lambda}(t) - \frac{\alpha_0^2}{2}\lambda(t).$$

Преобразуем систему (19) с учетом (10) и в итоге получим систему дифференциальных уравнений, решением которой является наиболее вероятная траектория срыва ФАП второго порядка с пропорционально-интегрирующим фильтром

$$\dot{x} = \frac{1}{\alpha_0^2(1-a)} [\alpha_0^2y + a\dot{y}];$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2[\dot{y} + \alpha_0^2y + \alpha_0^2(1-a)(\sin x - \beta)]\cos x; \quad (20)$$

$$\ddot{y} = \alpha_0^4y + \alpha_0^4(1-a)(\sin x - \beta) + \alpha_0^2(1-a)\cos x[asinx - \alpha\beta - y] - \frac{\alpha_0^2}{2}\lambda(t).$$

Наиболее вероятную траекторию срыва для ФАП второго порядка с интегрирующим фильтром находим из уравнений (20), приравнявая $a = 0$.

3. Наиболее вероятная траектория срыва ФАП второго порядка с вырожденным пропорционально-интегрирующим фильтром

Система стохастических дифференциальных уравнений, описывающих работу ФАП с вырожденным ПИФ, имеет вид [2]

$$dy = -\alpha_0^2 \sin x dt + \sqrt{\frac{2}{r}} \alpha_0^2 d\omega_t; \quad (21)$$

$$dx = [y - a \sin x] dt + \sqrt{\frac{2}{r}} a d\omega_t.$$

Повторив рассуждения, проведенные ранее для ФАП с ПИФ, получим, что для нахождения наиболее вероятной траектории срыва нужно найти минимум функционала

$$\int_0^T F(\dot{y}, y, \dot{x}, x) dt = \int_0^T [\dot{y} + \alpha_0^2 \sin x]^2 dt$$

при условии

$$\alpha_0^2 \dot{x} - \alpha_0^2 y - a \dot{y} = 0.$$

Воспользовавшись, как и в предыдущем пункте, методом Эйлера нахождения минимума функционала и методом неопределенных множителей Лагранжа, получим систему из трех дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = y + \frac{a}{\alpha_0^2} \dot{y};$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2[\dot{y} + \alpha_0^2 \sin x] \cos x; \quad (22)$$

$$\ddot{y} = \alpha_0^2 \cos x [a \sin x - y] - \frac{\alpha_0^2}{2} \lambda(t).$$

Для ФАП с ПИФ и вырожденным ПИФ для анализа срыва слежения следует рассматривать крайнюю задачу для обыкновенных ДУ (20) — для ФАП с ПИФ (или ИФ) и (22) — для ФАП с вырожденным ПИФ с граничными условиями вида $x(0) = x_0$; $y(0) = y_0$; $x(T) = x_c$; $y(T) = y_c$, где (x_0, y_0) — точка устойчивого состояния равновесия (при $\beta = 0$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$); (x_c, y_c) — точка на сепаратрисе, разделяющей области притяжения соседних устойчивых фокусов.

На рис. 1, а, б приведен пример зависимости фазовой ошибки и ошибки по частоте от времени для ФАП с ИФ при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$ и $\beta = 0$. Как видно из рис. 1, а, за данный промежуток времени происходит шесть срывов слежения. На рис. 2 и 3 приведено сравнение результатов имитационного моделирования срыва слежения в ФАП с ИФ с данными расчета наиболее вероятной траектории срыва слежения по формуле (20) при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $a = 0$; $\beta = 0$. В ходе имитационного моделирования

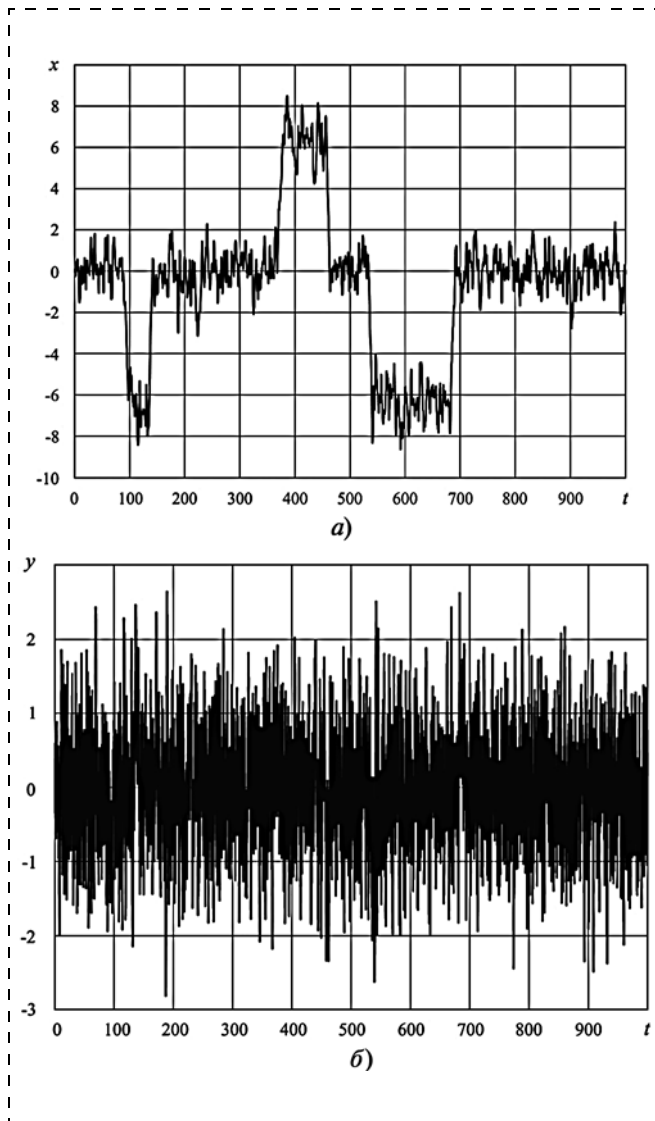


Рис. 1. Зависимость фазовой ошибки (а) и ошибки по частоте (б) от времени для ФАП с ИФ при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\beta = 0$

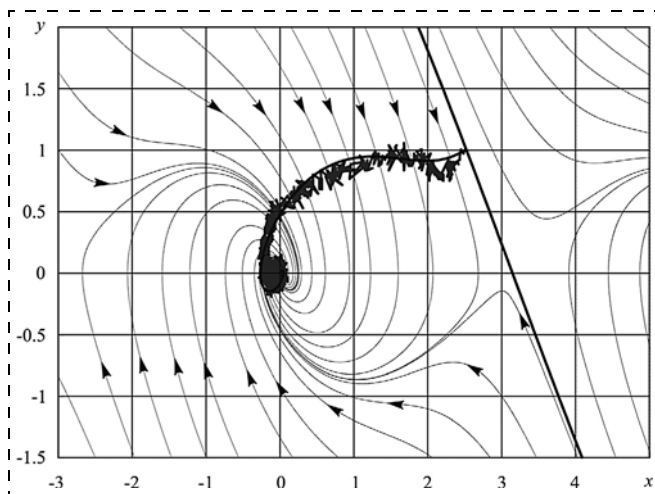


Рис. 2. Усредненная и наиболее вероятная траектории срыва слежения в ФАП с ИФ и на фазовой плоскости при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\beta = 0$

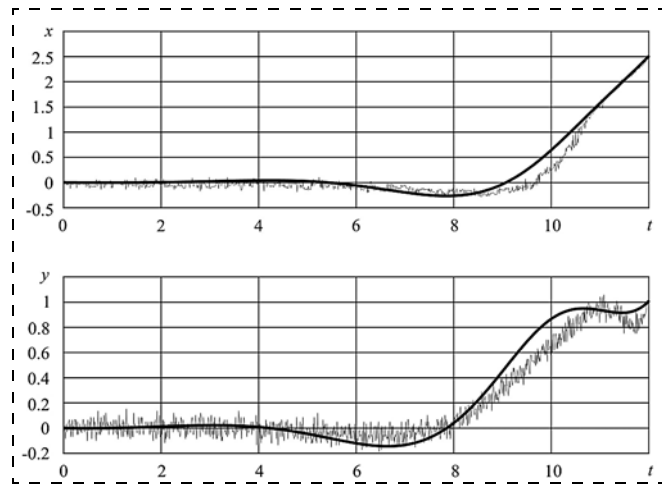


Рис. 3. Зависимости от времени усредненных и наиболее вероятных координат в пространстве состояний ФАП с ИФ при срыве слежения при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\beta = 0$

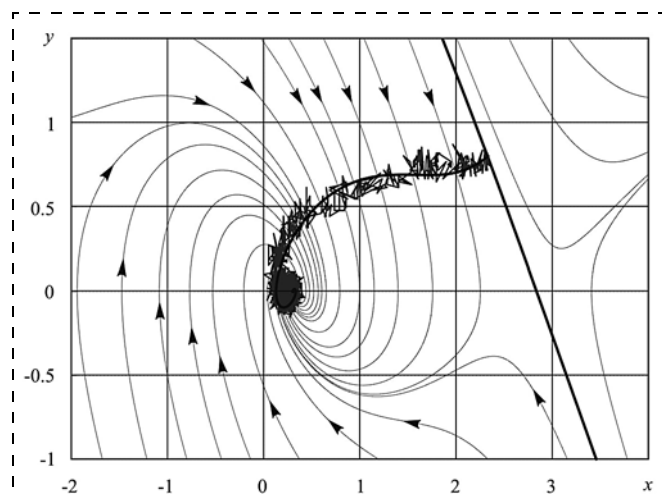


Рис. 4. Усредненная и наиболее вероятная траектории срыва слежения в ФАП с ИФ и на фазовой плоскости при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\beta = 0,3$

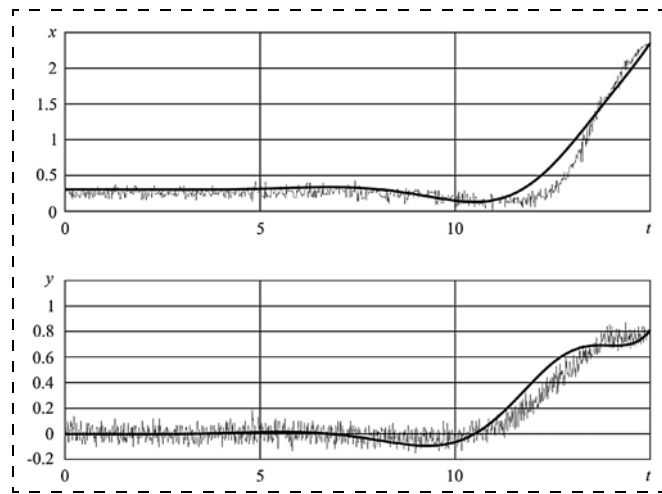


Рис. 5. Зависимости от времени усредненных и наиболее вероятных координат в пространстве состояний ФАП с ИФ при срыве слежения при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\beta = 0,3$

путем численного решения системы стохастических ДУ (10) отбрасывались траектории, не попадающие в заданную окрестность точки (x_c, y_c) на сепаратрисе, оставшиеся траектории усреднялись. На рис. 3 показано изменение соответствующих координат движения системы во времени. Для выбранного значения $\alpha_0^2 = 1$ свойственен колебательный характер движения в окрестности устойчивого достаточно хорошо выраженного фокуса, что видно из рисунка.

На рис. 4 и 5 приведено сравнение результатов имитационного моделирования срыва слежения в ФАП с ИФ с данными расчета наиболее вероятной траектории срыва слежения по формуле (20) при $\alpha_0^2 = 1; r = 2; \beta = 0,3$. При увеличении α_0^2 колебательный характер движения становится менее вы-

раженным (при $\alpha_0^2 \rightarrow \infty$ характеристики ФАП с ИФ стремятся к характеристикам системы первого порядка), это также наблюдается в поведении наиболее вероятной траектории срыва слежения.

На рис. 6 и 7 приведены данные соответствующих расчетов для ФАП с ПИФ (20) при параметрах $\alpha_0^2 = 0,3; r = 2; \beta = 0; a = 0,3$. На рис. 8 и 9 приведены результаты расчетов для ФАП с вырожденным ПИФ при параметрах $\alpha_0^2 = 0,5; r = 5; a = 0,5$. В последнем случае для вычисления наиболее вероятной траектории использована система ДУ (22).

Приведенные расчеты показывают достаточное для инженерных расчетов совпадение результатов расчетов наиболее вероятных траекторий по формулам (20) и (22).

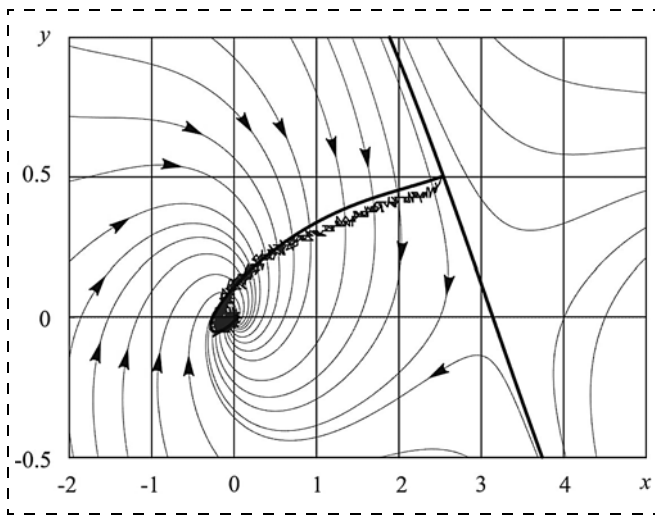


Рис. 6. Усредненная и наиболее вероятная траектории срыва слежения в ФАП с ПИФ и на фазовой плоскости при $\alpha_0^2 = 0,3; r = 2; \beta = 0; a = 0,3$

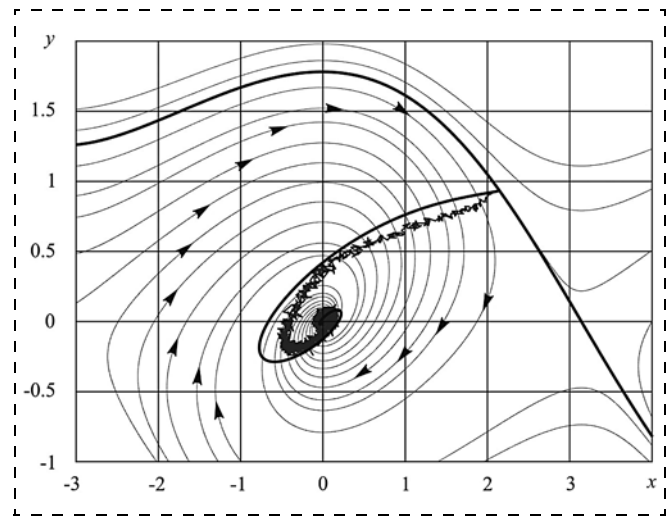


Рис. 8. Усредненная и наиболее вероятная траектории срыва слежения в ФАП с вырожденным ПИФ и на фазовой плоскости при $\alpha_0^2 = 0,5; r = 5; \beta = 0; a = 0,5$

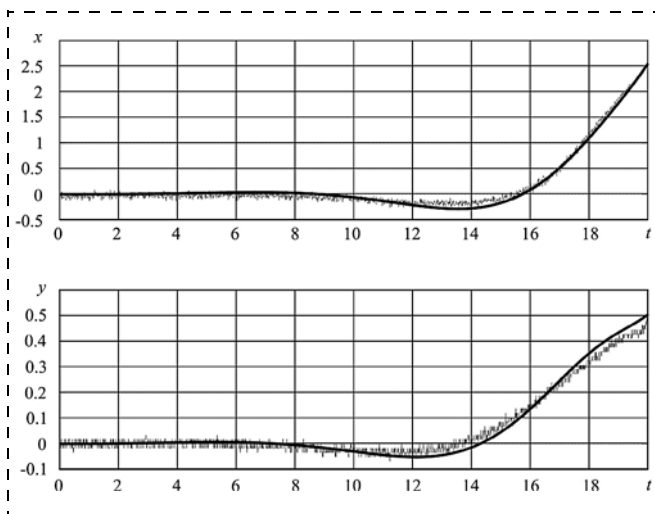


Рис. 7. Зависимости от времени усредненных и наиболее вероятных координат в пространстве состояний ФАП с ПИФ при срыве слежения при $\alpha_0^2 = 0,3; r = 2; \beta = 0; a = 0,3$

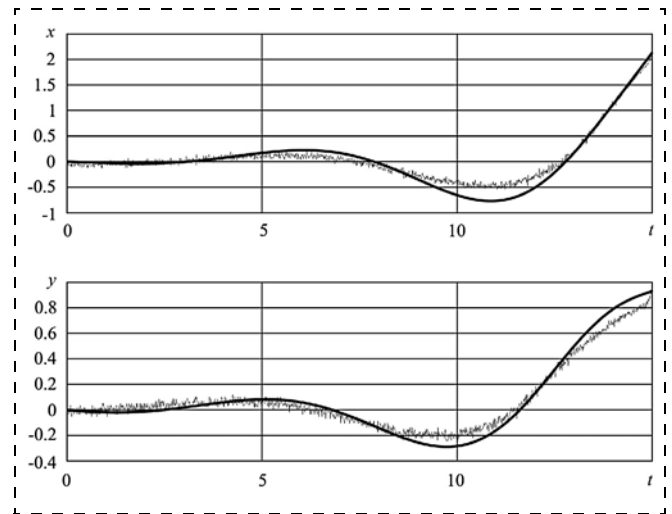


Рис. 9. Зависимости от времени усредненных и наиболее вероятных координат в пространстве состояний ФАП с вырожденным ПИФ при срыве слежения при $\alpha_0^2 = 0,5; r = 5; \beta = 0; a = 0,5$

Анализ шума на входе ФАП в момент срыва слежения (в сторону увеличения фазовой ошибки) на основании данных имитационного моделирования показывает, что значения отсчетов шума концентрируются в положительной области так, что на протяжении движения точки на фазовой плоскости к сепаратрисе координата $y(t)$ оказывается положительной. Поскольку для интегрирующего фильтра $y(t)$ имеет смысл производной фазовой ошибки (ошибки по частоте), то фазовая ошибка при этом возрастает. Траектория пересекает сепаратрису и концентрируется в окрестности новой точки равновесия системы.

Если модификацией алгоритма работы ФАП ограничить возможные значения координаты $y(t)$, то следует ожидать замедление времени движения к сепаратрисе вдоль оси x , что должно уменьшить вероятность события, заключающегося в нахождении в течение относительно длительного времени шума на входе в положительной области и, в результате, возможно увеличение среднего времени до срыва слежения.

4. Спектральная плотность мощности anomального шума

При приеме сигнала с частотной модуляцией часто применяется демодулятор с ФАП [9—11]. В этом случае основная трудность, возникающая при вычислении рабочей характеристики демодулятора, заключается в сложности расчета спектральной плотности мощности (СПМ) частотной ошибки (шума) на выходе фильтра демодулятора.

Проведем расчет СПМ шума для упрощенного случая линеаризованной модели ФАП с интегрирующим фильтром, полученной с помощью разложения нелинейных функций системы (10) в ряд Тейлора и отбрасывания всех членов выше первого порядка. Для простоты будем считать, что начальная расстройка между частотой сигнала и гетеродина $\beta = 0$, тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} dy &= -\alpha_0^2 [y + x]dt + \sqrt{\frac{2}{r}} \alpha_0^2 d\omega_i; \\ dx &= ydt. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя в первое, перейдем от системы уравнения к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = -\alpha_0^2 [\dot{x} + x] + \sqrt{\frac{2}{r}} \alpha_0^2 n(t), \quad (24)$$

где $n(t)$ — стандартный белый гауссовский шум с единичной СПМ. Из уравнения (24) легко получить СПМ фазовой ошибки

$$|S_x(i\omega)|^2 = \frac{2\alpha_0^4}{r[\omega^4 + \omega^2(\alpha_0^4 - 2\alpha_0^2) + \alpha_0^4]}.$$

Отсюда с учетом второго уравнения системы (23) находим СПМ частотной ошибки, т. е. СПМ шума на выходе фильтра демодулятора

$$|S_y(i\omega)|^2 = \frac{2\alpha_0^4 \omega^2}{r[\omega^4 + \omega^2(\alpha_0^4 - 2\alpha_0^2) + \alpha_0^4]}. \quad (25)$$

В работе [10] отмечалось, что шум на выходе фильтра демодулятора можно представить как сумму двух шумовых процессов: нормального шума, обусловленного колебанием ФАП вблизи положения устойчивого равновесия, и anomального шума, возникающего в результате срывов слежения. В линеаризованной модели ФАП существует единственное положение устойчивого равновесия, поэтому в ней не происходят срывы слежения и составляющая anomального шума отсутствует.

На рис. 10 представлено сравнение СПМ шума, полученной с помощью имитационного моделирования системы уравнений (10) ($a = 0, \beta = 0$)

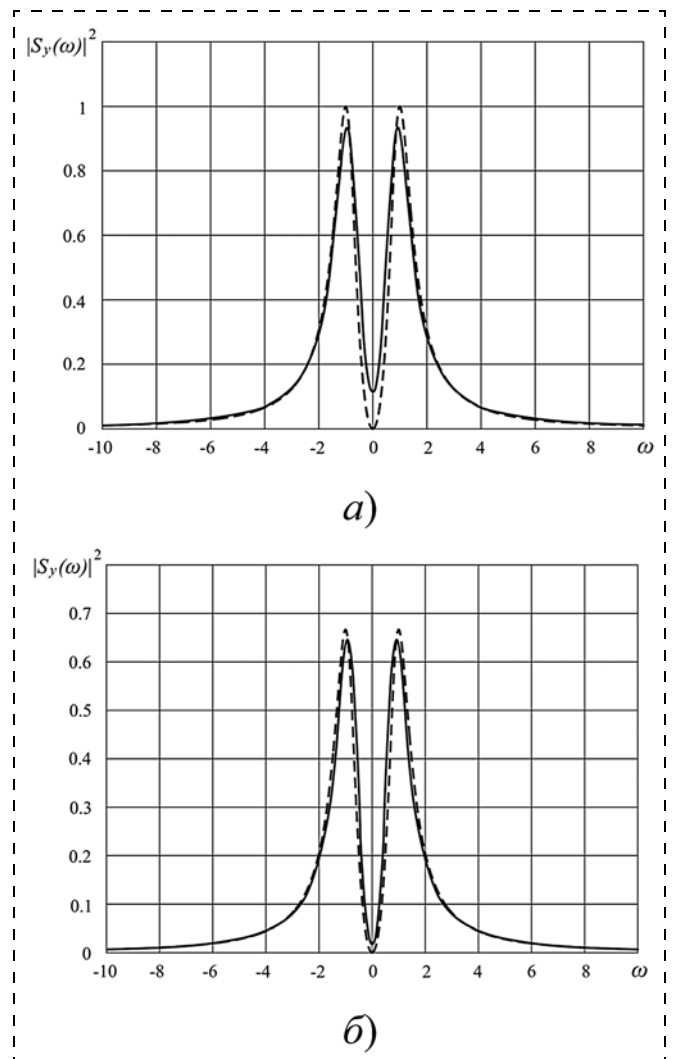


Рис. 10. Спектральная плотность мощности частотной ошибки при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$ (а) и $r = 3$ (б)

(сплошная кривая), с СПМ линеаризованной модели, найденной из уравнения (25) (штриховая кривая), при $\alpha_0^2 = 1$, $r = 2$ (а) и $r = 3$ (б).

Как видно из рис. 10, б, при $r = 3$ результаты достаточно хорошо совпадают между собой. Это связано с тем, что при больших значениях r возникновение срыва слежения является очень редким событием, поэтому аномальный шум можно не учитывать, так как мощность его мала. При уменьшении r составляющая аномального шума становится существенной, поэтому на рис. 10, а наблюдается некоторое расхождение результатов.

Ранее были предложены различные модели аномального шума. Например, в модели Райса [11] аномальный шум представляется в виде последовательности дельта-импульсов с периодом, равным среднему времени до срыва слежения, а в модели Хесса [12] в качестве аномального шума рассматривалась последовательность гауссовских импульсов. В этих моделях форму импульсов выбирали произвольно, руководствуясь соображениями удобства дальнейших вычислений.

Исходя из результатов, полученных ранее, предложим новую модель аномального шума. Выше нами была получена система ДУ (20), решением которой является наиболее вероятная траектория срыва слежения. Пользуясь данной системой, можно также найти наиболее вероятную траекторию перехода из одного состояния устойчивого равновесия в соседнее состояние устойчивого равновесия. Для этого следует рассматривать краевую задачу для системы ДУ (20) с граничными условиями вида $x(0) = x_1$; $y(0) = y_1$; $x(T) = x_2$; $y(T) = y_2$, где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — точки устойчивого состояния равновесия. Для ФАП с ИФ при $\beta = 0$ имеем $(x_1, y_1) = (0, 0)$ и $(x_2, y_2) = (2\pi, 0)$. В данном случае время T должно равняться наиболее вероятному времени перехода из одного состояния устойчивого равновесия в соседнее.

Зависимости фазовой и частотной ошибок от времени, полученные с помощью решения системы ДУ (20) при $a = 0$, $\beta = 0$, $\alpha_0^2 = 1$ с описанными ранее граничными условиями, приведены на рис. 11 (сплошные кривые). Таким образом, мы получили наиболее вероятную форму импульса частотной ошибки, который возникает при срыве слежения. Данный импульс возможно аппроксимировать двумя релейскими импульсами, заданными выражением

$$y_p(t) = \frac{\pi t}{D} e^{-\frac{t^2}{2D}} + \frac{\pi(T-t)}{D} e^{-\frac{(T-t)^2}{2D}}, \quad (26)$$

где $t \in [0, T]$;

$$D = \frac{0,4T}{\sqrt[3]{\alpha_0^2}}.$$

Проинтегрировав $y_p(t)$, получим аппроксимирующую формулу для фазовой ошибки:

$$x_p(t) = -e^{-\frac{t^2}{2D}} + e^{-\frac{(T-t)^2}{2D}} + \pi \left(1 - e^{-\frac{T^2}{2D}} \right). \quad (27)$$

Зависимости фазовой и частотной ошибок от времени, найденные с помощью выражений (27) и (26), также приведены на рис. 11 (штриховые кривые).

Таким образом, будем считать, что аномальный шум представляет собой последовательность импульсов, форма которых определяется выражением (26), длительность импульсов равна наиболее вероятному времени до срыва слежения, а период следования равен среднему времени до срыва слежения.

В этом случае СПМ аномального шума при $\alpha_0^2 = 1$ и $r = 2$ имеет вид, приведенный на рис. 12. На рис. 13 приведена СПМ частотной ошибки,

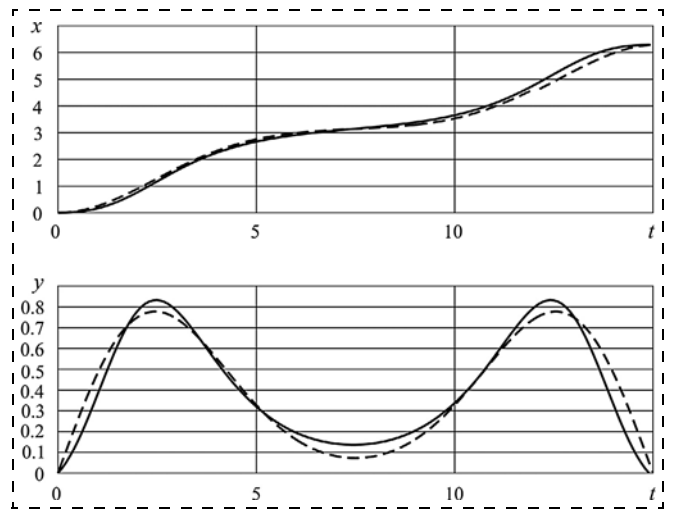


Рис. 11. Зависимости от времени наиболее вероятных координат в пространстве состояний ФАП с ИФ при переходе в соседнее состояние устойчивого равновесия при $\alpha_0^2 = 1$

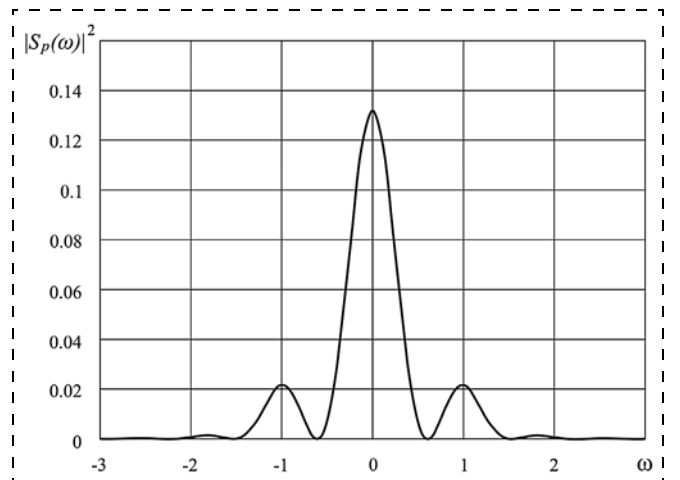


Рис. 12. Спектральная плотность мощности аномального шума ФАП с ИФ при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$

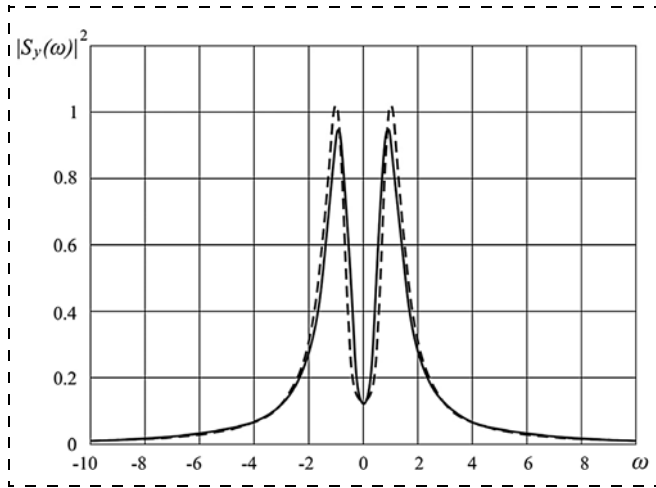


Рис. 13. Спектральная плотность мощности частотной ошибки ФАП с ИФ с учетом аномального шума при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$

полученная с помощью имитационного моделирования системы уравнений (10) (сплошная кривая), и сумма СПМ линеаризованной модели и СПМ аномального шума (штриховая кривая) при $\alpha_0^2 = 1$, $r = 2$. Как видно из рис. 13, при использовании предложенной модели получено хорошее совпадение теоретических и практических результатов.

5. Наиболее вероятная траектория срыва слежения в ФАП второго порядка с интегрирующим фильтром и нелинейным звеном в петле обратной связи

Как указывалось в предыдущих пунктах, наличие нелинейности в петле обратной связи должно приводить к увеличению среднего времени до срыва слежения. Этот эффект отмечался в работах [8, 9], хотя механизм данного явления стал понятен лишь сейчас.

Найдем дифференциальное уравнение, описывающее наиболее вероятную траекторию срыва ФАП частоты второго порядка с интегрирующим фильтром и нелинейным фильтром в петле обратной связи перед управляемым генератором.

Система дифференциальных уравнений, описывающих работу ФАП в этом случае, имеет вид [8]

$$dy = -\alpha_0^2(y + \sin x - \beta)dt + \sqrt{\frac{2}{r}} \alpha_0^2 d\omega; \quad (28)$$

$$dx = \beta - f(\beta - y)dt,$$

где $f(y)$ — некоторая нелинейная функция.

Повторив рассуждения, проведенные ранее, получим, что для нахождения наиболее вероятной траектории срыва нужно найти минимум функционала

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} F(\dot{y}, y, \dot{x}, x) dt = \\ & = \int_0^{\tau} [\dot{y} + \alpha_0^2 y + \alpha_0^2 \sin x - \alpha_0^2 \beta]^2 dt \end{aligned} \quad (29)$$

при условии

$$\dot{x} + f(\beta - y) - \beta = 0. \quad (30)$$

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа и метод Эйлера для задачи (29) с учетом (30), получим

$$\dot{\lambda}(t) - 2[\dot{y} + \alpha_0^2 y + \alpha_0^2 \sin x - \alpha_0^2 \beta] \alpha_0^2 \cos x = 0;$$

$$\begin{aligned} & 2[\ddot{y} + \alpha_0^2 \dot{y} + \alpha_0^2 \dot{x} \cos x] - 2[\dot{y} + \alpha_0^2 y + \\ & + \alpha_0^2 \sin x - \alpha_0^2 \beta] \alpha_0^2 + \lambda(t) \frac{\partial f(\beta - y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем эту систему уравнений и учтем условия (30):

$$\dot{x} = \beta - f(\beta - y);$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2[\dot{y} + \alpha_0^2 y + \alpha_0^2 \sin x - \alpha_0^2 \beta] \alpha_0^2 \cos x;$$

$$\begin{aligned} & \ddot{y} + \alpha_0^2 \dot{x} \cos x - \alpha_0^4 y - \alpha_0^4 \sin x + \alpha_0^4 \beta + \\ & + \frac{1}{2} \lambda(t) \frac{\partial f(\beta - y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

После упрощения получим систему ДУ, решением которых является наиболее вероятная траектория срыва слежения:

$$\dot{x} = \beta - f(\beta - y); \quad (31)$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2[\dot{y} + \alpha_0^2 y + \alpha_0^2 (\sin x - \beta)] \alpha_0^2 \cos x;$$

$$\begin{aligned} & \ddot{y} = \alpha_0^4 y + \alpha_0^4 (\sin x - \beta) - \alpha_0^2 \beta \cos x + \\ & + \alpha_0^2 f(\beta - y) \cos x - \frac{1}{2} \lambda(t) \frac{\partial f(\beta - y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

При $f(y) = y$ получаем уравнения ФАП второго порядка с интегрирующим фильтром.

В процессе вычислений были рассмотрены четыре типа нелинейных звеньев, со следующими характеристиками (рис. 14, $\eta = 1$):

$$f_a(x) = \begin{cases} x, & -\eta \leq x \leq \eta; \\ \eta, & \eta < x; \\ -\eta, & -\eta > x; \end{cases}$$

$$f_b(x) = \begin{cases} x, & -\eta \leq x \leq \eta; \\ 0, & \eta < x; \\ 0, & -\eta > x; \end{cases}$$

$$f_c(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\eta}{2} \leq x \leq \frac{\eta}{2}; \\ -x + \eta, & \frac{\eta}{2} < x \leq \eta; \\ -x - \eta, & -\eta \leq x < -\frac{\eta}{2}; \\ 0, & \eta < x; \\ 0, & x < -\eta; \end{cases}$$

$$f_d(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\eta}{2} \leq x \leq \frac{\eta}{2}; \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\eta, & \frac{\eta}{2} < x \leq \eta; \\ -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\eta, & -\eta \leq x < -\frac{\eta}{2}; \\ \frac{1}{4}\eta, & \eta < x; \\ -\frac{1}{4}\eta, & x < -\eta. \end{cases}$$

Среднее время до первого срыва слежения, полученное в результате моделирования при $\alpha_0^2 = 1$, $r = 2$, $\beta = 0$ и различных типах нелинейных звеньев, приведено в табл. 1.

Отметим, что максимальное значение частотной ошибки y_{\max} для наиболее вероятной траектории срыва имеет значение, близкое к единице. На основании данных имитационного моделирования было также обнаружено, что значения частотной ошибки большинства траекторий срыва попадают в отрезок $[0; 2y_{\max}]$. Поэтому при $\eta > 2y_{\max}$ для нелинейных звеньев с характеристиками $f_a(x)$ и $f_b(x)$ и при $\eta > 4y_{\max}$ для нелинейных звеньев с характеристиками $f_c(x)$ и $f_d(x)$ значения частотной ошибки попадут на линейный участок характеристики нелинейности, а значит, он практически не будет оказывать влияние на среднее время до срыва. В этом можно убедиться, взглянув на табл. 1.

В табл. 2 приведена зависимость среднего времени до срыва слежения в ФАП с нелинейным звеном в петле обратной связи от β и η при $\alpha_0^2 = 1$, $r = 2$.

Как видно из табл. 2, нелинейное звено с характеристикой $f_a(x)$ дает весьма небольшой прирост среднего времени до срыва слежения, поэтому в дальнейшем его рассматривать не будем.

Из приведенных результатов видно, что при наличии расстройки по частоте добавление в кольцо ФАП нелинейных звеньев с характеристиками $f_b(x)$ и $f_c(x)$ приводит к нежелательным последствиям. В этом случае наилучший результат показывает нелинейное звено с характеристикой $f_d(x)$.

Следует обратить внимание на явление, возникающее для нелинейных звеньев с характеристиками $f_b(x)$ и $f_c(x)$ при малом значении η . На участках, где значения функций $f_b(x)$ и $f_c(x)$ равны нулю, фазовые траектории становятся вертикальными. Это является большим преимуществом по сравнению с нелинейными звеньями с характеристиками $f_a(x)$ и $f_d(x)$. Например, если под действием шума точка на фазовой плоскости переместилась вверх от фокуса, т.е. переменная y увеличилась, то при движении обратно к фокусу производная $\frac{dx}{dt}$ будет иметь по-

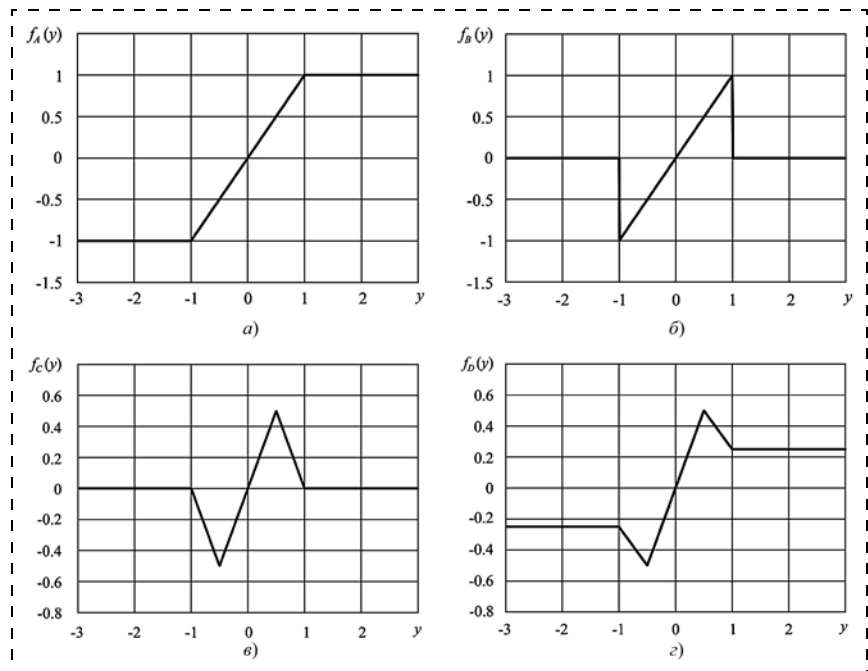


Рис. 14. Характеристики нелинейных звеньев в петле обратной связи ФАП

Таблица 1
Зависимость среднего времени до срыва слежения от типа нелинейного звена

Тип нелинейности	Параметр нелинейности					
	$\eta = 1,5$	$\eta = 2$	$\eta = 2,5$	$\eta = 3$	$\eta = 4$	$\eta \rightarrow \infty$
$f_a(x)$	310	265	254	253	253	253
$f_b(x)$	701	323	261	255	253	253
$f_c(x)$	12 658	1426	565	368	271	253
$f_d(x)$	4268	970	478	348	267	253

Таблица 2
Зависимость среднего времени до срыва слежения в ФАП с нелинейным звеном в петле обратной связи от β и η

Начальная расстройка по частоте	Параметр нелинейности				
	$\eta = 1,5$	$\eta = 2$	$\eta = 2,5$	$\eta = 3$	$\eta \rightarrow \infty$
	$f_a(x)$				
$\beta = 0,1$	261	229	223	221	221
$\beta = 0,2$	172	161	159	157	157
$\beta = 0,4$	69,9	68,7	68,2	67,8	67,8
	$f_b(x)$				
$\beta = 0,1$	484	267	226	221	221
$\beta = 0,2$	247	177	161	158	157
$\beta = 0,4$	72,3	70,2	68,8	68,2	67,8
	$f_c(x)$				
$\beta = 0,1$	2373	782	414	301	221
$\beta = 0,2$	318	314	226	184	157
$\beta = 0,4$	18,8	69,4	75,8	71,1	67,8
	$f_d(x)$				
$\beta = 0,1$	1529	609	363	281	221
$\beta = 0,2$	438	284	213	183	157
$\beta = 0,4$	68,2	79,1	74,1	72,4	67,8

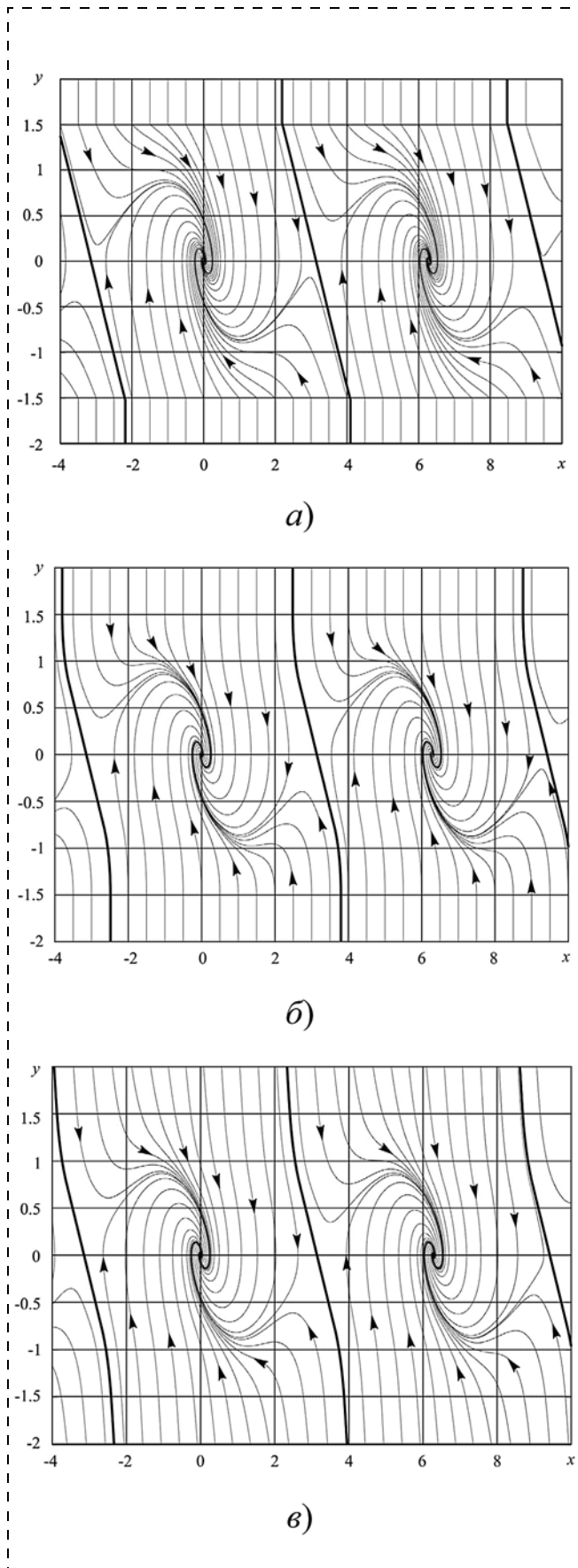


Рис. 15. Фазовые плоскости ФАП для нелинейных звеньев с характеристиками f_b (а), f_c (б), f_d (в) при $\alpha_0^2 = 1$; $\beta = 0$; $\eta = 1,5$

ложительное значение, т.е. точка будет двигаться вправо. Она будет приближаться к сепаратрисе, что может привести к срыву слежения. Для нелинейных звеньев с характеристиками $f_b(x)$ и $f_c(x)$ при увеличении переменной y больше значения η производная $\frac{dx}{dt}$ становится равной нулю, и сноса точки вправо не происходит. Точка движется по фазовой плоскости вертикально вниз и не приближается к сепаратрисе.

Среднее время работы до срыва слежения при использовании нелинейного звена с характеристикой $f_c(x)$ значительно больше, чем для звена с характеристикой $f_b(x)$. Попробуем объяснить этот факт. При условии $\eta < y$ обе нелинейности становятся равными нулю, и точка начинает двигаться вертикально вниз. Переменная y уменьшается и со временем становится меньше η . При этом значения функций $f_b(x)$ и $f_c(x)$ перестают принимать ну-

левые значения, и производная $\frac{dx}{dt}$ тоже становится отличной от нуля. Точка на фазовой плоскости начинает двигаться вправо, причем для нелинейного звена с характеристикой $f_b(x)$ скорость движения резко возрастает. Если же используется нелинейное звено с характеристикой $f_c(x)$, то скорость точки возрастает постепенно, и точка приближается к сепаратрисе не так быстро, как для звена с характеристикой $f_b(x)$, что приводит к значительному увеличению времени работы до срыва слежения.

На рис. 15 приведены изображения фазовых плоскостей ФАП с нелинейностями f_b (а), f_c (б) и f_d (в) при $\alpha_0^2 = 1$; $\beta = 0$; $\eta = 1,5$.

Следует отметить, что равенство нулю значений функций $f_b(x)$ и $f_c(x)$ в некоторых промежутках может приводить к появлению дополнительных положений равновесия.

Система уравнений, описывающая работу ФАП с нелинейным звеном при отсутствии шума и $\beta = 0$, имеет вид

$$dy = -\alpha_0^2 [y + \sin x] dt;$$

$$dx = -f(-y) dt.$$

Из второго уравнения этой системы видно, что при $|y| > \eta$ значение производной $\frac{dx}{dt}$ будет равно нулю. Приравняем нулю производную в первом уравнении системы и найдем побочное положение равновесия

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha_0^2 [y + \sin x] = 0;$$

$$|y| > \eta.$$

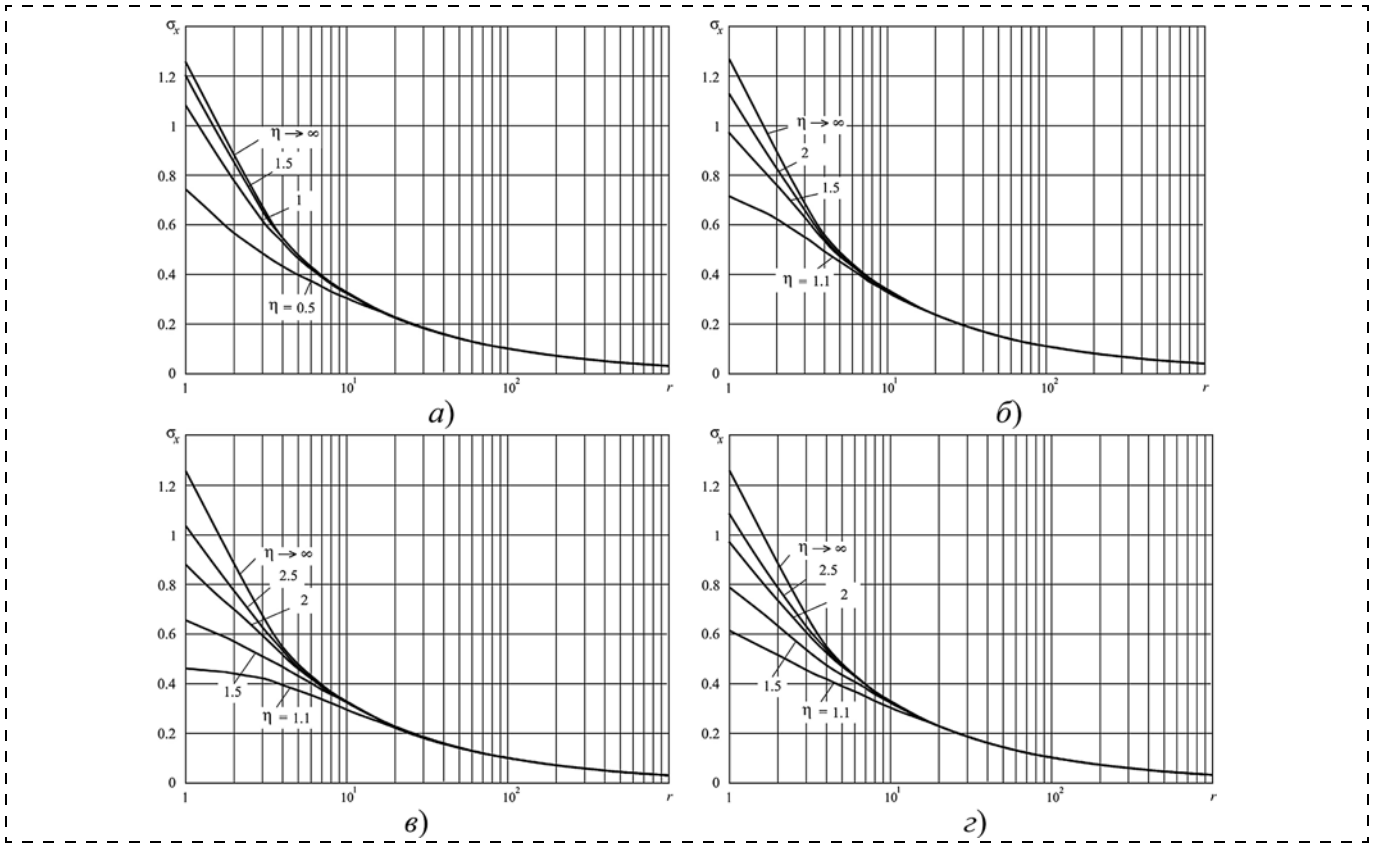


Рис. 16. Зависимость средневладратичного значения фазовой ошибки от отношения сигнал/шум r и вида нелинейного звена f_a (а), f_b (б), f_c (в), f_d (г) при $\alpha_0^2 = 1, 0$; $\beta = 0$

Откуда получаем, что точка побочного положения равновесия удовлетворяет условиям

$$y = -\sin x;$$

$$|\sin x| > \eta.$$

Появление нового положения равновесия можно предотвратить, если выбирать $\eta > 1$, так как значение синуса не может быть больше единицы, и второе неравенство выполняться не будет.

Далее рассмотрим влияние характеристики нелинейного звена на средневладратичное отклонение (СКО) фазовой ошибки. На рис. 16 показана зависимость СКО фазовой ошибки от интенсивности шума r при различных значениях η для всех четырех нелинейных фильтров. Из приведенных графиков видно, что наличие нелинейного звена уменьшает дисперсию фазовой ошибки, что является еще одним положительным эффектом от введения нелинейности в кольцо ФАП.

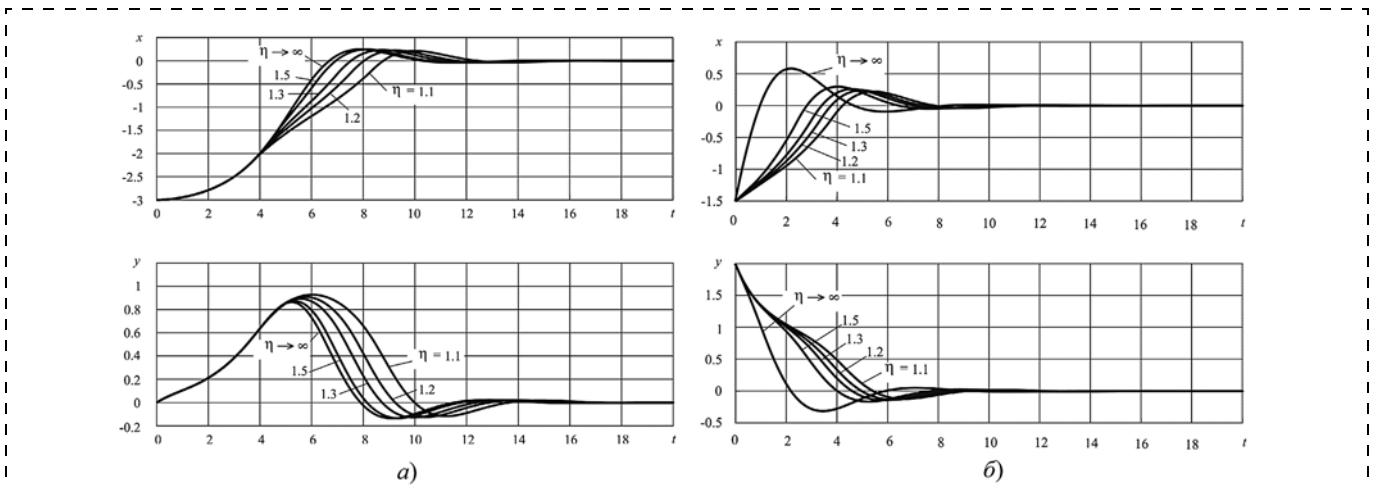


Рис. 17. Переходный процесс для ФАП с нелинейным звеном f_d при $\alpha_0^2 = 1$; $\beta = 0$, различных значениях параметра η и начальных условиях: а — $(-3; 0)$; б — $(-1,5; 2)$

Наконец выясним, как влияет наличие нелинейного звена на динамику работы ФАП. Будем рассматривать траектории движения к положению равновесий из разных начальных точек. Наилучшие результаты в увеличении среднего времени работы до срыва слежения получились при использовании звеньев с характеристиками $f_c(x)$ и $f_d(x)$. На рис. 17 приведены зависимости фазовой ошибки и ошибки по частоте от времени в ФАП с нелинейным звеном с характеристикой $f_d(x)$ при различных значениях η и различных начальных условиях.

Из рисунков видно, что при наличии нелинейного звена переходной процесс несколько затягивается. Это связано с тем, что ограничение значе-

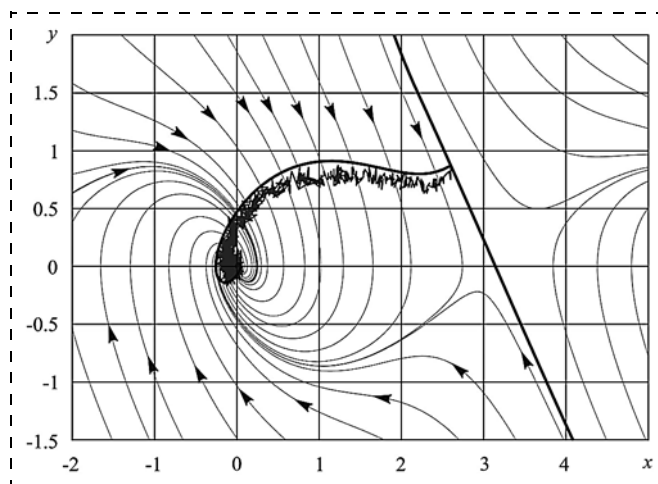


Рис. 18. Усредненная и наиболее вероятная траектории срыва слежения в ФАП с ИФ и нелинейным звеном $f_d(x)$ на фазовой плоскости при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\eta = 1$; $\beta = 0$

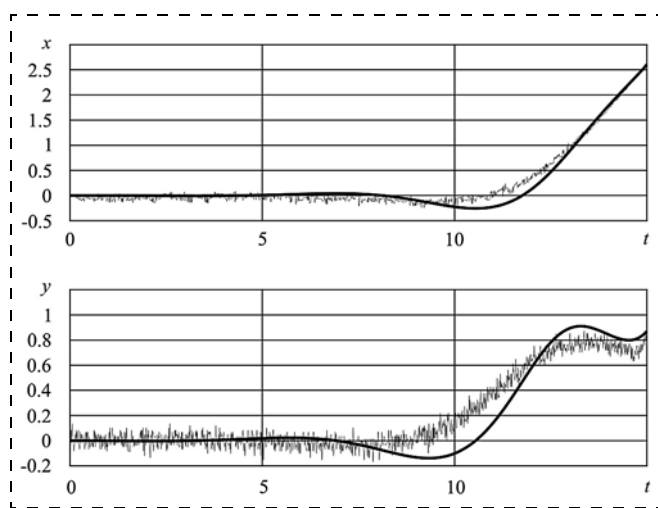


Рис. 19. Зависимости от времени усредненных и наиболее вероятных координат в пространстве состояний ФАП с ИФ и нелинейным звеном $f_d(x)$ при срыве слежения при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\eta = 1$; $\beta = 0$

ния координаты y приводит к более медленному движению вдоль соответствующей координаты.

Наконец, на рис. 18 и 19 приведены наиболее вероятные траектории срыва слежения, полученные в результате имитационного моделирования и вычисленные путем решения системы ДУ (31) для ФАП с ИФ и нелинейностью в петле обратной связи с характеристикой $f_d(x)$ при $\alpha_0^2 = 1$; $r = 2$; $\eta = 1$; $\beta = 0$. Результаты расчетов подтверждают достаточное для практики совпадение решения (31) с данными моделирования.

Заключение

Таким образом, для ФАП второго порядка получены обыкновенные дифференциальные уравнения, с достаточной для практики точностью описывающие возможные наиболее вероятные траектории до срыва слежения (достижения сепаратрисы). На основе этих дифференциальных уравнений представлена новая математическая модель аномального шума. Данные результаты в дальнейшем можно использовать для расчета рабочей характеристики ФАП при низких отношениях сигнал/шум. Также показан механизм увеличения среднего времени до срыва слежения в ФАП с нелинейным звеном в петле обратной связи и предложена рациональная форма данной нелинейности.

Список литературы

1. Tausworthe R. C. Simplified formula for mean cycle slip time of phase-locked loop with steady-state phase error // IEEE Trans. 1972. Vol. COM-20, No. 3. P. 331–337.
2. Шахтарин Б. И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998.
3. Шахтарин Б. И., Щепкин Ю. Н. Экспериментальное исследование флуктуационных помех на систему фазовой автоподстройки частоты // Электросвязь. 1966. № 9. С. 18–23.
4. Миронов М. А., Белоусова В. С. Срыв синхронизации в системах фазовой автоподстройки второго порядка // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 1. С. 118–126.
5. Миронов М. А., Белоусова В. С. Статистические характеристики срыва синхронизации в аналоговых системах фазовой автоподстройки второго порядка // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 4. С. 783–792.
6. Шахтарин Б. И., Сизых В. В., Трешневская В. О. Статистические характеристики фазовой автоподстройки с интегрирующим фильтром // Радиотехника и электроника. 1997. № 7. С. 839–844.
7. Сизых В. В., Шахтарин Б. И. Исследование статистических характеристик фазовой автоподстройки частоты второго порядка // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 42, № 5.
8. Сизых В. В., Щукин П. Н. Вопросы анализа срыва слежения в непрерывных системах фазовой автоподстройки // Радиотехника. 2011. № 12. С. 87–103.
9. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Советское радио, 1978.
10. Шахтарин Б. И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. М.: ИПРЖР, 1996.
11. Rise S. O. Noise in FM receivers // Proc. Symp. Time Series Analysis / Ed. M. Rosenblatt. N. Y.: Wiley, 1963.
12. Hess D. T. Cycle slipping in first-order phase-locked loop // IEEE Trans. 1968. Vol. COM-16, N. 2. P. 255–260.

Mechanism of the Cycle Slips in the Stochastic Analog Phase-Locked Loops of the First and Second Orders

V. V. Sizykh², vsizykh@yandex.ru, B. I. Shakhtarin¹, shakhtarin@mail.ru✉,
V. A. Shevtsev², vshevtsev@inbox.ru,

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation,

² Moscow Technological University (MIREA), Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Shakhtarin Boris I.**,
Bauman Moscow State University, Moscow, 105005, Russian Federation,
e-mail: shakhtarin@mail.ru

Received on July 04, 2016

Accepted on July 24, 2016

A posteriori broadband input noise characteristics of the analog phase locked loop (PLL) system along the cycle slip trajectory were studied on the basis of Markov stochastic model. It was demonstrated that the cycle slips were caused by an unlikely event — existence of an extended period of time, in which a random process, which describes the noise, mainly preserves its sign. A mathematical model of the most probable cycle slip trajectory in the stochastic analog of PLL of the first and second orders in the form of the ordinary differential equations with respect to the coordinate system on the phase plane was presented. There was demonstrated equivalence of the approaches to search the most probable cycle slip trajectory: the search for the maximum of the probability density function of the points of coordinates along the trajectory and the solution of the variational problem. A model of abnormal noise associated with the cycle slips effect was presented. An approximated formula for description of the spectral power density of the abnormal noise was offered. The process of the cycle slips in the PLL with the non-linear element in the feedback loop was investigated. It was demonstrated that such systems have improved characteristics of the average time before a cycle sleep in comparison with the traditional ones. An explanation for an increase of time before a tracking failure, when using a non-linear element in the feedback loop, was presented. Approaches to selection of the type of nonlinearity were considered. Numerical values for the average time before a cycle sleep for various types of non-linearity and parameters of PLL on the basis of computer simulation were presented.

Keywords: phase-locked loop, cycle slip, abnormal noise, phase error, nonlinear element

Acknowledgements: The work was done as a part of the project on the instructions № 1776 № 8.1776.2014/K to perform research in the framework of the project of the state task in the field of scientific activities of the Russian Ministry (supervisor Shakhtarin B. I.).

For citation:

Sizykh V. V., Shakhtarin B. I., Shevtsev V. A. Mechanism of the Cycle Slips in the Stochastic Analog Phase-Locked Loops of the First and Second Orders, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 7—21.

DOI: 10.17587/mau.18.7-21

References

1. Tausworthe R. C. Simplified formula for mean cycle slip time of phase-locked loop with steady-state phase error, *IEEE Trans.*, 1972, vol. COM-20, no. 3, pp. 331—337.
2. Shakhtarin B. I. *Statisticheskay dinamika sistem sinhronizatsii* (Statistical dynamics of synchronization systems), Moscow, Radio i svayz, 1998 (in Russian).
3. Shakhtarin B. I., Shepkin U. N. *Eksperimentalnoe issledovanie vliyaniy fluktuatsionnykh pomekh na sistemy fazovoi avtopodstroyki chastoty* (Experimental research of the effect of fluctuation noise in the phase locked loop), *Electrosvayz*, 1966, no. 9, pp. 18—23 (in Russian).
4. Mironov M. A., Belousova V. S. *Sriva sinhronizatsii v sistemah fazovoi avtopodstroyki vtorogo poraydka* (Failure to synchronize a phase locked second-order systems), *Radiotekhnika i Elektronika*, 1981, vol. 26, no. 1, pp. 118—126 (in Russian).

5. Mironov M. A., Belousova V. S. *Statisticheskie harakteristiki sriva sinhronizatsii v analogovykh sistemah fazovoi avtopodstroyki vtorogo poraydka* (The statistical characteristics of the synchronization failure in the analog phase-locked second order), *Radiotekhnika i Elektronika*, 1981, vol. 26, no. 4, pp. 783—792 (in Russian).

6. Shakhtarin B. I., Sizykh V. V., Treshnevskaya V. O. *Statisticheskie kharakteristiki fazovoi avtopodstroyki s integriruyushim filtrom* (Statistical characteristics of a phase locked loop with integrating filter), *Radiotekhnika i Elektronika*, 1997, no. 7, pp. 839—844 (in Russian).

7. Sizykh V. V., Shakhtarin B. I. *Issledovanie statisticheskikh kharakteristik fazovoi avtopodstroyki chastoty vtorogo poraydka* (Investigation of statistical characteristics of the second order phase locked loop), *Radiotekhnika i Elektronika*, 1998, vol. 42, no. 5 (in Russian).

8. Sizykh V. V., Schukin P. N. *Voprosi analiza sriva slezheniy v neprerivnykh sistemah fazovoi avtopodstroyki* (Questions of the analysis of cycle slip time in continuous phase locked loops), *Radiotekhnika*, 2011, no. 12, pp. 87—103 (in Russian).

9. Lindsey V. *Sistemy sinhronizatsii v svyazi i upravlenii* (Synchronization systems in communication and), Moscow, Sov. radio, 1978 (in Russian).

10. Shakhtarin B. I. *Analiz sistem sinhronizatsii pri nalichii pomekh* (Analysis of synchronization systems in the presence of interference), Moscow, IPRZHR, 1996 (in Russian).

11. Rise S. O. Noise in FM receivers, *Proc. Symp. Time Series Analysis*, Ed. M. Rosenblatt, N. Y., Wiley, 1963.

12. Hess D. T. Cycle slipping in first-order phase-locked loop, *IEEE Trans.*, 1968, vol. COM-16, no. 2, pp. 255—260.