

Г. Н. Лебедев, д-р техн. наук, проф., kaf301@mai.ru,

В. И. Гончаренко, д-р техн. наук, доц., директор военного института МАИ,

А. В. Румакина, ассистент, dolgova-221@mail.ru,

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

## Модификация метода ветвей и границ для двумерной маршрутизации координированного полета группы летательных аппаратов<sup>1</sup>

*Предложен метод решения задачи коммивояжера в случае двумерной маршрутизации полета, отличающийся формированием двух исходных матриц расстояний между пунктами для двух разомкнутых маршрутов, которые анализируются поочередно при координированном выборе элемента минимальной длины в каждой из них. Приводятся примеры расчетов, демонстрирующие эффективность предложенного подхода и указывающие на сокращение числа пунктов облета более, чем в два раза.*

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, многомерная маршрутизация, безопасность полета, целочисленное программирование

### Введение

В настоящее время при решении различных задач управления и контроля все больше внимания уделяется групповым действиям в полете, отличающимся высокой эффективностью. К числу таких задач относится обслуживание заданного множества пунктов наблюдения наземных объектов с помощью группы летательных аппаратов (ЛА), маршруты движения которых необходимо заранее определить.

Задача маршрутизации движения рассматривается во множестве работ, посвященных выбору оптимальных, но одномерных маршрутов [1–16], среди которых особое место занимает метод ветвей и границ [2] в виде решения известной математической задачи коммивояжера. Однако при групповых действиях приходится либо учитывать штрафы при пересечении одномерных маршрутов полета [3], либо осуществлять дополнительный прогнозируемый контроль безопасности полета при сближении ЛА, внося существенные поправки в первоначальные планы одномерной маршрутизации.

В данной работе рассматривается задача координированного маршрутного полета двух ЛА при следующей постановке задачи.

### Постановка задачи

1. Решается задача формирования двух разомкнутых маршрутов движения, имеющих заданные общие начальную и конечную точки  $A$  и  $B$  (рис. 1).

2. Задано множество неподвижных точечных пунктов наблюдения, координаты их расположения и общее число  $n$  (на рис. 1 это число  $n = 5$ ), что позволяет сформировать исходящую матрицу  $M_0$  расстояний между ними, началом и концом  $((n + 1)$ -й

точкой) маршрутов. Для рис. 1 исходная матрица  $M_0$  имеет следующий вид:

	0	1	2	3	4	5	6
0	X	5	8	11	9,4	11,5	X
1	X	X	3	6	5,8	6,7	11
2	X	3	X	3	5	4,3	8
3	X	6	3	X	5,8	3	5
4	X	5,8	5	5,8	X	3,5	9,4
5	X	6,7	4,3	3	3,5	X	5,8
6	X	X	X	X	X	X	X

В этой матрице есть запрещенные элементы (обозначенные  $X$ ), как это принято в известном методе ветвей и границ [6], а именно

- элементы по диагонали матрицы, запрещающие попадание в любой пункт повторно сразу после его обслуживания;
- элементы в первом столбце, запрещающие возвращение в начальный пункт для разомкнутых маршрутов;
- элементы в нижнем столбце, запрещающие любое продолжение движения после попадания в конечный пункт  $(n + 1)$ ;
- элементы  $(0, n + 1)$ , запрещающие движение сразу из начального пункта в конечный.

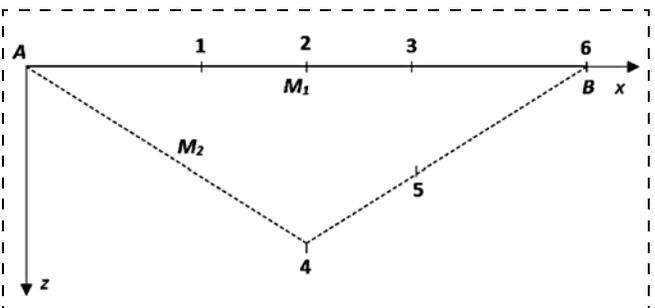


Рис. 1. Картина расположения пунктов наблюдения с указанием найденных в конце расчета маршрутов  $M_1$  и  $M_2$

<sup>1</sup> Работа выполнена при материальной поддержке грантов РФФИ 16-08-00-832-а, 15-08-00043.

3. Имеются два ЛА, полет которых на заданной постоянной высоте нужно скоординировать таким образом, чтобы каждый пункт был обслужен только одним ЛА и только один раз.

4. Требуется сформировать два маршрута полета так, чтобы их суммарная длина была минимальна.

### Подход к решению задачи на первом этапе расчетов

Решение задачи основано на известных действиях, принятых в целочисленном методе ветвей и границ для одномерной маршрутизации, с добавлением к ним новых необходимых операций. Как и в известном методе, планирование должно состоять из множества шагов расчета ( $k = 1, \dots, n + 1$ ) с тем отличием, что вместо одной матрицы  $M_0$  расстояний анализируются две матрицы  $M_1$  и  $M_2$  — по одной для каждого маршрута. Исходное состояние этих матриц формируется на основе общей исходной матрицы (как показано ниже) присоединением нового столбца для указания координаты  $x$  и  $z$  так называемых "центров притяжения" обоих формируемых маршрутов, имеющих номера  $(n + 2)$  и  $(n + 3)$ .

В исходном состоянии эти матрицы для примера, представленного на рис. 1, имеют вид:

▲ матрица  $M_{10}$  для первого маршрута на нулевом шаге

	0	1	2	3	4	5	6	$7 = n + 1$	
0	X	5	8	11	9,4	11,5	X	8	→ $X_{n+2}(0)$
1	X	X	3	6	5,8	6,7	11		
2	X	3	X	3	5	4,3	8		
3	X	6	3	X	5,8	3	5		
4	X	5,8	5	5,8	X	3,5	9,4		
5	X	6,7	4,3	3	3,5	X	5,8		
6	X	X	X	X	X	X	X	0	← $Z_{n+2}(0)$

▲ матрица  $M_{20}$  для второго маршрута на нулевом шаге

	0	1	2	3	4	5	6	$7 = n + 1$	
0	X	5	8	11	9,4	11,5	X	8	→ $X_{n+3}(0)$
1	X	X	3	6	5,8	6,7	11		
2	X	3	X	3	5	4,3	8		
3	X	6	3	X	5,8	3	5		
4	X	5,8	5	5,8	X	3,5	9,4		
5	X	6,7	4,3	3	3,5	X	5,8		
6	X	X	X	X	X	X	X	0	← $Z_{n+3}(0)$

Для пояснения центров притяжения маршрутов на рис. 2 показана аппроксимация траекторий маршрутов

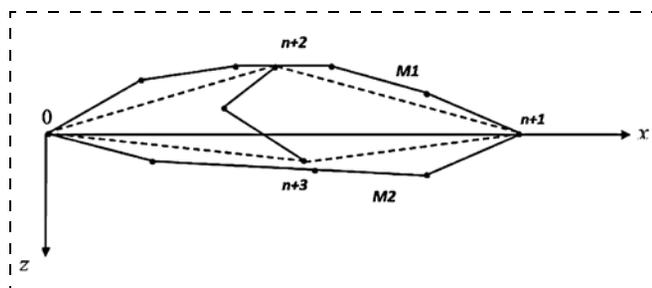


Рис. 2. Треугольная аппроксимация маршрутов  $M_1$  и  $M_2$

рутов  $M_1$  и  $M_2$ , состоящая из двух прямоугольных отрезков, исходящих из начала и конца маршрутов к этим центрам.

Назовем эту аппроксимацию треугольной моделью, элементы которой показаны штриховыми отрезками.

В данной работе на каждом  $k$ -м шаге расчета предлагается выполнять следующие действия, выделяя особо среди них новые:

- выбрать для анализа поочередно одну из двух матриц и найти в ней элемент минимальной длины, который нужно включить в план, как это принято в методе ветвей и границ;
- проанализировать найденный элемент  $(i, j)$  на "близость" к первому или второму маршруту;
- в выбранной одной из двух матриц удалить строку  $i$  и строку  $j$ , поставив знак запрета в элемент  $(j, i)$ , но дополнительно после присоединения элемента  $(i, j)$  уточнить координаты  $z$  и  $x$  центра притяжения соответствующего маршрута, поставив их в правый столбец выбранной матрицы;
- в другой матрице удалить две строки  $(i, j)$  и два столбца  $(i, j)$  для исключения их обслуживания.

Вследствие этих действий размерность обеих матриц снижается, а после их повторений число пересчетов каждой матрицы может оказаться неодинаковым, но сумма этих чисел в конце расчета будет равна  $(n + 1)$ . В итоге в предложенном подходе найдены ответы на два вопроса:

- в какой из двух матриц анализировать элементы малой длины;
- в какую из двух матриц ввести элемент минимальной длины.

Ответ таков — для анализа элементов по принципу равноправия обе матрицы используются поочередно, но затем элемент присоединяется к тому маршруту, к которому он "ближе", независимо от того, в какой матрице он был выбран.

На первом этапе расчета мера этой близости определяется разницей расстояний  $m_1$  и  $m_2$  от элемента  $(i, j)$  до центров притяжения  $(n + 2)$  и  $(n + 3)$  двух маршрутов, как показано на рис. 2.

Чтобы более детально понять сущность предлагаемых действий, рассмотрим решение показанного на рис. 1 примера при  $n = 5$ .

Пусть вначале центры притяжения двух маршрутов лежат посередине прямой линии  $(0, n + 1)$ , поскольку до распределения пунктов наблюдения их положение выше и ниже этой линии равновероятно.

На первом шаге ( $k = 1$ ) выберем для анализа матрицу  $M_{10}$ , в ней минимальным элементом является дуга  $(1, 2)$ , которая также лежит на прямой  $(0, 6)$  и одинаково близка к двум центрам притяжения. Поэтому возьмем в качестве решения первый маршрут ( $p = 1$ ), т.е. в матрице  $M_{10}$  исключим строку 1 и столбец 2, поставив знак запрета в элемент  $(2, 1)$ , а в матрице  $M_{20}$  вычеркнем строки 1, 2 и столбцы 1, 2. Кроме того, в матрице  $M_{10}$  в дополнительном столбце  $n + 1 = 7$  посчитаем новые ко-

ординаты центра притяжения  $(n + 2)$ , пользуясь следующими рассуждениями.

Так как дуга  $(i, j)$  имеет два конца, определим ее положение в системе координат  $x, z$  через координаты середины дуги, имеющие значения  $(0,5x_i + 0,5x_j)$  и  $(0,5z_i + 0,5z_j)$ , что является апостериорной информацией о центре притяжения  $(n + 2)$  маршрута  $M_1$  по отношению к априорной, которой соответствуют значения  $x_{n+2}(0) = 8$  и  $z_{n+2}(0) = 0$ , стоящие в правом столбце матрицы  $M_{10}$ . Поэтому искомый результат при  $k = 1$  есть среднее значение между ними:

$$x_{n+2}(1) = 0,5x_{n+2}(0) + 0,25(x_i + x_j);$$

$$z_{n+2}(1) = 0,5z_{n+2}(0) + 0,25(z_i + z_j).$$

Можно записать в другом виде:

$$\begin{aligned} x_{n+2}(1) &= x_{n+2}(0) + \frac{0,5(x_i + x_j) - x_{n+2}(0)}{2}; \\ z_{n+2}(1) &= z_{n+2}(0) + \frac{0,5(z_i + z_j) - z_{n+2}(0)}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для имеющихся в матрице  $M_{10}$  числовых данных по формулам (1) получим  $x_{n+2}(1) = 7,25$ ;  $z_{n+2}(1) = 0$ , и в итоге при  $k = 1$  матрицы  $M_{11}$  и  $M_{21}$  имеют следующий вид:

▲ матрица  $M_{11}$

	0	1	3	4	5	6	7
0	X	5	11	9,4	11,5	X	7,25
2	X	X	3	5	4,3	8	
3	X	6	X	5,8	3	5	
4	X	5,8	5,8	X	3,5	9,4	
5	X	6,7	3	3,5	X	5,8	
6	X	X	X	X	X	X	0

▲ матрица  $M_{21}$

	0	3	4	5	6	7
0	X	11	9,4	11,5	X	8
3	X	X	5,8	3	5	
4	X	5,8	X	3,5	9,4	
5	X	3	3,5	X	5,8	
6	X	X	X	X	X	0

На втором шаге выбираем для анализа вторую матрицу вместо первой и в ней находим элемент  $(5, 3)$  минимальной длины, который по физическому смыслу не должен попасть в оптимальные маршруты, но формально его нужно присоединить к одному из них, для чего необходимо установить, к какому из них он "ближе" и по какому критерию эту близость оценивать. На данном этапе расчета используем критерий минимума расстояний  $m_1$  и  $m_2$  от дуги  $(i, j)$  до каждого из двух центров притяжения  $(n + 2)$  и  $(n + 3)$ , рассчитываемых по формулам:

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{(z_i - z_{n+2})^2 + (x_i - x_{n+2})^2}; \\ m_1 &= \sqrt{(z_i - z_{n+3})^2 + (x_i - x_{n+3})^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для данного шага и элемента  $(5, 3)$  оказывается, что  $m_1 = 6$ ;  $m_2 = 4$ , что указывает на присоединение дуги к  $(5, 3)$  к маршруту  $M_2$  ( $p = 2$ ). Поэтому, пересчитав по формуле (1) новые координаты центра притяжения второго маршрута и исключив строку 5 и столбец 3, а также элемент  $(3, 5)$  в матрице  $M_{21}$ , а также удалив строки 3, 5 и столбцы 3, 5 в матрице  $M_{11}$ , получим две новые матрицы меньшей размерности:

▲ матрицу  $M_{12}$

	0	1	4	6	7
0	X	5	9,4	X	7,25
2	X	X	5	8,5	
4	X	5,8	X	9,4	
6	X	X	X	X	0

▲ матрицу  $M_{22}$

	0	4	5	6	7
0	X	9,4	11,5	X	9,5
3	X	5,8	X	5	
4	X	X	3,5	9,4	
6	X	X	X	X	0,75

На третьем шаге при очередном анализе матрицы  $M_{12}$  конкурентами на попадание в маршруты являются дуги  $(0, 1)$  и  $(2, 4)$ , а из них минимальным элементом является дуга  $(0, 1)$ , и по критерию минимальных расстояний, вычисленных по формулам (2), она должна быть отнесена к маршруту  $M_1$ .

Далее по принятой процедуре вначале надо исключить из матрицы  $M_{12}$  как столбец 1, так и строку 0, номер которой соответствует началу не только первого маршрута, но и второго. Поэтому затем из другой матрицы  $M_{22}$  строку 0 исключать нельзя, а нужно удалить только строку 1 и два столбца 0 и 1 (если они есть). В итоге получаем две новые матрицы:

▲ матрицу  $M_{13}$

	0	4	6	7
2	X	5	8	5,7
4	X	X	9,4	
6	X	X	X	0

▲ матрицу  $M_{23}$

	4	5	6	7
0	9,4	11,5	X	9,5
3	5,8	X	5	
4	X	3,5	9,4	
6	X	X	X	0,75

На четвертом шаге в результате чередования матриц анализируем матрицу  $M_{23}$ , в ней элементом минимальной длины является дуга  $(4, 5)$ , которая согласно формулам (2) ближе ко второму маршруту. В результате соответствующих действий получаем ответ в виде матриц  $M_{14}$  и  $M_{24}$  после исключения соответствующих строк и столбцов из матриц  $M_{13}$  и  $M_{23}$ :

▲ матрица  $M_{14}$

	0	6	7
2	X	8	5,7
6	X	X	0

▲ матрица  $M_{24}$

	4	6	7
0	9,4	X	9,5
3	5,8	5	
6	X	X	1,83

На пятом шаге при анализе матрицы  $M_{14}$  видим, что единственным элементом, претендующим на включение в оптимальный план, является дуга (2, 6), которую нужно отнести к первому маршруту. Поэтому после исключения из маршрута  $M_{24}$  только строки 6 (столбец 6 из матрицы не исключается, так как номер 6 соответствует концу не только первого, но и второго маршрутов) получаем матрицу  $M_{25}$ , а координаты центра притяжения первого маршрута равны  $z_{n+2} = 0, x_{n+2} = 7,5$ :

▲ матрица  $M_{25}$

	4	6	7
0	9,4	X	9,5
3	5,8	5	1,83

В этой матрице элементом минимальной длины является дуга (3, 6), принадлежащая второму маршруту. Наконец, при исключении из матрицы  $M_{25}$  строки 3 и столбца 6 находим на шестом шаге последний для первого маршрута элемент (0, 4).

Объединяя полученные на всех шагах результаты, получаем, что маршруты  $M_1$  и  $M_2$  включают следующие пункты наблюдения:

$$M_1 \rightarrow 0, 1, 2, 6;$$

$$M_2 \rightarrow 0, 4, 5, 3, 6.$$

На рис. 3 эти маршруты представлены в виде траекторий, которые пока не соответствуют оптимальным из-за того, что в общий план попала дуга (5, 3).

На этом же рисунке представлено положение центров притяжения  $(n+2) = 7$  и  $(n+3) = 8$ , которые удалось развести друг от друга в разные стороны при  $k = 6$  с координатами:

$$x_{n+2}(6) = 7,25; x_{n+3}(6) = 9,2;$$

$$z_{n+2}(6) = 0; x_{n+3}(6) = 1,6.$$

Проведенный расчет позволяет сделать следующие промежуточные выводы:

1. Правило обязательного присоединения очередного элемента минимальной длины к одному из

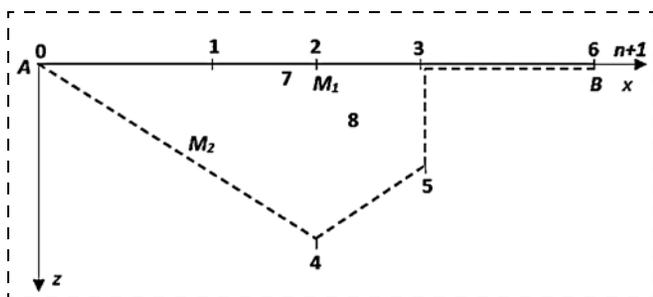


Рис. 3. Траектории маршрутов  $M_1$  и  $M_2$ , полученные на первом этапе расчета

маршрутов привело к тому, что в выбранные траектории попала дуга (5, 3), которая на самом деле является "перемычкой" между показанными на рис. 1 оптимальными маршрутами.

2. Сама перемычка (5, 3) обладает особыми свойствами — минимальные расстояния от нее до маршрутов  $M_1$  и  $M_2$  равны друг другу (от точки 3 до  $M_1$  и от точки 5 до  $M_2$ ) или, по крайней мере, мала их разность, а сама дуга оказалась между маршрутами. Другие элементы исходной матрицы этим свойством не обладают.

3. Достоинством предложенного выше расчета является способность развести маршруты  $M_1$  и  $M_2$  в разные стороны, как видно на рис. 3.

4. Недостатком оценки близости анализируемого элемента  $(i, j)$  к маршрутам с помощью расстояний  $m_1$  и  $m_2$  является то, что она полностью не учитывает взаимного расположения трех анализируемых объектов —  $M_1$ ,  $M_2$  и  $(i, j)$ , а точнее, знаков минимальных разностей расстояний не до центров притяжения, а до самих траекторий треугольных моделей аппроксимации, как это показано на рис. 4 для четырех возможных ситуаций —  $a, b, в, г$ .

Видно, что в ситуации  $a$  не вызывает сомнения принадлежность дуги  $(i, j)$  маршруту  $M_2$ , в ситуации  $б$  — маршруту  $M_1$ , в то время как в ситуации  $в$  и  $г$  эти сомнения возникают, когда оба пункта  $i$  и  $j$  находятся либо вне маршрутов, либо между ними. Однако для вычисления новых расстояний  $l_1$  и  $l_2$  с учетом их знаков знания только исходной матрицы недостаточно. Нужно знать сами координаты местоположения пунктов, начала и конца маршрутов, а также центров притяжения, вычисленных на первом этапе расчета.

Нужно также отметить, что в данной работе дополнительная оценка близости расстояний  $l_1$  и  $l_2$  базируется пока что на аппроксимации маршрутов треугольными моделями, содержащими четыре прямоугольных отрезка 1, 2, 3, 4 (рис. 4).

**Использование дополнительного критерия близости анализируемых участков полета к выбираемым маршрутам на втором этапе расчетов**

Применим в качестве второй попытки дополнительные правила оценки близости дуги  $(i, j)$  к маршрутам  $M_1$  и  $M_2$  для принятия решений.

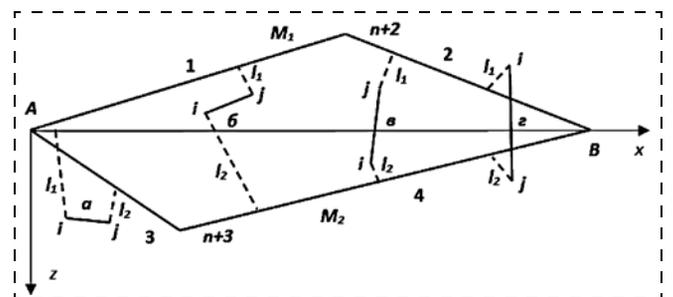


Рис. 4. Картина взаимного расположения дуги  $(i, j)$  и треугольных моделей аппроксимации маршрутов  $M_1$  и  $M_2$

1. Вычислить четыре разности для маршрута  $M_1$ :

$$l_{11i} = z_i - z_{11}(x_i); l_{12i} = z_i - z_{12}(x_i);$$

$$l_{11j} = z_j - z_{11}(x_j); l_{12j} = z_j - z_{12}(x_j),$$

где  $z_{11}$  и  $z_{12}$  — координаты для прямоугольных отрезков 1 и 2, вычисленные по формулам

$$\begin{aligned} z_{11}(x_i) &= x_i \frac{z_{n+2}}{x_{n+2}}; z_{12}(x_i) = \frac{z_{n+2}(x_i - x_{n+1})}{x_{n+2} - x_{n+1}}; \\ z_{11}(x_j) &= x_j \frac{z_{n+2}}{x_{n+2}}; z_{12}(x_j) = \frac{z_{n+2}(x_j - x_{n+1})}{x_{n+2} - x_{n+1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Найти одну минимальную по модулю разность  $\Delta_1$  из четырех вычисленных ( $l_{11i}, l_{11j}, l_{12i}, l_{12j}$ ) и запомнить ее с учетом знака.

3. Вычислить другие четыре разности для маршрута  $M_2$ .

$$l_{23i} = z_i - z_{23}(x_i); l_{24i} = z_i - z_{24}(x_i);$$

$$l_{23j} = z_j - z_{23}(x_j); l_{24j} = z_j - z_{24}(x_j),$$

где  $z_{23}$  и  $z_{24}$  — координаты для прямоугольных отрезков 3 и 4, вычисленные по формулам

$$\begin{aligned} z_{23}(x_i) &= x_i \frac{z_{n+3}}{x_{n+3}}; z_{24}(x_i) = \frac{z_{n+3}(x_i - x_{n+1})}{x_{n+3} - x_{n+1}}; \\ z_{23}(x_j) &= x_j \frac{z_{n+3}}{x_{n+3}}; z_{24}(x_j) = \frac{z_{n+3}(x_j - x_{n+1})}{x_{n+3} - x_{n+1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

4. Найти одну минимальную по модулю разность  $\Delta_2$  из четырех вычисленных на предыдущем шаге, и с учетом ее знака сравнить с  $\Delta_1$ , присваивая следующие значения вспомогательной переменной  $p$ :

- если  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  имеют одинаковые знаки, то при  $|\Delta_1| \leq |\Delta_2|$ :  $p = 1$  (присоединить  $(i, j)$  к маршруту  $M_1$ ); при  $|\Delta_1| > |\Delta_2|$ :  $p = 2$  (присоединить  $(i, j)$  к маршруту  $M_2$ );
- если  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  имеют разные знаки, то при  $|\Delta_1 + \Delta_2| \geq \delta$  и  $|\Delta_1| \leq \Delta_2$ :  $p = 1$ ; при  $|\Delta_1 + \Delta_2| \geq \delta$  и  $|\Delta_1| > \Delta_2$ :  $p = 2$ ;

$$\text{при } |\Delta_1 + \Delta_2| < \delta: p = 0$$

(ни одному маршруту дуга  $(i, j)$  не принадлежит, поставить в элементы  $(i, j)$  ( $j, i$ ) обеих матриц  $M_1$  и  $M_2$  знаки запрета). Величина  $\delta$  назначается экспериментальным путем, например, пусть  $\delta = 0,1|z_{n+2} - z_{n+3}|$ .

Тогда решение первого примера во втором этапе расчета выглядит так. Учитывая результаты первого этапа, показанные на рис. 3, повторим действия по шагам.

На первом шаге очевидно, что дуга (1, 2) принадлежит маршруту  $M_1$ , так как  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 = 3,1$ . Зато на втором шаге при анализе во второй матрице элемента (5, 3) получим  $\Delta_1 + \Delta_2 = 0,3$ , значит  $p = 0$ , и согласно правилу (5) эта перемычка исключается из маршрутов. Поэтому после запрещения элемен-

тов (5, 3) и (3, 5) матрицы  $M_{12}$  и  $M_{22}$  приобретают следующий вид:

▲ матрица  $M_{12}$

	0	1	3	4	5	6	7
0	X	5	11	9,4	11,5	X	7,25
2	X	X	3	5	4,3	8	
3	X	6	X	5,8	X	5	
4	X	5,8	5,8	X	3,5	9,4	
5	X	6,7	X	3,5	X	5,8	
6	X	X	X	X	X	X	0

▲ матрица  $M_{22}$

	0	3	4	5	6	7
0	X	11	9,4	11,5	X	8
3	X	X	5,8	X	5	
4	X	5,8	X	3,5	9,4	
5	X	X	3,5	X	5,8	
6	X	X	X	X	X	0

На третьем шаге планирование осуществляется по новому пути. Так как на предыдущем шаге окончательное решение  $p = 1, 2$  не было найдено, дадим еще раз возможность выбора матрице  $M_{22}$ , при анализе которой элементом минимальной длины оказалась дуга (4, 5), которую нужно отнести к маршруту  $M_2$ . Поэтому, исключив из матрицы  $M_{22}$  элемент (5, 4), строку 4 и столбец 5, а из матрицы  $M_{12}$  — строки 4, 5 и столбцы 4, 5, получим:

▲ матрица  $M_{13}$

	0	1	3	6	7
0	X	5	11	X	7,25
2	X	X	3	8	
3	X	6	X	5	
6	X	X	X	X	0

▲ матрица  $M_{23}$

	0	3	4	6	7
0	X	11	9,4	X	8,75
3	X	X	5,8	5	
5	X	X	X	5,8	
6	X	X	X	X	2

На четвертом шаге переходим к анализу матрицы  $M_{13}$ , дающей ответ — присоединить дугу (2, 3) к маршруту  $M_1$ , исключив из матрицы  $M_{13}$  строку 2 и столбец 3, а из матрицы  $M_{23}$  — строку 3 и столбец 3, после чего получим:

▲ матрица  $M_{14}$

	0	1	6	7
0	X	5	X	9
3	X	6	5	
6	X	X	X	1,3

▲ матрица  $M_{24}$

	0	4	6	7
0	X	9,4	X	8,75
5	X	X	5,8	
6	X	X	X	2

На пятом шаге при анализе матрицы  $M_{24}$  находим элемент (5, 6), принадлежащий маршруту  $M_2$ , а на шестом шаге, анализируя матрицу  $M_{14}$ , выбираем элемент (0, 1), присоединяя его к маршруту  $M_1$ . В конце решения задачи однозначно определяются

элементы (0, 4) для маршрута  $M_2$  и (3, 6) — для маршрута  $M_1$ , что приводит к желаемому оптимальному результату, показанному на рис. 1.

### Пример координированного планирования двух маршрутов, находящихся близко друг от друга

Чтобы ярче показать эффект от избавления перемычек и использования треугольной модели траекторий маршрутов, рассмотрим второй пример, которому соответствует рис. 5.

Необходимо обслужить двумя ЛА 10 пунктов, между которыми самыми короткими являются перемычки (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10) длиной  $r = 3$ , диагональные дуги (2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9) имеют длину  $r = 5$ , а две дуги (9, 10), (10, 11) имеют длину  $r = 6$ .

При решении этой задачи известным методом одномерной маршрутизации выясняется, что перемычки длиной  $r = 3$  являются лидерами в отборе элементов минимальной длины, и они должны попасть в маршрут. Тогда после исключения соответствующих строк и столбцов из исходной матрицы размерности  $12 \times 12$  можно убедиться, что в сформированной матрице размерности  $7 \times 7$  строки имеют четные номера, столбцы — нечетные, а следующими элементами минимальной длины становятся диагональные дуги.

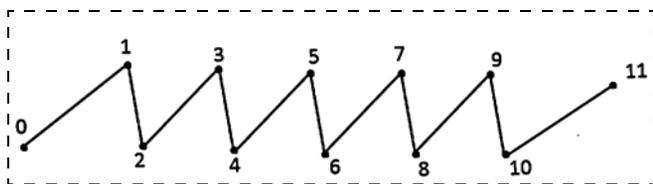


Рис. 5. Пример траектории полета, полученной при одномерной маршрутизации

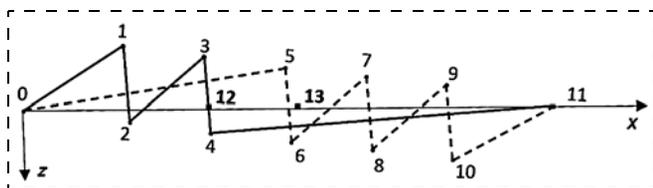


Рис. 6. Траектория двух маршрутов полета на первом этапе расчетов при  $p = 1, 2$

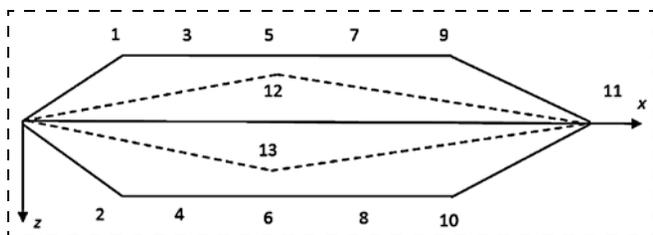


Рис. 7. Траектории двух маршрутов полета на втором этапе расчета при  $p = 0, 1, 2$

После их включения в маршрут становится ясно, что остались неназванными дуги (0, 1) и (10, 11). Вид найденной траектории на рис. 5 указывает, что полученное решение далеко от идеала.

При решении задачи предложенным методом двумерной маршрутизации на первом этапе расчета формируются две исходных матрицы расстояний для двух ЛА размерностью  $12 \times 12$ . Не представляя их для краткости изложения, можно убедиться, что при их поочередном анализе и двухальтернативном выборе номера маршрута ( $p = 1, 2$ ) для каждой дуги ( $i, j$ ) полученный ответ также далек от идеала. На рис. 6 непрерывной линией показан первый маршрут  $M_1$ , штриховой линией — второй маршрут.

Также оказалось, что центры притяжения  $n + 2 = 12$  и  $n + 3 = 13$  разнесены друг от друга и имеют координаты

$$x_{12} = 9,5; z_{12} = 0; x_{13} = 15,3; z_{13} = 0.$$

Результаты анализа на втором этапе расчета вносят существенные изменения в процесс маршрутизации за счет трехальтернативного выбора ( $p = 0, 1, 2$ ), а именно — вначале на первых пяти шагах расчета все перемычки длиной  $r = 3$  согласно второму, дополнительному критерию близости не попадают в план полета, в силу чего конкурентами становятся элементы (1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 9), (2, 4), (4, 6), (6, 8), (8, 9), которые имеют длину  $r = 4$  и при известном способе даже не попадали в расчеты.

Далее на последующих восьми шагах поочередного анализа двух матриц первые четыре из перечисленных выше элементов присваиваются первому маршруту, а остальные — второму маршруту, в результате чего формируются две матрицы:

▲ матрица  $M_{1, 14}$

	1	2	11	
0	6	6	X	10,7
9	16	16,2	6	
10	16,2	16	6	-1,2

▲ матрица  $M_{2, 14}$

	1	2	11	
0	6	6	X	10,7
9	16	16,2	6	
10	16,2	16	6	1,2

Неназванными для анализа остались элементы этих матриц, в том числе на последних трех шагах расчета автоматически выбираются элемент (0, 1) для первого маршрута и элемент (10, 11) для второго маршрута. Сформированный план двумерной маршрутизации готов и показан на рис. 7.

На рис. 7 также показано окончательное расположение центров притяжения 12 и 13 принятой в данной работе треугольной модели аппроксимации траекторий полета, показанных штриховыми линиями:

$$x_{12} = 13,7; z_{12} = -1,07; x_{13} = 14,6; z_{13} = 1,07.$$

## Единый перечень действий алгоритма двумерной маршрутизации

Перечислим основные действия алгоритма на двух этапах расчета, выделив новые из них подчеркиванием.

*На первом этапе:*

1. Из исходной матрицы  $M_0$  расстояний между пунктами с установленными в нужных местах запрещенными элементами сформировать две матрицы  $M_{10}$  и  $M_{20}$ , в каждой из которых в дополнительном правом столбце указать одинаковые по величине начальные координаты центров притяжения — в матрице  $M_{10}$  координаты:

$$x_{n+2}(0) = 0,5r(0, n+1), z_{n+2}(0) = 0;$$

в матрице  $M_{20}$  координаты:

$$x_{n+3}(0) = 0,5r(0, n+1), z_{n+3}(0) = 0.$$

2. Выполнить поочередно анализ одной из матриц известным в методе ветвей и границ способом:

- выявить элементы минимальной длины в каждой строке и в каждом столбце;
- выбрать из них тот элемент  $(i, j)$ , исключение которого из маршрута приведет к наибольшему штрафу.

3. В отличие от известного метода решить вопрос — в какой из двух маршрутов нужно включить элемент  $(i, j)$ , не взирая на то, какая матрица анализировалась. Использовать для этого первый критерий близости дуги  $(i, j)$  к центрам притяжения  $(n+2)$  и  $(n+3)$  двух маршрутов путем вычисления расстояний  $m_1$  и  $m_2$  по формулам (2). Далее применить двухальтернативное правило:

если  $m_1 - m_2 \leq 0$  — включить  $(i, j)$  в первый маршрут ( $p = 1$ ),

если  $m_1 - m_2 > 0$  — включить  $(i, j)$  во второй маршрут ( $p = 2$ ).

4. В матрице того маршрута, куда попал элемент  $(i, j)$ , вычеркнуть строку  $i$ , столбец  $j$  и элемент  $(j, i)$ . В другой матрице вычеркнуть две строки  $i$  и  $j$  и два столбца  $i$  и  $j$ , за исключением случаев, указанных в п. 5.

5. Если минимальными оказались элементы  $(0, j)$  или элемент  $(i, n+1)$ , т.е. в них участвуют общие начальные или конечные маршруты, то в первый раз соответствующие строки и столбцы в другой матрице не исключаются, а эти действия разрешаются, если элементы попадают в число минимальных дважды.

6. После включения нового элемента в выбранную матрицу в ее правом столбце указать новые координаты  $z$  и  $x$  соответствующего центра притяжения, вычисленные по формулам (1).

7. В результате перечисленных действий размерность обеих матриц уменьшается, и процесс расчета повторяется при переходе в п. 2 до тех пор, пока после  $(n+1)$  шагов матрицы не превратятся в один элемент, а координаты центров притяжения не будут удалены друг от друга на некоторое расстояние, достаточное для второго этапа вычислений.

*На втором этапе:*

1. Вновь повторить формирование исходных матриц  $M_{10}$  и  $M_{20}$ , указав, однако, в дополнительном правом столбце каждой из них неодинаковые координаты центров притяжения, полученные на первом этапе расчета.

2. Выполнить поочередно анализ одной из матриц известным способом так же, как и на первом этапе.

3. В отличие от первого этапа решить задачу трехальтернативного выбора ( $p = 0, 1, 2$ ), используя второй дополнительный критерий близости элемента  $(i, j)$  к самим траекториям маршрутов, описываемым треугольной моделью, при вычислении минимальных расстояний  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  по формулам (3)—(4). Далее использовать трехальтернативное правило (5):

если  $\text{sign}\Delta_1 = \text{sign}\Delta_2$  и  $|\Delta_1| \leq |\Delta_2|$  — включить  $(i, j)$  в первый маршрут ( $p = 1$ );

если  $\text{sign}\Delta_1 = \text{sign}\Delta_2$  и  $|\Delta_1| > |\Delta_2|$  — включить  $(i, j)$  во второй маршрут ( $p = 2$ );

если  $\text{sign}\Delta_1 \neq \text{sign}\Delta_2$ ;  $|\Delta_1 + \Delta_2| > \delta$  и  $\Delta_1 \leq \Delta_2$  — включить  $(i, j)$  в первый маршрут ( $p = 1$ );

если  $\text{sign}\Delta_1 \neq \text{sign}\Delta_2$ ;  $|\Delta_1 + \Delta_2| > \delta$  и  $\Delta_1 > \Delta_2$  — включить  $(i, j)$  во второй маршрут ( $p = 2$ );

если  $\text{sign}\Delta_1 \neq \text{sign}\Delta_2$ ;  $|\Delta_1 + \Delta_2| < \delta$  — исключить попадание  $(i, j)$  в оба маршрута ( $p = 0$ ).

4. Если  $p = 1, 2$ , действия по исключению строк и столбцов из двух матриц аналогичны п. 4 первого этапа расчетов.

5. Если  $p = 0$ , то в двух матрицах необходимо исключить элемент  $(i, j)$  и  $(j, i)$ , и проанализированной матрице снова предоставляется право выбрать другой элемент минимальной длины.

6. По включению нового элемента в один из маршрутов в правом столбце соответствующей матрицы указать новые координаты центра притяжения (аналогично п. 6 первого этапа расчета).

7. В результате перечисленных действий процесс расчета повторяется при переходе в п. 2 до тех пор, пока не будут найдены оба окончательных маршрута.

### Обобщение предложенного подхода на случаи многомерной маршрутизации полета группы ЛА

Предложенный перечень действий двухэтапного расчета может быть распространен для задачи координированного выбора большего, чем два, числа  $N$  маршрутов полета. Тогда из исходной матрицы расстояний тиражируется  $N$  матриц  $M_{p0}$  ( $p = 1, \dots, N$ ), которые анализируются поочередно.

Тогда на первом этапе расчета на каждом его шаге выбирается один элемент  $(i, j)$  минимальной длины, который затем присваивается одному из маршрутов по первому критерию близости, в силу чего вычисляются новые координаты его центра притяжения, а в остальных матрицах строки  $i, j$  и столбцы  $i, j$  исключаются. По мере неизбежного уменьшения размерности анализируемых матриц центры притяжения траекторий полета станут неоди-

наковыми, что достаточно для продолжения решения задачи.

### Выводы

1. Предложен способ решения задачи двумерной маршрутизации, предусматривающий формирование из исходной матрицы расстояний между пунктами двух матриц для каждого разомкнутого маршрута, которые анализируются поочередно при координированном выборе элемента минимальной длины в каждой из них.

При этом одновременно из другой матрицы исключаются две соответствующие строки и два столбца, чтобы избежать повторного обслуживания пунктов.

2. Наряду с выбором нужного элемента в решение введена новая операция выбора того маршрута, который должен этот элемент присоединить, с использованием при этом двух критериев близости элемента к каждому из маршрутов:

- близость к центру притяжения треугольной модели аппроксимации траектории полета;
- близость к самой траектории при оценке минимального расстояния до него.

3. Расчет состоит из двух этапов — первый этап не учитывает возможную близость двух траекторий и нежелательное включение в план коротких перемычек между ними. Целью этого этапа является разведение центров притяжения маршрутов в разные стороны.

Целью второго этапа является оценка положения выбранного элемента матрицы относительно аппроксимированных траекторий и, в отличие от известного подхода, отказ в ряде случаев от его включения в любой из маршрутов во избежание их лишних пересечений.

4. Предложено обобщение рассмотренного подхода на многомерную маршрутизацию и на случай планирования замкнутых маршрутов, что позволило оценить выигрыш во времени выполнения полета для разомкнутых маршрутов в 2,5...3 раза, для замкнутых маршрутов — в 1,5...2 раза.

5. Как и метод ветвей и границ, предложенный способ расчета является весьма трудоемким. По-

этому для его реализации на борту ЛА в реальном времени необходимо использовать нейросетевые технологии на этапе их обучения.

### Список литературы

1. Лебедев Г. Н., Мирзоян Л. А., Ефимов А. В. Нейросетевое планирование групповых действий ЛА при наблюдении заданной группы подвижных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 11. С. 60—65.
2. Лебедев Г. Н., Ефимов А. В. Применение динамического программирования для маршрутизации облета подвижных объектов в контролируемом регионе // Труды СГАУ. 2012. № 1. С. 63—70.
3. Лебедев Г. Н., Мирзоян Л. А. Маршрутизация полета БЛА с учетом его динамики при наблюдении неподвижных наземных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 12. С. 24—28.
4. Кузин Л. Т. Основы кибернетики. М.: Энергия Т. 1 и Т. 2, 1973.
5. Кюнчи Г. Н., Крилле В. Нелинейное программирование. М.: Сов. радио, 1965.
6. Гришанин Ю. С., Лебедев Г. Н., Липатов А. В., Степьянц Г. А. Теория оптимальных систем. М.: МАИ, 1999. 317 с.
7. Лебедев Г. Н., Тин Пхон Чжо, Зо Мин Тайк, Хахулин Г. Ф., Малыгин В. Б. Оптимальное управление и контроль безопасности поперечного движения речных и воздушных судов при пересечении их маршрутов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 12. С. 50—55.
8. Лебедев Г. Н., Зо Мин Тайк. Синтез оптимального управления боковым движением воздушных или речных судов при пересечении их маршрутов под произвольным углом. М.: Новые технологии, 2014. № 5. С. 61—68.
9. Лебедев Г. Н., Румакина А. В. Система логического управления обхода препятствий беспилотным летательным аппаратом при маршрутном полете // Труды МАИ. 2015. Вып. 83. С. 1—19.
10. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1961. 400 с.
11. Лебедев Г. Н., Мирзоян Л. А. Нейросетевое планирование действий по облету наземных объектов группой летательных аппаратов // Авиакосмическое приборостроение. 2005. № 12.
12. Лебедев Г. Н. Методы принятия оперативных решений в задачах управления и контроля. М.: МАИ, 1992.
13. Летов А. М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
14. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961. 304 с.
15. Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука, 1989. 62 с.
16. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

## Modification of the Integer Branch and Bound Method for Solving of a Two-Dimensional Routing Task of an Aircraft Group's Coordinated Flight

G. N. Lebedev, D. Sc., Professor, e-mail: kaf301@mai.ru,

V. I. Goncharenko, D. Sc., Associate Professor, A. V. Roumakina, Assistant  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation

Corresponding author: Roumakina Alena V., Assistant,  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation  
E-mail: kaf301@mai.ru

Below is a solution for a direct-sales representative in case of a two-dimensional routing of a flight, which differs by formation of two initial matrixes of the distances between the points of two unlinked routes, which are analyzed in turn with a coordinated selection of the element of the minimal length in each of them. In comparison with the known branch and bound method, there is no need in an additional choice for an alternative, which is essentially new in the solved task — to which of the two routes the element should belong to. For this purpose it is necessary to know, to what route it is closer to, and for evaluation of this proximity two criteria are used: — at the first stage of calculation on each step it is the calculation of the minimal distance from an element to the center of gravity of each of the routes by using the triangular model of approximation of the flight trajectory. This allows us to part gradually step by step the centers of gravity at a certain distance, sufficient to continue the calculations; — at the second stage of calculation, the minimal distances from the element to the approximated trajectories of each route are calculated, which allows us to refuse in case of their equality in general accession of the element to any route and by that to avoid an unnecessary inclusion of the crossing points between them. Examples of the calculations proving the efficiency of the offered approach and indicating reduction of the performance of the flight of points more than twice are presented.

**Keywords:** unmanned flying vehicle, multi-dimensional routing, in-flight safety, integer programming

**Acknowledgements:** This work was supported by RFBR material 16-08-00-832-a, 15-08-00043 grants

For citation:

**Lebedev G. N., Goncharenko V. I., Roumakina A. V.** Modification of the Integer Branch and Bound Method for Solving of a Two-Dimensional Routing Task of an Aircraft Group's Coordinated Flight, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 11, pp. 783—791.

DOI: 10.17587/mau.17.783-791

#### References

1. **Lebedev G. N., Mirzozan L. A., Efimov A. V.** *Nejroseteivoje planirovanie gruppovyh dejstvij LA pri nablyudenii zadannoj gruppy podvizhnyh obektov* [Neural network planning group actions of aircraft under the supervision of a given group of mobile objects], *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no.11, pp. 60—61.
2. **Lebedev G. N., Efimov A. V.** *Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya dlya marshrutizatsii obleta podvizhnyh obektov v kontroliruemom regione* [Use dynamic programming to route over moving objects in the monitored region], *Trudy SGAU*, 2012, no. 1.
3. **Lebedev G. N., Mirzoyan L. A.** *Marshrutizatsiya poleta BLA s uchetom ego dinamiki pri nablyudenii nepodvizhnyh nazemnyh obektov* [Routing of the UAV taking into account its dynamics when the observation of fixed objects], *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 12, pp. 24—28.
4. **Kuzin L. T.** *Osnovy kibernetiki* [Foundations of Cybernetics], Moscow, Ehnergiya, 1973.
5. **Kyunci G. N., Krille V.** *Nelinejnoe programmirovanie* [Nonlinear programming]. Moscow: Publishing house "Sov. radio", 1965.
6. **Grishanin Ju.S., Lebedev G. N., Lipatov A. V., Stepan'janc G. A.** *Teoriya optimal'nyh sistem* [The theory of optimal systems], Moscow, Publishing house "MAI", 1999, 317 p.

7. **Lebedev G. N., Tin Phon Chzho, Zo Min Tajk, Hahulin G. F., Malygin V. B.** *Optimal'noe upravlenie i kontrol' bezopasnosti poperechnogo dvizheniya rechnyh i vozdushnyh sudov pri peresechenii ih marshrutov* [Optimal control and security control lateral movement of river vessels and aircraft crossing their routes], *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 12, pp. 50—55.

8. **Lebedev G. N., Zo Min Tajk.** *Sintez optimal'nogo upravleniya bokovym dvizheniem vozdushnyh ili rechnyh sudov pri peresechenii ih marshrutov pod proizvol'nym uglom* [Synthesis of optimal control of the lateral movement of air or sea vessels crossing their routes at any angle], *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 5, pp. 61—68.

9. **Lebedev G. N., Rumakina A. V.** *Sistema logicheskogo upravleniya obhoda prepyatstvij bespilotnym letatel'nom apparatom pri marshrutnom polete* [Logic control system to avoid obstructions unmanned aerial vehicle during cross-country flights], *Trudy MAI*, 2015, iss. 83.

10. **Bellman R.** *Dinamicheskoe programmirovanie* [Dynamic programming], Moscow, Foreign literature, 1961, 400 p.

11. **Lebedev G. N., Mirzoyan L. A.** *Neyroseteivoje planirovanie deystviy po obletu nazemnykh obektov gruppy letatel'nykh apparatov* [Neuronet action planning for flyby terrestrial objects, by a group of aircraft], *Aviakosmicheskoe priborostroenie*, 2005, no. 12.

12. **Lebedev G. N.** *Metody prinyatiya operativnykh resheniy v zadachakh upravleniya i kontrolya* [Methods for operational solution of the problems of management and control], Moscow: Publishing house "MAI", 1992.

13. **Letov A. M.** *Dinamika poleta i upravleniya* [Flight dynamics and control], Moscow, Nauka, 1969, 360 p.

14. **Gass S.** *Lineynoe programmirovanie* [Linear programming], Moscow, Fizmatgiz, 1961, 304 p.

15. **Pontryagin L. S.** *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [The maximum principle in optimal control], Moscow, Nauka, 1989, 62 p.

16. **Pontryagin L. S.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes], Moscow, Nauka, 1983, 393 p.