УДК 531.38; 62-50 DOI:10.17587/mau.18.3-7

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorot@ntiustu.ru, **А. В. Вохмянина,** аспирант,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

К задаче линеаризации нелинейных управляемых систем посредством обратной связи

Показано, что выбор обратной связи в задаче точной линеаризации нелинейных управляемых систем может зависеть не только от вида исходной управляемой системы и рассматриваемой области фазового пространства, но также и от начальных условий в решаемой задаче управления. В качестве примера рассмотрена задача трехосной переориентации асимметричного твердого тела посредством трех двигателей-маховиков.

Ключевые слова: *особенность построения линеаризующей обратной связи, переориентация гиростата*

Введение

Одним из эффективных методов решения нелинейных задач управления является метод построения нелинейной обратной связи, которая позволяет провести линеаризацию исходной нелинейной управляемой системы по части или по всем ее фазовым переменным. Данный метод часто называют методом точной линеаризации (exact feedback linearization).

Возможность успешного выбора линеаризующей обратной связи зависит как от вида исходной управляемой системы, так и от рассматриваемой области фазового пространства. Систематические исследования (как теоретические, так и прикладные) на эту тему, опирающиеся на аппарат алгебр Ли, начались в 80-е годы прошлого столетия (см., например, монографии [1—5]). К данному направлению примыкают также проводившиеся в это же время исследования по частичной устойчивости (стабилизации) и управляемости динамических систем [6, 7]. Наиболее успешные случаи применения метода точной линеаризации, по-видимому, относятся к задачам механики, таким как управление ориентацией твердых тел (космических аппаратов) и управление движением подвижных экипажей (колесных роботов) (см., например, работы [6—9]).

Линеаризующая обратная связь, как правило, зависит от всех переменных, определяющих состояние системы. Далее в работе показывается, что при наличии у нелинейной управляемой системы первого интеграла в построении линеаризующей обратной связи может возникнуть особенность, если процесс управления стартует из начального состояния, соответствующего нулевому значению первого интеграла. Особенность сводится к тому, что линеаризующая обратная связь в данном случае может оказаться значительно проще и может зависеть от меньшего числа фазовых координат системы.

В качестве примера рассмотрена нелинейная задача трехосной переориентации асимметричного твердого тела посредством трех маховиков (роторов), где указанная особенность в выборе линеаризующей обратной связи возникает в случае нулевых начальных значений угловой скорости тела и маховиков.

1. Особенность построения линеаризующей обратной связи

Пусть нелинейная управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{1.1}$$

имеет первый интеграл

$$v(\mathbf{x}) = v_1^2(\mathbf{x}) + ... + v_k^2(\mathbf{x}) = \text{const}. \tag{1.2}$$

Вектор управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{u^*})$ является линеаризующей обратной связью в некоторой области D фазового пространства системы (1.1), (1.2), если из системы (1.1), (1.2) в области D можно выделить линейную систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{w}' = A\mathbf{w} + B\mathbf{u^*}, \tag{1.3}$$

фазовый вектор $\mathbf{w}$ которой состоит из части компонент вектора $\mathbf{x}$.

Допустим, что $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^\mathrm{T}, \mathbf{z}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$ (для определенности считаем, что размерность вектора $\mathbf{y}$ больше размерности вектора $\mathbf{w}$), и линеаризующая обратная связь для системы (1.1), (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{y}) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, v_1(\mathbf{x}), ..., v_k(\mathbf{x})); \\ &\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0, ..., 0) \equiv \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

В этом случае нетрудно показать, что при старте системы (1.1), (1.2) с множества $M = \{\mathbf{x}_0\colon v(\mathbf{x}_0) = 0\}$ линеаризующая обратная связь (1.4) упрощается и определяется следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(\mathbf{y}). \tag{1.5}$$

Таким образом, при наличии у нелинейной управляемой системы первого интеграла в построении линеаризующей обратной связи может возникнуть особенность. Эта особенность возникает, если управляемый процесс стартует из начального состояния, соответствующему нулевому значению первого интеграла. Особенность сводится к тому, что линеаризующая обратная связь в данном случае может оказаться значительно проще и может зависеть от меньшего числа фазовых координат системы.

2. Задача переориентации асимметричного твердого тела

Покажем, что указанная выше особенность в выборе линеаризующей обратной связи имеет место при решении задачи переориентации асимметричного твердого тела посредством трех маховиков (роторов) в случае нулевых начальных значений угловой скорости тела и маховиков.

2.1. Постановка задачи. Пусть имеем асимметричное твердое тело, вдоль главных центральных осей инерции которого закреплены оси вращения однородных симметричных маховиков. Вращательное движение этой системы (гиростата) вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [10]

$$(A_1 - J_1)x_1' = (A_2 - A_3)x_2x_3 + J_2x_3\varphi_2' - J_3x_2\varphi_3' - u_1;$$
$$(A_2 - J_2)x_2' = (A_3 - A_1)x_1x_3 + J_3x_1\varphi_3' - J_1x_3\varphi_1' - u_2;$$
$$(A_3 - J_3)x_3' = (A_1 - A_2)x_1x_2 + J_1x_2\varphi_1' - J_2x_1\varphi_2' - u_3;$$
$$J_i(\varphi_i'' + x_i') = u_i, \qquad (2.1)$$

в которых A_i — главные центральные моменты инерции гиростата; x_i — проекции вектора угловой скорости основного тела на главные центральные оси $\mathbf{k}_i$ эллипсоида инерции гиростата; J_i, φ_i — осевые моменты инерции и углы поворота маховиков (роторов), оси вращения которых неподвижно закреплены вдоль осей $\mathbf{k}_i$. Управляющие моменты u_i (моменты внутренних сил) приложены к маховикам и создаются специальными двигателями. Обозначим $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}'$ — векторы, состоящие соответственно из x_i, u_i, φ_i'. Здесь и далее i меняется от 1 до 3.

Наряду с уравнениями (2.1) рассмотрим определяющие ориентацию твердого тела кинематические уравнения в переменных Родрига—Гамильтона [11]:

$$2\eta_1' = \eta_4x_1 + \eta_2x_3 - \eta_3x_2;$$
$$2\eta_2' = \eta_4x_2 + \eta_3x_1 - \eta_1x_3;$$
$$2\eta_3' = \eta_4x_3 + \eta_1x_2 - \eta_2x_1; \qquad (2.2)$$
$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 = 1.$$

Обозначим $\boldsymbol{\eta}$ — вектор, состоящий из η_i и η_4 (в указанном порядке).

Управляющие моменты $u_i = u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ ищутся по принципу обратной связи в классе K разрывных по $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\eta}$ функций. Реализации $u_i[t]$ являются измеримыми функциями, удовлетворяющими заданным ограничениям

$$|u_i| \leqslant \alpha_i = \text{const} > 0. \qquad (2.3)$$

Решения системы (2.1), (2.2) при $u_i \in K$ понимаются в смысле А. Ф. Филиппова [12].

Задача (трехосной переориентации). Требуется найти приложенные к маховикам управляющие моменты $u_i \in K$, переводящие твердое тело за конечное время из произвольного начального положения $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0$ в заданное $\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}_1$. Оба состояния являются состояниями покоя $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$. Кроме того, $\boldsymbol{\varphi}'(t_0) = \mathbf{0}$. Момент времени $t_1 > t_0$ не фиксируется.

Не нарушая общности, считаем $\boldsymbol{\eta}(t_1) = (0, 0, 0, 1)$. В данном случае в процессе переориентации происходит совмещение связанной с телом и заданной систем координат. Случай произвольного начального и конечного положения тела будет рассмотрен при описании алгоритма решения поставленной задачи управления.

Отметим, что данная задача является задачей управления не по всем фазовым переменным, а по части переменных [6, 7, 13], определяющих состояние системы (1.1), (1.2) — по переменным x_i, η_i, определяющим состояние основного тела рассматриваемой механической системы.

2.2. Линеаризующая обратная связь и ее особенность. Проведем линеаризацию исходной нелинейной системы (2.1), (2.2) по переменным η_i в области $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 \leqslant 1 - \varepsilon^2(\eta_4^2 \geqslant \varepsilon^2)$. Это можно сделать посредством нелинейных управляющих моментов вида (выписано только выражение для u_1; выражения для u_2 и u_3 получаются из u_1 циклической перестановкой индексов $1 \to 2 \to 3$)

$$u_1 = -\frac{2(A_1 - J_1)}{\eta_4}[u_1^*(\eta_1^2 + \eta_4^2) + u_2^*(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4) +$$
$$+ u_3^*(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4) + 1/4\eta_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)] +$$
$$+ (A_2x_2 + J_2\varphi_2')x_3 - (A_3x_3 + J_3\varphi_3')x_2$$
$$(1 \to 2 \to 3), \qquad (2.4)$$

позволяющих выделить из замкнутой нелинейной системы (1.1), (1.2), (2.4) линейную подсистему дифференциальных уравнений

$$\eta_i'' = u_i^*. \qquad (2.5)$$

Отметим, что система дифференциальных уравнений (2.1) имеет первый интеграл вида (1.2), в котором

$$v_i = A_ix_i(t) + J_i\varphi_i'(t)$$

и, следовательно, выбранные управляющие моменты u_i можно представить в виде (1.4).

Поскольку в рассматриваемой задаче переориентации управляемый процесс начинается на множестве M, где $v_i = 0$, то линеаризующая обратная связь (2.4) упрощается и имеет вид (1.5), т.е.

$$u_1 = -\frac{2(A_1 - J_1)}{\eta_4}[u_1^*(\eta_1^2 + \eta_4^2) + u_2^*(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4) + \\ + u_3^*(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4) + 1/4\eta_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)] \\ (1 \to 2 \to 3). \quad (2.6)$$

В отличие от управляющих моментов (2.4), управляющие моменты (2.6) не содержат переменных φ_i', определяющих текущие угловые скорости маховиков.

2.3. Вспомогательная линейная задача управления. Для линейной системы (2.5) решим задачу управления о быстрейшем приведении в положение

$$\eta_i = \eta_i' = 0. \quad (2.7)$$

Управление осуществляется посредством u_i^*, которые считаем удовлетворяющими ограничениям

$$|u_i^*| \leqslant \alpha_i^*. \quad (2.8)$$

Процедура назначения уровней α_i^* рассматривается ниже.

При заданных α_i^* решение (в форме синтеза) указанной вспомогательной задачи управления для системы (2.5) имеет вид [14]

$$u_i^*(\eta_i, \eta_i') = \begin{cases} \alpha_i^* \operatorname{sgn}\psi_i(\eta_i, \eta_i'), \ \psi_i \neq 0; \\ \alpha_i^* \operatorname{sgn}\eta_i = -\alpha_i^* \operatorname{sgn}\eta_i', \ \psi_i = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $\psi_i(\eta_i, \eta_i') = -\eta_i - (2\alpha_i^*)^{-1}\eta_i'|\eta_i'|$ – функции переключений.

Движения системы (2.5), (2.9) на фазовых плоскостях переменных η_i, η_i' будут сначала происходить (до достижения кривых переключений) по дугам парабол, являющихся траекториями систем $\eta_i'' = u_i^*$ при u_i^* вида (2.9). Далее, попав на кривые переключений $\psi_i(\eta_i, \eta_i') = 0$, движения будут происходить вдоль них в скользящем режиме до достижения требуемых конечных значений $\eta_i = \eta_i' = 0$. На участках решений, соответствующих скользящим режимам, вспомогательные управления u_i^* принимают значения $\pm\alpha_i^*$ с бесконечно частыми сменами знака.

Величина

$$\tau = \max(\tau_i), \ \tau_i = 2\{|\eta_{i0}|(\alpha_i^*)^{-1}\}^{1/2} \quad (2.10)$$

определяет минимальное время τ достижения положения $\eta_i = \eta_i' = 0$ во вспомогательной задаче управления. Отметим, что те подсистемы системы (2.2), которые придут в требуемое положение раньше, чем последняя из них, будут оставаться в этом положении.

2.4. Алгоритм решения задачи трехосной переориентации. Решая уравнения системы (2.2) как алгебраические относительно x_i, получаем равенства

$$x_1 = \frac{2}{\eta_4}[\eta_1'(\eta_1^2 + \eta_4^2) + \eta_2'(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4) + \\ + \eta_3'(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4)] \\ (1 \to 2 \to 3). \quad (2.11)$$

Поэтому решение рассмотренной линейной задачи о быстрейшем приведении в положение (2.7) означает решение исходной нелинейной задачи переориентации посредством управляющих моментов (2.6). Число τ определяет время переориентации.

Итерационный алгоритм решения поставленной нелинейной задачи переориентации включает следующие этапы.

1. Выбор конструкции (2.6) управляющих моментов u_i с u_i^* вида (2.9). В случае $\boldsymbol{\eta}(t_1) \neq (0, 0, 0, 1)$ достаточно перейти к управляющим моментам, получающимся из (2.6) перестановкой индексов. А именно, наряду с конструкцией (2.6) можно рассматривать конструкции управляющих моментов вида

$$u_i = \eta_s^{-1} f_i^{(s)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}', \mathbf{u}^*) \ (s = \overline{1, 4}), \quad (2.12)$$

позволяющие при определенном выборе функций $f_i^{(s)}$ выбрать вспомогательные линейные управляемые системы вида (2.5) из замкнутой системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.12). В этом случае множество индексов i в системе типа (2.5) будет зависеть от индекса s переменной η в знаменателе выражений (2.12). Так, индексу $s = 4$ соответствуют $i = 1, 2, 3$, индексу $s = 1$ соответствуют $i = 2, 3, 4$, и т.д.

2. "Назначение" уровней α_i^* вспомогательных управлений u_i^*. При этом числа α_i^* предопределяют соответствующее значение $\tau = t_1 - t_0$ времени переориентации твердого тела.

3. Проверка выполнимости заданных ограничений (2.3) для управляющих моментов u_i. При учете равенств (2.11) эту проверку можно осуществить на множестве состояний вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений (2.5), (2.9).

Заключение

Показано, что при наличии у нелинейной управляемой системы первого интеграла в построении линеаризующей обратной связи может возникнуть особенность, если процесс управления стартует из начального состояния, соответствующего нулевому значению первого интеграла.

Особенность сводится к тому, что линеаризующая обратная связь в данном случае может оказаться значительно проще и зависеть от меньшего числа фазовых координат системы.

В качестве примера рассмотрена нелинейная задача трехосной переориентации асимметричного твердого тела посредством трех маховиков (роторов), где указанная особенность в выборе линеаризующей обратной связи возникает в случае нулевых начальных значений угловой скорости тела и маховиков. В результате решение данной задачи удается получить посредством нелинейных управляющих моментов вида (2.6), которые не требуют знания текущих значений угловых скоростей маховиков.

Имея в виду, что точный старт из начального состояния, соответствующего нулевому значению первого интеграла, невозможен, в результате линеаризации посредством указанной более простой обратной связи приходим к некоторой "возмущенной" линейной системе. Таким образом, в качестве "платы" за использование более простой линеаризующей обратной связи получаем необходимость решения более сложной линейной задачи управления. Тем не менее, в ряде задач управления нелинейными системами такой подход может быть не только оправдан, но и целесообразен.

Отметим, что задачи переориентации трехроторного гиростата посредством управляющих моментов вида (2.4) при неконтролируемых внешних помехах рассмотрены в работах [15—17].

Список литературы

1. **Isidori A.** Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
2. **Nijmeijer H., Van der Schaft A. J.** Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
3. **Marino R., Tomei P.** Nonlinear Control Systems Design. New Jork: Prentice-Hall, 1995.
4. **Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.** Control Theory from the Geometric Viewpoint. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
5. **Краснощеченко В. И., Крищенко А. П.** Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ, 2005.
6. **Воротников В. И.** Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991.
7. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
8. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
9. **Матюхин В. И.** Управление механическими системами. М.: Физматлит, 2009.
10. **Зубов В. И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
11. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961.
12. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
13. **Воротников В. И.** Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.
14. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
15. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К нелинейной задаче одноосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Автоматика и телемеханика. 2012. № 9. С. 35—48.
16. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К нелинейной задаче трехосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Космические исследования. 2013. Т. 51. Вып. 5. С. 412—418.
17. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче переориентации трехроторного гиростата при неконтролируемых внешних помехах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 6. С. 414—419.

Concerning the Problem of the Exact Feedback Linearization of the Nonlinear Control Systems

V. I. Vorotnikov, vorot@ntiustu.ru✉, **A. V. Vokhmyanina,**
Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation

Corresponding author: **Vorotnikov Vladimir I.,** D. Sc. (Phys. & Math.), Professor,
Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
Phone: (3435) 25-67-22 (office), e-mail: vorot@ntiustu.ru

Received on June 20, 2016
Accepted on July 04, 2016

The article studies the problem of the exact feedback linearization of the nonlinear control systems. This is a problem how to use the feedback controls in order to modify the original internal dynamics of a controlled system in such a way as to obtain to same behavior of certain prescribed autonomous linear systems. It presents possibilities of a successful selection of the linearizing feedback from the structure form of the initial nonlinear control system, as well as from the considered domain of the phase state. In this article the authors present a specific feature of construction of a linearizing feedback, when the initial nonlinear control system has the first integral and the control process takes start from the initial state where this first integral equals to zero. As an example a problem of three-axis reorientation of a rigid spacecraft was considered. Three reaction wheels were employed to produce the necessary torque in the axes of the initial. The controlling moments, applied to the flywheels, were offered to be generated by means of a feedback in the form of nonlinear functions of the phase variables of the considered nonlinear controlled system of differential equations, including dynamic Euler equations and kinematic equations in Rodrigues-Hamilton variables (in terms of the quaternion). As a result, the solution to the original nonlinear problem was narrowed down to the elementary linear control problems. The above-mentioned peculiarity in construction of the linearizing feedback takes place in this problem, when the initial angular velocities of the spacecraft and reaction wheels equal to zero.

Keywords: *peculiarity of construction of a linearizing feedback for the nonlinear control systems, three-rotor gyrostat reorientation*

For citation:

Vorotnikov V. I., Vokhmyanina A. V. Concerning the Problem of the Exact Feedback Linearization of the Nonlinear Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2017, vol. 18, no. 1, pp. 3—7.

DOI: 10.17587/mau.18.3-7

References

1. **Isidori A.** Nonlinear Control Systems, Berlin, Springer-Verlag, 1985.
2. **Nijmeijer H., Van der Schaft A. J.** Nonlinear Control Systems, Berlin, Springer-Verlag, 1990.

3. **Marino R., Tomei P.** Nonlinear Control Systems Design, New Jork, Prentice-Hall, 1995.
4. **Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.** Control Theory from the Geometric Viewpoint, Berlin, Springer-Verlag, 2004.
5. **Krasnoshetchenko V. I., Krischenko A. P.** *Nelineinye sistemy: Geometricheskie metody analiza i sinteza* (Nonlinear Systems: Geometric Methods of Analysis and Synthesis), Moscow, Bauman State Technical University Press, 2005 (in Russian).
6. **Vorotnikov V. I.** *Ustoichivost' dinamicheskikh system po otnosheniyu k chasti peremennykh* (Stability of Dynamical Systems with Respect to a Part of the Variables), Moscow, Nauka, 1991 (in Russian).
7. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998.
8. **Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999.
9. **Matyukhin V. I.** *Upravlenie mekhanicheskimi sistemami* (Control of Mechanical Systems), Moscow, Fizmatlit, 2009 (in Russian).
10. **Zubov V. I.** Theorie de la Commande, Moscow, Mir, 1978.
11. **Lurie A. I.** Analytical Mechanics, Berlin, Springer-Verlag, 2002.
12. **Filippov A. F.** Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1988.
13. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control,* 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.
14. **Pontryagin L. S. Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishenko E. F.** The Mathematical Theory of Optimal Processes, New York, Interscience, 1962.
15. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the Nonlinear Uniaxial Reorientation Problem for a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Automation and Remote Control,* 2012, vol. 73, no. 9, pp. 1469—1480.
16. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the Nonlinear Problem of Three-Axis Reorientation of a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Cosmic Research*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 372—378.
17. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** *K probleme pereorientatsii trekh-rotornogo girostata pri nekontroliruemykh vneshnikh pomekhakh* (To Problem of Three-Rotor Gyrostat Reorientation under Uncontrolled External Disturbances), *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie* (Mechatronics, Automation, Control). 2016, vol. 17, no. 6, pp. 414—419 (in Russian).

УДК 621.518.52 DOI:10.17587/mau.18.7-21

В. В. Сизых[1], д-р техн. наук, проф., vsizykh@yandex.ru,
Б. И. Шахтарин[2], д-р техн. наук, проф., shakhtarin@mail.ru, **В. А. Шевцев**[1], vshevtsev@inbox.ru,
[1]Московский технологический университет (МИРЭА),
[2]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Механизм срыва слежения в стохастических аналоговых системах фазовой автоподстройки первого и второго порядков*

На основе марковской модели фазовой автоподстройки частоты проведено исследование апостериорных характеристик входного широкополосного шума в процессе срыва слежения в аналоговой системе фазовой автоподстройки частоты. Показано, что срыв слежения вызван маловероятным событием — наличием продолжительного отрезка времени, на котором случайный процесс, описывающий шум, преимущественно сохраняет знак. Представлена математическая модель наиболее вероятных траекторий процесса срыва слежения в аналоговых стохастических системах фазовой автоподстройки первого и второго порядков в виде обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния системы. Показана эквивалентность подходов к нахождению наиболее вероятных траекторий срыва слежения на основе поиска максимума совместной плотности распределения вероятностей координат точек траектории и решения вариационной задачи. Представлена модель аномального шума, связанного с наличием срывов слежения. Предложена приближенная формула для описания спектральной плотности мощности аномального шума. Исследован процесс срыва слежения в системе фазовой автоподстройки с нелинейным звеном в петле обратной связи. Показано, что такие системы имеют улучшенные характеристики времени до срыва слежения по сравнению с традиционными. Предложено объяснение увеличения времени до срыва слежения при использовании нелинейного элемента в петле обратной связи. Предложены подходы к выбору вида нелинейности. Приведены данные для среднего времени до срыва слежения при различных видах нелинейности и параметрах системы автоподстройки.

Ключевые слова: *фазовая автоподстройка частоты, срыв слежения, аномальный шум, фазовая ошибка, нелинейный элемент*

Введение

В статье описан механизм срыва слежения в аналоговых системах фазовой автоподстройки (ФАП) первого и второго порядков при наличии широкополосного шума на входе.

В стохастических системах радиоавтоматики со счетным числом устойчивых точек равновесия (устойчивые фокусы на фазовой плоскости системы), к которым, в частности, относятся системы ФАП, под срывом слежения понимается переход системы из окрестности одного состояния равновесия в окрестность другого состояния равновесия. При этом, что характерно для ФАП, достаточно часто переход осуществляется не между соседними точками равновесия, т.е. во время срыва слежения может происходить приращение ошибки слежения по фазе на величину $2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Различные аспекты анализа вероятностных характеристик времени до срыва слежения в подобных системах рассматривались в большом числе работ, например, в работах [1—8]. Характеристики

* Работа выполнена в рамках проекта № 1776 по заданию № 8.1776.2014/К на выполнение НИР в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России (научный руководитель Б. И. Шахтарин).