

А. Б. Филимонов, д-р техн. наук, проф., filimon_ab@mail.ru,

Московский технологический университет, г. Москва,

Н. Б. Филимонов, д-р техн. наук, проф., nbfilimonov@mail.ru,

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

Синтез следящих систем на основе аппарата линейно-квадратичной оптимизации

Предлагается методология решения задач следящего регулирования, основанная на аппарате линейно-квадратичной (ЛК) оптимизации процессов управления. Ее основу составляют два решения: во-первых, обобщенная схема следящей системы, сочетающая принципы построения классических одноконтурных систем регулирования и систем стабилизации с обратной связью по состоянию; во-вторых, идея конвертирования задачи ЛК стабилизации в задачу синтеза астатической следящей системы.

Ключевые слова: синтез автоматических следящих систем, обобщенная схема следящего регулирования, качество процессов слежения, линейно-квадратичная оптимизация

Для многих задач вопросы оптимальности совсем не существенны. Это просто математический инструмент, который помогает формализовать слово "можно". Введение квадратичного критерия — вопрос математического удобства и часто диктуется желанием применить для решения задачи аналитические методы и получить решение в явном виде.

Беллман (R. E. Bellman)

Автоматизация процессов управления техническими объектами и технологическими процессами в различных областях промышленности, энергетики и транспорта сопровождается широким использованием систем следящего регулирования [1—3], предназначенных для воспроизведения на выходе с определенной точностью задающего воздействия, произвольно изменяющегося по заранее неизвестному закону. К данному классу систем автоматического регулирования относятся дистанционные системы воспроизведения угловых и линейных перемещений, приводы систем автоматического сопровождения целей, рулевые приборные приводы, приводы управления станками, антеннами, системы управления маневром летательных аппаратов и др.

В теории автоматического управления широкое распространение получила методология аналитического конструирования регуляторов (АКОР), именуемая также линейно-квадратичной (ЛК) оптимизацией, достоинствами которой являются простота формализации задач, законченность, аналитичность и вычислительная эффективность получаемых решений. В классическом варианте постановки задач АКОР связаны со стабилизацией невозмущенного движения (целевого равновесного состояния) объекта. Однако за пределами данной постановки оказывается важнейший для инженерных приложений класс задач следящего регулирования: здесь неотъемлемым структурным фактором автоматической системы является канал ввода уставки, который

определяет целевое значение управляемого выхода объекта.

Известны попытки распространить методологию АКОР на процессы управления с целевым поведением объекта, заданным экзогенными (внешними) эталонными моделями, которые включаются в процесс управления и выполняют функцию генератора эталонного выхода объекта (см., например, [4, с. 385—386; 5; 6, с. 379—382; 7, с. 483—484; 8, с. 240—242; 9, с. 704—707; 10, с. 166—169; 11, с. 672—680]). В этом случае оптимизируемый функционал содержит интегральную квадратичную ошибку отработки системой управления поступающего от генератора задающего воздействия, так что ЛК-оптимизация направлена на обеспечение максимальной близости действительного и желаемого (эталонного) переходных процессов в системе. Необходимо отметить, что в данных работах речь идет, фактически, об объединении принципов программного управления и стабилизации, вследствие чего предлагаемые решения неприемлемы для задач синтеза систем следящего регулирования, в которых задающее воздействие является произвольной неизвестной функцией времени. В настоящей работе обсуждается методология применения аппарата ЛК-оптимизации именно для задач управления такого типа — задач синтеза следящих систем (СС), функция которых состоит в слежении за изменениями а priori неизвестного командного сигнала.

Класс объектов управления

Далее рассматривается класс линейных стационарных динамических объектов управления, описываемых в переменных состояния уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 u, \quad (1)$$

$$y = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}, \quad (2)$$

где $t \geq 0$, $u \in \mathbf{R}$ — управляющий вход, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ — состояние, $y \in \mathbf{R}$ — управляемый выход, \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{C}_0 — числовые матрицы соответствующих размеров.

Полагаем, что объект обладает свойствами полной управляемости и наблюдаемости. Обозначим $W_0(s)$ его передаточную функцию (ПФ), которая в силу (1) и (2) равна

$$W_0(s) = \mathbf{C}_0(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{B}_0 = \frac{M_0(s)}{L_0(s)}. \quad (3)$$

Здесь s — комплексная частота, \mathbf{E} — единичная матрица соответствующего размера; $M_0(s)$ и $L_0(s)$ — многочлены:

$$L_0(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad M_0(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j, \quad (4)$$

где $m < n$, a_i , b_j — вещественные константы.

Динамические процессы в объекте могут быть описаны моделью "вход—выход", т.е. дифференциальным уравнением n -го порядка:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор k -го порядка D^k : $D^k f(t) \equiv \frac{d^k}{dt^k} f(t)$.

Уравнение (5) с учетом (4) можно переписать в операторной форме:

$$L_0(D)y(t) = M_0(D)u(t), \quad (6)$$

где $L_0(D)$ и $M_0(D)$ — операторные многочлены:

$$L_0(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i, \quad M_0(D) = \sum_{j=0}^m b_j D^j.$$

Вводя в рассмотрение операторную передаточную функцию (ОПФ)

$$W_0(D) = \frac{B_0(D)}{A_0(D)},$$

связь входа и выхода объекта можно формально выразить следующим операторным уравнением:

$$y(t) = W_0(D)u(t).$$

Системы слеящего регулирования

Отличительной структурной особенностью систем автоматического регулирования и, в частности, СС по сравнению с системами стабилизации является наличие канала ввода уставки (рис. 1).

Целевое значение выхода объекта определяется задатчиком, который генерирует уставку, т.е. задающий (командный) сигнал. Задача слежения — отработка (отслеживание) СС задающего сигнала, т.е. обеспечение близости выхода $y(t)$ к его заданному входу $y^*(t)$ в соответствии с заданными (желаемыми) требованиями качества процессов управления:

$$y(t) \approx y^*(t).$$

Оценка качества СС основана на анализе процессов отработки системой тестирующих командных сигналов, в качестве которых, как правило, выбирают алгебраические полиномы. Важнейшим показателем качества СС является динамическая ошибка $\varepsilon_d(t)$, являющаяся вынужденной составляющей ошибки слежения ε — рассогласования между уставкой и выходом объекта:

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t). \quad (7)$$

Характерное свойство СС с астатизмом ν -го порядка — отработка без вынужденной погрешности командных сигналов, являющихся полиномами степени $< \nu$. Таким образом, если командные сигналы подчиняются условию

$$D^\nu y^*(t) \equiv 0, \quad (8)$$

то

$$\varepsilon_d(t) \equiv 0.$$

Отметим следующий фундаментальный результат классической теории управления.

Утверждение 1. Порядок астатизма замкнутой системы равен кратности нулевого полюса $s = 0$ прямой цепи, т.е. числу интегрирующих звеньев в контуре регулирования. ■

Таким образом, если порядок астатизма СС равен ν , то ПФ ее прямой цепи имеет вид

$$V(s) = \frac{1}{s^\nu} V_0(s), \quad V(0) \neq 0.$$

Обозначим $R(s)$ ПФ регулятора астатической СС. Если у объекта управления отсутствуют нулевые

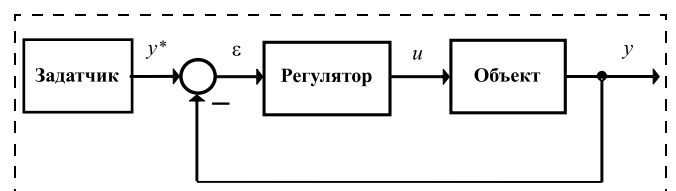


Рис. 1

передаточные полюса, то она будет иметь вид несократимой дроби

$$R(s) = \frac{Q(s)}{s^v P(s)}, \quad (9)$$

где $P(s)$ и $W(s)$ — взаимно простые многочлены, причем $P(0) \neq 0$.

Закон управления можно представить в операторной форме:

$$u(t) = R(D)(y^*(t) - y(t)), \quad (10)$$

где $R(D)$ — ОПФ регулятора.

Из соотношений (6), (7), (10) с учетом (9) следует уравнение

$$L_0(D)D^v y(t) = \frac{M_0(D)Q(D)}{P(D)} \varepsilon(t).$$

Отсюда и из условий (7), (8) вытекает равенство

$$L_0(D)D^v \varepsilon(t) = -\frac{M_0(D)Q(D)}{P(D)} \varepsilon(t). \quad (11)$$

Рассматривая свободное движение замкнутой СС

$$y^*(t) \equiv 0, \quad (12)$$

согласно (7) и (11) получим уравнение

$$L_0(D)D^v y(t) = -\frac{M_0(D)Q(D)}{P(D)} y(t). \quad (13)$$

Сравнение уравнений (11) и (13) приводит к следующему выводу.

Утверждение 2. В астатических СС динамика ошибки слежения описывается тем же уравнением, что и ее свободное движение. ■

Задача ЛК-стабилизации

Вкратце остановимся на формализме задачи ЛК-стабилизации.

Считаем, что целевым стабилизируемым состоянием объекта является его нулевое состояние, которому отвечает невозмущенный выход: $y(t) \equiv 0$.

Полагаем также, что точность и энергозатраты процесса стабилизации оцениваются следующими классическими интегральными квадратичными критериями:

$$J_y = \int_0^\infty y^2(t)dt, \quad J_u = \int_0^\infty u^2(t)dt. \quad (14)$$

Пусть оптимизация процессов стабилизации осуществляется согласно критерию оптимальности, образованному сверткой данных частных критериев с весовым множителем $p > 0$:

$$J = pJ_y + J_u = \int_0^\infty [py^2(t) + u^2(t)]dt \rightarrow \min. \quad (15)$$

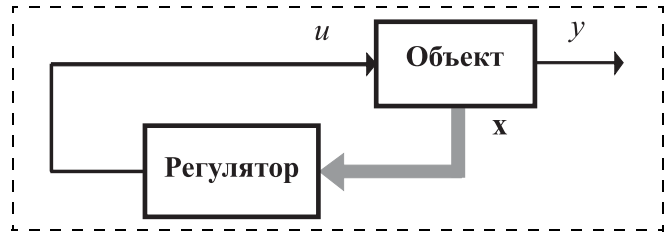


Рис. 2

Как известно [12, п. 9.6.4], решением задачи оптимальной стабилизации (1), (2), (15) является закон регулирования

$$u = -Kx, \quad K = B_0^T P, \quad (16)$$

где $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — симметрическая матрица, являющаяся решением алгебраического матричного уравнения Риккати

$$PB_0 B_0^T P - PA_0 - A_0^T P - pC_0^T C_0 = 0$$

(здесь символ "Т" означает операцию транспонирования).

На рис. 2 показана схема рассматриваемой системы стабилизации.

Обобщенная схема системы следящего регулирования

Будем синтезировать СС согласно обобщенной схеме, представленной на рис. 3. Она сочетает в себе структурные свойства классической одноконтурной схемы регулирования (см. рис. 1) и схемы стабилизации с обратной связью по состоянию (см. рис. 2). Таким образом, предлагаемая схема синтезируемой СС унаследует от первой *последовательное корректирующее звено* (ПКЗ), а от второй — *корректирующую обратную связь* (КОС).

КОС описывается уравнением

$$u_0(t) = -K_0 x(t), \quad (17)$$

где $K_0 \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ — матрица коэффициентов КОС.

Полагаем, что ПКЗ имеет динамический порядок $n_1 \geq 1$ и описывается уравнениями состояния вида

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \varepsilon, \quad (18)$$

$$u_1 = C_1 z, \quad (19)$$

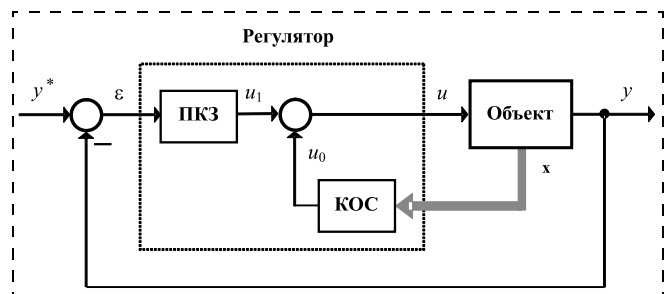


Рис. 3

где $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{n_1}$ — состояние, а $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1$ — числовые матрицы соответствующих размеров.

ПФ $R(s)$ данного звена равна

$$R(s) = \mathbf{C}_1(\mathbf{E}_1 s - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1, \quad (20)$$

где \mathbf{E}_1 — единичная матрица соответствующего размера.

Управляющее воздействие (рис. 3) определяется равенством

$$u = u_0 + u_1. \quad (21)$$

Утверждение 3. Требование астатизма СС будет выполняться, если ПФ ПКЗ $R(s)$ имеет ν нулевых передаточных полюсов, т.е. она представляется выражением (9). ■

Пример 1. Пусть $n_1 = 2$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = [q_0 \ q_1].$$

Тогда

$$R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s^2}, \quad (22)$$

т.е. ПКЗ включает два интегрирующих звена. ■

Конвертирование задачи ЛК-стабилизации в задачу слежения

Динамическую часть СС, включающую каскадно-соединенные объект управления и ПКЗ, будем трактовать как *расширенную модель объекта* (РМО).

Считаем входом РМО управляющий вход объекта u . Ее состояние определяется блочным вектором $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

т.е. $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{\tilde{n}}$, $\tilde{n} = n + n_1$, причем динамика состояния РМО описывается уравнениями (1), (18).

Будем рассматривать свободное движение РМО, т.е. предполагаем выполнение условия (12). Тогда с учетом соотношений (2), (7) и (12) динамику РМО можно представить уравнениями, записанными в векторно-матричной форме:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} u, \quad (24)$$

$$y = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (25)$$

где матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{C}}$ имеют следующую блочную структуру:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_0 \ \mathbf{0}].$$

Положим, что для РМО получено решение задачи оптимальной стабилизации (24), (25), (15) в виде закона регулирования:

$$u = -\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (26)$$

где $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathbf{R}^{1 \times \tilde{n}}$ — матричный коэффициент усиления.

Представим полученную матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ в блочной форме:

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}_0 \ \tilde{\mathbf{K}}_1], \quad (27)$$

где $\tilde{\mathbf{K}}_0 \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, $\tilde{\mathbf{K}}_1 \in \mathbf{R}^{1 \times n_1}$.

Теперь с учетом соотношений (21), (23), (17), (19) получаем выражения для искоемых матричных коэффициентов КОС и ПКЗ:

$$\mathbf{K}_0 = \tilde{\mathbf{K}}_0, \mathbf{C}_1 = -\tilde{\mathbf{K}}_1. \quad (28)$$

Предлагаемая методология применения формализма ЛК-оптимизации для структурно-параметрического синтеза СС основывается на утверждениях 1—3 и складывается из следующих процедур: в структуру СС вводится ПКЗ с нулевыми полюсами; неизменяемая часть ПКЗ вместе с объектом управления образует РМО; далее решается стандартная задача оптимальной стабилизации свободных движений РМО средствами ЛК-формализма; наконец, полученная функциональная структура системы стабилизации *конвертируется* в функциональную структуру СС.

Пусть $u^*(t)$ и $\mathbf{z}^*(t)$ — вынужденные составляющие соответственно управляющего воздействия и состояния ПКЗ, инициированные задающим воздействием $y^*(t)$. Переходная составляющая в динамике СС характеризуется переменными $\varepsilon(t)$, $\Delta u(t)$ и $\Delta \mathbf{z}(t)$:

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t), \Delta u(t) = u(t) - u^*(t), \\ \Delta \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}^*(t).$$

Полагаем, что критерием точности процессов слежения служит квадратичный функционал

$$J_y = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt.$$

Прямое применение функционала J_u вида (14) в качестве критерия энергозатрат невозможно, поскольку в режиме отработки тестовых командных сигналов полиномиальной структуры этот несобственный интеграл будет расходиться. В связи с этим в качестве критерия энергозатрат воспользуемся следующим квадратичным функционалом:

$$J_u = \int_0^{\infty} (\Delta u(t))^2 dt.$$

Кстати, именно данный функционал является критериальной оценкой степени усиления сигналов в цепях обратной связи синтезируемой системы.

Необходимо также формально учесть эффект демпфирования динамических процессов в ПКЗ. Для этой цели воспользуемся квадратичным функционалом вида

$$J_z = \int_0^{\infty} (\Delta \mathbf{z}(t))^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{z}(t) dt,$$

где \mathbf{Q} — симметрическая положительно определенная матрица размера $n_1 \times n_1$.

В результате свертки критериев J_y , J_u и J_z получаем обобщенный квадратичный критерий оптимальности:

$$J = pJ_y + J_z + J_u = \int_0^{\infty} [p\epsilon^2(t) + (\Delta \mathbf{z}(t))^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{z}(t) + (\Delta u(t))^2] dt. \quad (29)$$

Для решения задачи синтеза СС в силу высказанных соображений можно ограничиться рассмотрением свободных (отвечающих условию (12)) движений замкнутой системы. Тогда критерий оптимальности (29) принимает вид

$$J = \int_0^{\infty} [py^2(t) + \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + u^2(t)] dt \rightarrow \min. \quad (30)$$

Введем в рассмотрение блочную матрицу $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbf{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

Посредством применения аппарата ЛК-оптимизации получаем закон регулирования (26), матричный коэффициент которого $\tilde{\mathbf{K}}$ равен

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}},$$

где $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbf{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ — симметрическая матрица, являющаяся решением алгебраического матричного уравнения Риккати

$$\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} - p \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{Q}} = 0.$$

По найденной матрице коэффициентов $\tilde{\mathbf{K}}$ в соответствии с выражениями (27) и (28) определяем искомые матричные коэффициенты СС \mathbf{K}_0 и \mathbf{C}_1 .

Пример 2. Рассмотрим объект управления 3-го порядка ($n = 3$), описываемый уравнениями (1), (2) с параметрами

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_0 = [0 \ 0 \ 1]. \quad (31)$$

Его ПФ по каналу "вход—выход" равна

$$W_0(s) = \frac{1}{(5s+1)(2s+1)(s+1)}.$$

Пусть $\nu = 1$ — требуемая степень астатизма СС. Возьмем структуру ПКЗ (9) из примера 1 вида (22). В функционале (30) положим:

$$p = 10, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Решая ЛК-задачу оптимальной стабилизации (24)—(26), (31), (32), (30), получим коэффициентную матрицу

$$\tilde{\mathbf{K}} = [5,05 \ 7,11 \ 5,58 \ -6,52 \ -1].$$

Спектр замкнутой СС оказывается равным

$$\Lambda = \{-1,04; -0,51 \pm 0,13j; -0,33 \pm 0,49j\}.$$

Далее согласно (27), (28) находим коэффициенты КОС (17) и ПКЗ (19):

$$\mathbf{K}_0 = [5,05 \ 7,11 \ 5,58], \mathbf{C}_1 = [-6,52 \ -1],$$

так что параметры q_0 и q_1 ПФ ПКЗ (22) равны

$$q_0 = 6,52, q_1 = 1.$$

На рис. 4 представлена реакция СС y (сплошная линия) на три типа тестовых воздействий y^* (пунктирная линия): постоянного (рис. 4, а), линейно нарастающего (рис. 4, б) и кусочно-линейного (рис. 4, в). ■

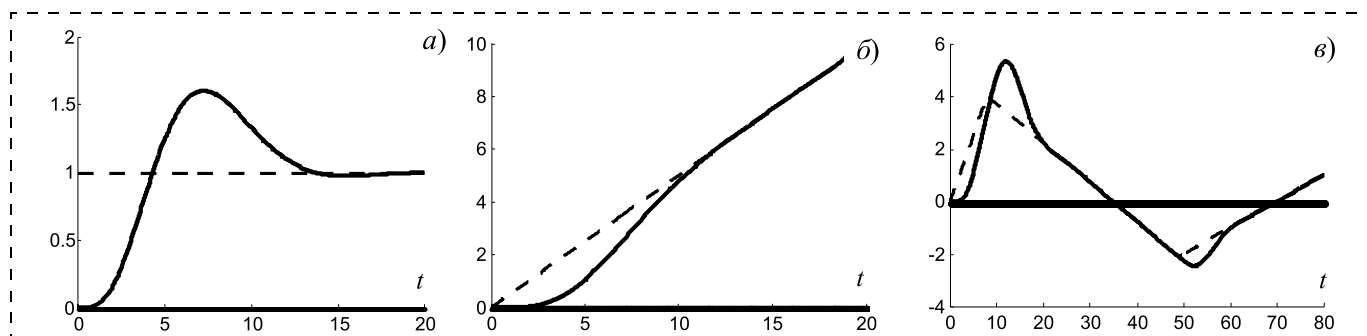


Рис. 4

Список литературы

1. **Основы** проектирования следящих систем / Под ред. Н. А. Лакоты. М.: Машиностроение, 1978.
2. **Younkin G. W.** Industrial Servo Control Systems: Fundamentals and Applications. Marcel Dekker, NY, 2003.
3. **Nakamura M., Goto S., Kyura N.** Mechatronic Servo System Control: Problems in Industries and their Theoretical Solutions. Springer-Verlag, NY, 2004.
4. **Андреев Ю. Н.** Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
5. **Смагин В. И., Параев Ю. И.** Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996.
6. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.
7. **Машиностроение.** Энциклопедия в 40 т. Т. I-4. Автоматическое управление. Теория / Е. А. Федосов, А. А. Красовский, Е. П. Попов и др. Под общ. ред. Е. А. Федосова. М.: Машиностроение, 2000.
8. **Современная** прикладная теория управления. В 3-х ч. Ч. I. Оптимизационный подход в теории управления / Под ред. А. А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.
9. **Методы** классической и современной теории автоматического управления. В 5 т. Т. 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
10. **Naidu D. S.** Optimal control systems. CRC Press LLC, NY, 2003.
11. **Bhattacharyya S. P., Datta A., Keel L. H.** Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization. CRC Press LLC, NY, 2009.
12. **Ким Д. П.** Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Synthesis of Servosystems on the Basis of the Apparatus of Linear-Quadratic Optimization

A. B. Filimonov, filimon_ab@mail.ru,
Moscow Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation,
N. B. Filimonov, nbfilimonov@mail.ru✉,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Filimonov Nikolay B.**, Professor, Dr. Sci. Tech.,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation,
e-mail: nbfilimonov@mail.ru

Received on August, 15, 2016
Accepted on September, 29, 2016

The automation of control processes by technical objects and technological processes in the different fields of industry, energetics and transport is accompanied by the broad use of tracking regulation systems intending for the reproduction at the output with the definite precision of the giving action, arbitrarily varying from the law which is unknown in advance. The methodology of the analytical synthesis of the optimal regulators (ASOR) called also as linear-quadratic (LQ) optimization has got the wide propagation in the automatic control theory. In the classical variant of setting up the ASOR problems are connected with stabilization of unperturbed motion of the object. The given settings don't take into account the wide class of the problems connected with the completeness (tracking) of the dynamic processes in environmental influences: here the channel of reference input defining the goal meaning of the directed output of the object is the integral structural factor of the automatic system. There are well known the tries to extend the ASOR methodology to control processes with the goal behavior of the object given by external (outer) standard models which are included themselves in control process and carry out the function of the generator of the standard output of the object. But the analysis of papers of the given direction shows its inapplicability for the wide class of control problems where the given action may be the arbitrary time function. In the given paper the methodology of use of LQ optimization for synthesis of servosystems, the function of which consists in tracking for variations a priori of unknown command order signal is discussed.

Keywords: synthesis of servosystems, general scheme of tracking control, quality tracking processes, linear-quadratic optimization

Acknowledgements: The work was supported by grant of the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 16-08-00313-a).

For citation: **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Synthesis of Servosystems on the Basis of the Apparatus of Linear-Quadratic Optimization, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 12, pp. 795–801.

DOI: 10.17587/mau.17.795-801

References

1. **Lakota N. A.** ed. *Osnovy proektirovaniya sledyashchih sistem* (Foundation of Design Servosystems), Moscow, Mashinostroenie, 1978 (in Russian).
2. **Younkin G. W.** Industrial Servo Control Systems: Fundamentals and Applications, Marcel Dekker, NY, 2003.
3. **Nakamura M., Goto S., Kyura N.** Mechatronic Servo System Control: Problems in Industries and their Theoretical Solutions, Springer-Verlag, NY, 2004.
4. **Андреев Ю. Н.** *Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob"ektami* (Control of Finite-Dimensional Linear Objects), Moscow, Nauka, 1976 (in Russian).
5. **Smagin V. I., Paraev Yu. I.** *Sintez sledyashchih sistem upravleniya po kvadraticnym kriteriyam* (Synthesis of Control Servosystems via Quadratic Criteria), Tomsk, Publishing house of Tomskij Universitet, 1996 (in Russian).
6. **Krasovskij A. A.** ed. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Handbook of Automatic Control Theory), Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).
7. **Fedosov E. A., Krasovskij A. A., Popov E. P.** i dr. *Mashinostroenie. Enciklopediya v 40 tt. T. I-4. Avtomaticheskoe upravlenie. Teoriya* (Engineering. Encyclopedia in 40 volumes. Vol. 1-4. Automatic control. Theory), Moscow, Mashinostroenie, 2000 (in Russian).
8. **Kolesnikov A. A.** ed. *Sovremennaya prikladnaya teoriya upravleniya. V 3-h chch. Ch. I. Optimizacionnyj podhod v teorii upravleniya* (Modern Applied Control Theory. 3 CC. Part I. Optimization Approach in Control Theory), Taganrog, Publishing house of TRTU, 2000 (in Russian).

9. Pupkov K. A., Egupov N. D. ed. *Metody klassicheskoy i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya. V 5 t. T. 4. Teoriya optimizatsii sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Methods of Classical and Modern Theory of Automatic Control. Tutorial in 3 vol. Vol. 2. The Synthesis of Regulators and Optimization Theory of Automatic Control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. E. Bauman, 2004 (in Russian).

10. Naidu D. S. Optimal control systems, CRC Press LLC, NY, 2003.

11. Bhattacharyya S. P., Datta A., Keel L. H. Linear Control Theory: Structure, Robustness and Optimization, CRC Press LLC, NY, 2009.

12. Kim D. P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Mnogomernye, nelinejnye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* (Theory of Automatic Control. Vol. 2. Multidimensional, Nonlinear, Optimal and Adaptive Systems). Moscow, FIZMATLIT, 2004 (in Russian).

УДК 62-50

DOI:10.17587/mau.17.801-809

В. В. Тютиков, д-р техн. наук, проф., tvv@ispu.ru,
И. В. Вершинин, аспирант, vershinin.ivan@list.ru, **А. Б. Соколов**, доц.,
Ивановский государственный энергетический университет, г. Иваново

Метод больших коэффициентов при синтезе параметрически грубых систем модального управления¹

Решается задача обеспечения параметрической грубости систем модального управления с полиномиальными регуляторами с использованием метода больших коэффициентов усиления.

Ключевые слова: параметрическая грубость, модальное управление, полиномиальный регулятор, метод больших коэффициентов

Введение

Вопросы параметрической грубости САУ, синтезируемых аналитическими методами, интересуют исследователей достаточно давно. Одной из первых работ, посвященной этой тематике, является статья [1]. Позднее анализу таких систем было посвящено значительное число публикаций [2–10]. Синтез параметрически грубых систем также вызывал значительный интерес у исследователей [8, 9, 11–18]. В работе [8] содержится обширная библиография по этой тематике.

Среди направлений синтеза грубых САУ можно выделить два, основу которых составляет комбинация производных выходного сигнала и большого коэффициента усиления: метод больших коэффициентов усиления В. М. Меерова [11] и метод локализации (управления с использованием высшей производной) А. С. Вострикова [12].

В работе [11] показано, что большой коэффициент усиления в контуре позволяет обеспечить не только высокую статическую точность, но и низкую чувствительность к вариациям параметров объекта управления. Введение большого коэффициента усиления осуществляется в два этапа. Вначале проводится синтез основного регулятора (в терминологии автора — "стабилизирующего устройства", состоящего из звеньев с передаточными функциями

вида $H(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$), обеспечивающего в зоне суще-

ственных частот необходимые свойства системы, дающие возможность последующего введения в контур "большого" коэффициента усиления. Затем выбирается необходимый коэффициент усиления. При этом качество (характер и темп) переходных процессов САУ с изменением коэффициента усиления также может меняться.

Методы локализации [12] также используют двухэтапную процедуру синтеза САУ, включающую синтез контура, обеспечивающего робастные свойства, и основного контура, придающего САУ необходимые качественные показатели функционирования. Особенностью метода является использование в регуляторе информации о производных, включая высшую (порядка, равного порядку объекта управления).

В последнее время большое число работ посвящено обеспечению параметрической грубости систем, синтезированных методами модального управления, в частности систем с динамическими (полиномиальными) регуляторами в цепи главной обратной связи, поскольку известно, что использование данных методов также может приводить к получению САУ с высокой чувствительностью к вариациям параметров [8, 10, 17]. Причины ее могут быть различны.

Например, большое влияние на параметрическую грубость оказывает наличие нулей в передаточной функции математической модели объекта управления [8, 17], причем это может быть связано как с образованием так называемых "диполей" (близко расположенных нулей полюсов), так и с расположением нулей и полюсов на значительном удалении друг от друга.

¹ Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00972) и при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг.