УДК 681.513 DOI:10.17587/mau.17.723-731

Кай Шэнь, аспирант, shenkaichn@mail.ru,
Нанкинский университет науки и технологий,
К. А. Неусыпин, д-р техн. наук, проф., neysipin@mail.ru,
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Исследование критериев степеней наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости линейных динамических систем[1]

Рассмотрены подходы к решению задач определения степени наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости параметров линейных динамических систем. Исследованы численные критерии вычисления степени наблюдаемости, управляемости компонент вектора состояния и степени идентифицируемости конкретных параметров модели динамического объекта с использованием скалярного подхода. Указаны примеры практического использования исследуемых критериев и намечены дальнейшие направления исследований.

Ключевые слова: *модель динамического объекта, степень идентифицируемости, степень управляемости, степень наблюдаемости*

Введение

Решение задач управления различными динамическими объектами предполагает использование математической модели исследуемого процесса. Изменение параметров динамической системы в процессе функционирования, а также изменение параметров и/или структуры математической модели приводит к изменению статистических и динамических свойств исследуемой системы.

В теории управления для определения свойств систем используются такие понятия, как устойчивость, наблюдаемость, управляемость, идентифицируемость. Известны разнообразные критерии оценки этих свойств [1—3]. Однако в практических приложениях часто недостаточно получить принципиальный ответ на вопрос: устойчива, наблюдаема, управляема, идентифицируема система или нет? Желательно оценить качества исследуемой динамической системы: максимум ошибки, быстродействие, различные интегральные оценки, запас устойчивости, чувствительность, степени наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости [4—7].

Запас устойчивости определяется путем решения дифференциального уравнения замкнутой системы, подверженной влиянию внешних возмущений. Другой подход предполагает исследование значений запасов устойчивости по амплитуде и по фазе, которые определяются по годографу комплексной частотной характеристики разомкнутого контура и логарифмическим амплитудно- и фазово-частотным характеристикам [1].

Весьма распространенным показателем качества системы с обратной связью является функция чувствительности (ФЧ). Под чувствительностью понимают зависимость характеристик исследуемой системы от изменения ее параметров. ФЧ — это частные производные от координат системы или показателей качества процессов по вариациям параметров [6—8]. Чем больше чувствительность, тем сильнее влияет исследуемый параметр на выходной сигнал системы.

М. Л. Быховский разработал структурный метод построения моделей для вычисления ФЧ [8]. В практических приложениях теория чувствительности, основанная на понятии ФЧ, нашла различные приложения, например, в задачах синтеза систем управления [9]; для совершенствования моделей с применением ФЧ и схемы замещения системы передачи и распределения электроэнергии [10]; в методе определения дальности цели пассивными комплексами [11].

Критерии оценки качества системы с помощью запаса устойчивости и ФЧ хорошо теоретически отработаны и имеют широкое практическое применение. Данные качественные характеристики моделей системы имеют явно выраженную связь: мерой чувствительности системы к параметрическим возмущениям служат запасы устойчивости по амплитуде и фазе.

Другие качественные характеристики моделей динамических систем — показатели степени наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости — разработаны не так подробно, как запас устойчи-

[1] Работа выполнена при поддержке the Programme of Introducing Talents of Discipline to Universities in P. R. China ("программа 111", No. B 16025).

вости и чувствительность, представлены отдельными критериями, и создание общей теории является перспективной задачей.

Известные критерии [1—4] определения степени наблюдаемости и степени управляемости позволяют определить лишь то, какие из компонент одного вектора состояния наблюдаются или управляются лучше. Эти критерии дают только относительную оценку качественных характеристик компонент конкретного вектора состояния исследуемой системы и не позволяют проводить сравнение компонент векторов состояния различных систем. Поэтому они неудобны для использования при сравнении качества наблюдения, управления и идентификации в общем случае. Обычно в практических приложениях необходимо знать, возможно ли эффективное наблюдение и управление каждой конкретной компонентой вектора состояния. Для этого введено понятие меры или степени наблюдаемости (управляемости) [12] каждой конкретной переменной состояния. При проведении параметрической идентификации также целесообразно знать качественные характеристики этого процесса, которые определяются степенью идентифицируемости каждого исследуемого параметра матрицы модели.

Вопрос о степени наблюдаемости ("не только наблюдаемы, а как наблюдаемы") впервые рассмотрен Р. Г. Брауном в 1966 г. [13]. После этого было предложено несколько критериев степени наблюдаемости. Сначала Х. Л. Аблином определен критерий степени наблюдаемости с помощью взаимного отношения значений ошибок оценивания переменных вектора состояния и ошибок наблюдения (измерения) [14]. Затем Ф. М. Хамом и Р. Г. Брауном доказано, что собственные числа и собственные векторы ковариационной матрицы ошибок оценивания могут предоставить полезную информацию о наблюдаемости системы [15]. С точки зрения точности оценивания степень наблюдаемости может определяться соотношением дисперсии произвольной компоненты вектора состояния и дисперсии непосредственно измеряемого вектора состояния [16, 17].

В настоящей статье авторы сделали важный шаг к обобщению результатов в этой области. Материал содержит результаты, касающиеся линейных динамических систем. Известные результаты в исследуемой области для нелинейных систем носят фрагментарный характер и по этой причине не рассмотрены. Однако следует отметить такие многообещающие направления исследований и полученные результаты, как применение современной дифференциальной геометрии для переформулирования в геометрических терминах понятий наблюдаемости и управляемости для нелинейных систем, которые проводятся А. Г. Кушнером.

Критерии наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости

Наблюдаемость, управляемость и идентифицируемость играют важную роль при синтезе систем управления динамическими объектами, оценивании состояния и идентификации их параметров.

Понятия наблюдаемости и управляемости дуальны, т.е. если система полностью наблюдаема, то построенная для этой системы сопряженная система будет полностью управляема. Справедливо и обратное утверждение. Следовательно, для определения наблюдаемости можно построить сопряженную систему, которую затем исследовать с помощью какого-либо критерия управляемости, что существенно расширяет методологический аппарат для исследования этих характеристик.

Заметим, что критерий полной управляемости не связан как-либо с устойчивостью системы. Поэтому неустойчивая система может быть полностью управляемой и наоборот. Полная управляемость означает стабилизируемость системы, т.е. возможность путем присоединения регулятора создать замкнутую систему с желаемым распределением собственных значений.

Одним из популярных критериев является критерий Калмана [1—3], который отличается простотой и широко используется в практических приложениях.

Пусть объект описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-вектор состояния; $\mathbf{u}$ — m-вектор управления; $\mathbf{z}$ — l-вектор измерений; $\mathbf{A}$ — $(n\times n)$-матрица системы; $\mathbf{B}$ — $(n\times m)$-матрица управления; $\mathbf{C}$ — $(l\times n)$-матрица измерений.

Система (1) называется *полностью наблюдаемой* на интервале времени $[0, t_1]$, если вектор состояния $\mathbf{x}(t_0)$ можно определить по известному вектору измерений $\mathbf{z}(t)$. Проверку наблюдаемости можно осуществить, воспользовавшись критерием полной наблюдаемости Калмана. Система (1) является полностью наблюдаемой, если ранг матрицы наблюдаемости $\mathbf{S}$ равен порядку системы n, т.е. если измерения $\mathbf{z}(t)$ содержат достаточную информацию для определения $\mathbf{x}(t_0)$. Матрица наблюдаемости $\mathbf{S}$ имеет вид

$$\mathbf{S} = [\mathbf{C}^{\mathrm{T}}|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}|(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^2\mathbf{C}^{\mathrm{T}}|...(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}]. \tag{2}$$

В случае если ранг матрицы наблюдаемости меньше порядка системы, то по измерениям $\mathbf{z}(t)$ можно оценить лишь часть вектора состояния $\mathbf{x}(t)$.

Другой критерий предусматривает каноническое преобразование, в результате которого получается система уравнений с некратными собственными значениями, связь между которыми по переменным состояниям отсутствует [4]. В этом случае критерий полной управляемости системы заключается в отсутствии нулевых элементов в канонической матрице системы $\mathbf{B}^* = [b_{ij}^*]$ [4]. Если в матрице $\mathbf{B}^*$ все элементы i-й строки равны нулю, то любым выбором управления u_j нельзя изменить переменную x_i, т.е. система не является полностью управляемой. Напротив, если в матрице $\mathbf{B}^*$ нет строк с нулевыми элементами, то можно любую переменную состояния x_i^* перевести от значения $x_i^*(t_0)$ к любому желаемому значению $x_i^*(t_1)$, т.е. система полностью управляема. Это можно видеть из решения системы:

$$x_i^*(t_1) = \mathbf{e}^{\lambda_i(t_1 - t_0)} x_i^*(t_0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{\lambda_i(t_1 - \tau)} b_{ij}^* u_j(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Если строки матрицы $\mathbf{B}^*$ линейно зависимы друг друга, то система тоже не полностью управляема.

Известны различные критерии определения степени идентифицируемости или условия определимости [5—7].

Критерий, предложенный Н. А. Балониным [5], позволяет определить принципиальную возможность осуществления процедуры идентификации.

Модель линейной однородной системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (4)$$

где вектор состояния $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

Линейная однородная система называется *полностью идентифицируемой по вектору состояния*, если при заданном векторе начальных условий $\mathbf{x}_0$ матрица параметров $\mathbf{A}$ может быть однозначно восстановлена за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

Иначе, пара $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$ *полностью идентифицируема или идентифицируема вполне*, когда множество пар $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$, объединенных общностью интегральной кривой $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, вырождается в точку $\mathbf{A}$. В противном случае пара неидентифицируема.

Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$ имеет следующий вид:

$$\text{ранг}[\mathbf{W}_0] = \text{ранг}[\mathbf{x}_0, \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_0] = n, \quad (5)$$

где $\mathbf{W}_0$ — матрица идентифицируемости.

Данный критерий предполагает определение фундаментальной возможности идентификации параметров динамической системы.

Известен критерий, предложенный А. В. Балакришнаном [6], основанный на конкретном критерии идентифицируемости.

Анализируется линейная модель сигнала с известной и наблюдаемой дисперсией. Исследован процесс оценивания матрицы $\mathbf{B}$ по наблюдаемым последовательно данным, а не по всей выборке, при известном векторе управления $\mathbf{u}$ и предположении, что матрица $\mathbf{A}$ устойчива.

Для получения оценки безусловного максимума правдоподобия нужно использовать все имеющиеся данные, и, кроме того, дополнительная трудность состоит в необходимости оценивания начального состояния. При построении оценки, которая является последовательной, или "текущей", и не использует какую-либо оценку состояния, необходимо предположить, что выполнено "условие определимости", которое накладывает ограничение на входную последовательность, т.е. при выполнении условия определимости (и устойчивости матрицы $\mathbf{A}$) ковариационная матрица погрешности

$$E[(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_n)(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_n)^*] \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (6)$$

Вычисление критерия идентифицируемости по данной методике предполагает сложные математические вычисления, поэтому в практическом плане применять его затруднительно.

Другой известный критерий идентифицируемости предложен С. А. Айвазяном [7]. Исследуется система одновременных уравнений в структурной форме, определяющих связь между экзогенными и эндогенными переменными.

Рассмотрим некоторые наиболее важные типы ограничений и приведем критерии идентифицируемости. Предполагается, что априорные ограничения являются линейными однородными функциями, каждая из которых зависит только от коэффициентов матрицы $\mathbf{Q}$, которые могут быть однозначно восстановлены по матрице приведенной формы $\mathbf{\Pi} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Gamma}$, где $\mathbf{D}$ — матрица, состоящая из коэффициентов при эндогенных переменных; $\mathbf{\Gamma}$ — матрица, состоящая из коэффициентов предопределенных переменных.

Пусть $\mathbf{I}_k$ — $(k \times k)$-единичная матрица. Введем обозначение $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{I}_k \end{bmatrix}$.

Соотношение $\mathbf{D\Pi} + \mathbf{\Gamma} = 0$ между структурной и приведенной формами может быть записано в виде

$$\mathbf{QW} = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{Q}$ — матрица порядка $g \times (g + k)$; $\mathbf{W}$ — матрица порядка $(g + k) \times k$, имеющая ранг k.

Пусть $\alpha_1\mathbf{F} = 0$, где $\mathbf{F}$ — матрица из $g + k$ строк, имеющая столько столбцов, сколько ограничений; α_1 — первая строка матрицы $\mathbf{Q}$. Например, пусть априори известно, что коэффициент системы одновременных уравнений в структурной форме $\beta_{12} = 0$. Тогда один из столбцов матрицы $\mathbf{F}$ имеет вид $(0, 1, 0, ..., 0)^{\mathrm{T}}$.

Элементы вектора α_1 являются решением системы уравнений

$$\alpha_1[\mathbf{WF}] = 0. \quad (8)$$

В силу правила нормализации для идентифицируемости первого уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы пространство решений системы было одномерным, т.е.

$$\mathrm{rg}[\mathbf{WF}] = g + k - 1. \quad (9)$$

Пусть η — число ограничений. Тогда матрица $[\mathbf{WF}]$ содержит $k + \eta$ столбцов и для выполнения (9) необходимо, чтобы $\eta \geqslant g - 1$, т.е. для идентифицируемости какого-либо из уравнений необходимо, чтобы число ограничений было не меньше числа уравнений модели, уменьшенного на единицу.

Если имеются только исключающие ограничения, т.е. априорная информация о равенстве нулю некоторых коэффициентов, то необходимое условие идентифицируемости определенного уравнения заключается в следующем: число исключенных из уравнения экзогенных переменных должно быть не меньше числа участвующих в нем эндогенных переменных, уменьшенного на единицу.

Сформулированные необходимые условия (так называемые правила порядка) в силу своей простоты являются весьма полезными при решении проблемы идентифицируемости, поскольку при построении модели они позволяют сразу выявить неидентифицируемые уравнения. Однако эти условия могут оказаться далекими от достаточных. Необходимое и достаточное условие (9) не подходит для проверки идентифицируемости модели, поскольку требует построения матрицы $\mathbf{\Pi}$. На основе соотношения (9) сформулирован критерий идентифицируемости.

Первое уравнение системы идентифицируемо тогда и только тогда, когда $\mathrm{rg}[\mathbf{QF}] = g - 1$. Это утверждение можно получить из соображений, связанных с инвариантностью коэффициентов при умножении структурной формы на допустимые матрицы. Этот метод обычно применяется только для теоретических абстрактных задач.

На практике часто применяется критерий идентифицируемости в алгебраической форме, полученный на основе метода матричных делителей нуля [18, 19].

Представленные критерии идентифицируемости не позволяют проводить сравнение качества идентификации параметров различных моделей и не всегда удобны в применении на практике.

Таким образом, все упомянутые критерии определения степеней наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости неудобны для использования при сравнении качественных характеристик в общем случае.

Критерии степени наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости

Критерии степени наблюдаемости. В работе [12] представлен критерий степени наблюдаемости, который позволяет выделить слабонаблюдаемые компоненты вектора состояния и сформировать эффективно оцениваемый вектор состояния. Другой известный критерий, позволяющий определить качество оценивания переменных состояния, предполагает проведение предварительных преобразований, включающих три этапа [15]: вычисление ковариационной матрицы ошибок оценивания; нормализацию ковариационной матрицы ошибок оценивания; вычисление собственных чисел нормализованной ковариационной матрицы ошибок оценивания. Критерий степени наблюдаемости формулируется следующим образом: чем меньше собственное число, тем лучше наблюдаема компонента вектора состояния. Представленный критерий чрезвычайно неудобен в практическом применении, так как требует проведения большого объема предварительных вычислений.

В различных практических приложениях нашел широкое применение критерий степени наблюдаемости [16, 17], позволяющий определять степень наблюдаемости в виде скалярной величины. Рассмотрим этот критерий подробнее.

Пусть объект описывается уравнением вида [20]

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\mathbf{w}_{k-1}, \tag{10}$$

где $\mathbf{x}_{k-1}$ — n-вектор состояния; $\mathbf{w}_{k-1}$ — l-вектор входного шума, который является дискретным аналогом белого гауссового шума с нулевым математическим ожиданием; $\mathbf{\Phi}$ — $(n\times n)$-матрица системы; $\mathbf{G}$ — $(n\times l)$-матрица входного шума.

Часть вектора состояния измеряется:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \tag{11}$$

где $\mathbf{z}_k$ — m-вектор измерений; $\mathbf{H}$ — $(m\times n)$-матрица измерений; $\mathbf{v}_k$ — m-вектор измерительного шума, который является дискретным аналогом белого гауссового шума с нулевым математическим ожиданием, причем $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ некоррелированы между собой, т.е. $E[\mathbf{v}_j\mathbf{w}_k^{\mathrm{T}}] = 0$.

Используем скалярный подход [16]: не теряя общности постановки задачи, предположим, что измеряется одна компонента вектора состояния, т.е. $\mathbf{H} = [1, 0, ..., 0]$. Разобьем каждый шаг измерений на n подтактов и выразим эти измерения через вектор состояния на первом подтакте измерений:

$$\begin{gathered} z_1 = \mathbf{H}\mathbf{x}_1 + v_1, \\ z_2 = \mathbf{H\Phi}\mathbf{x}_1 + \mathbf{H}\mathbf{w}_1 + v_2, \\ \dots\ \dots\ \dots \\ z_n = \mathbf{H\Phi}^{n-1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{H\Phi}^{n-2}\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{H}\mathbf{w}_{n-1} + v_n \end{gathered} \tag{12}$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{S}\mathbf{x}_1 + \mathbf{v}^*, \tag{13}$$

где $\mathbf{z}^* = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H\Phi} \\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{H}\mathbf{w}_1 + v_2 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-2}\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{H}\mathbf{w}_{n-1} + v_n \end{bmatrix}.$$

Выразим из уравнения объекта вектор состояния в первом подтакте измерения:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{z}^* - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{v}^*. \qquad (14)$$

Введем обозначение $\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{z}^*$ и запишем уравнения в скалярном виде:

$$y^i = a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + ... + a_{in}z_n. \qquad (15)$$

Здесь y^i — элемент вектора $\mathbf{y}$, a_i — это i-я строка матрицы $\mathbf{S}^{-1}$.

Для остальных компонент вектора состояния уравнения измерений формулируются в соответствии с уравнением (15).

Введем понятие приведенного измерительного шума [17]. Для произвольной компоненты вектора состояния приведенный измерительный шум в соответствии с уравнением (15) имеет вид

$$v^{*i} = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + ... + a_{in}v_n. \qquad (16)$$

Дисперсия приведенного к i-й компоненте измерительного шума определяется коэффициентами a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, т.е.

$$r^{*i} = E[(v^{*i})^2] = [a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{in}^2]r, \qquad (17)$$

где $r = E[v^2]$ — дисперсия исходного измерительного шума v.

Численный критерий степени наблюдаемости. Судить о степени наблюдаемости можно по двум характеристикам — точности оценивания и времени сходимости. Критерий степени наблюдаемости имеет вид [16, 17]

$$\lambda^i = \frac{E[(x^i)^2]r}{E[(y^i)^2]r^{*i}}. \qquad (18)$$

Здесь $E[(x^i)^2]$ — дисперсия произвольной i-й компоненты вектора состояния; $E[(y^i)^2]$ — дисперсия непосредственно измеряемого вектора состояния.

Данный критерий применялся для выбора наилучшей структуры навигационного комплекса ЛА [21] в задаче синтеза адаптивного регулятора инерциальной навигационной системы [22].

Критерии степени управляемости. Критерий управляемости Калмана позволяет определить, управляем ли весь вектор состояния системы. Критерий, предложенный в работе [23], позволяет определить, какие компоненты вектора состояния управляемы, и выделить компоненты, которыми можно управлять наилучшим образом. Исключив из вектора состояния неуправляемые компоненты, можно достичь полной управляемости исследуемой системы.

Рассматривается в данном случае сопряженная система (19), и к ней применяется критерий полной управляемости:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_c(t); \\ &\mathbf{z}_c(t) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_c(t). \end{aligned} \qquad (19)$$

Для того чтобы воспользоваться этим критерием, необходимо перейти от матричного уравнения системы к рассмотрению системы скалярных уравнений. Затем нужно перевести скалярные уравнения из пространства оригиналов в пространство изображений по Лапласу и разрешить полученную систему уравнений относительно каждой переменной. Анализу подвергаются найденные по правилу Крамера определители. Система вида полностью управляема, если найденные определители линейно независимы, и ни один из них не равен нулю.

Рассмотрим критерий управляемости вида

$$C_1\Delta_1 + C_2\Delta_2 + ... + C_n\Delta_n \neq 0, \qquad (20)$$

где Δ_i — правые части дифференциального уравнения рассматриваемой системы, т.е. решения этой системы относительно каждой переменной состояния; C_i — постоянные коэффициенты, которые выбираются произвольным образом, но хотя бы один из них не должен быть равным нулю.

Данный критерий позволяет получить непосредственную связь между компонентами вектора состояния и компонентами вектора управления. Эта связь позволяет выносить суждение о степени управляемости по той или иной переменной состояния. В случае одинаковой структуры выражений Δ по коэффициентам этих выражений можно судить о степени управляемости.

Степень управляемости можно определить, исследовав систему канонического вида, т.е. систему уравнений, в которой отсутствует связь по переменным состояния.

Запишем уравнение исследуемой системы в канонической форме [4]:

$$\dot{\mathbf{x}}_c^k(t) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_c^k(t) + \mathbf{C}^k\mathbf{u}_c^k(t), \qquad (21)$$

здесь $\mathbf{A}^k = -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$, $\mathbf{C}^k = -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{V} = [\boldsymbol{\upsilon}_1, ..., \boldsymbol{\upsilon}_n]^{\mathrm{T}}$ — матрица канонического преобразования, $\boldsymbol{\upsilon}_i$ — собственные векторы исследуемой системы.

Система является полностью управляемой, если матрица $\mathbf{C}^k$ канонической системы (21) не содержит строк, все элементы которых равны нулю. Следует отметить, что данный критерий можно применять лишь в случае отсутствия кратных собственных значений системы. Степень управляемости характеризуют модули элементов строк матрицы $\mathbf{C}^k$. Представленный критерий позволяет проводить сравнительный анализ управляемости и определять, лучше или хуже управляемы компоненты вектора состояния по сравнению друг с другом. Лучше управляемы те компоненты вектора состояния, у которых модули элементов строк матрицы больше модулей соответствующих элементов у других строк.

Другим подходом для определения степени управляемости динамических систем является их исследование на динамических стендах и построение диаграмм, определяющих связь эффективности управления в различных режимах [24, 25]. Недостатком такого подхода является необходимость проведения длительных экспериментов на дорогостоящем оборудовании, субъективная оценка экспертом свойств исследуемой системы. Наиболее ярким примером реализации такого подхода является исследование управляемости летательного аппарата (ЛА) на динамическом стенде [24].

Численный критерий степени управляемости конкретных переменных состояния динамического объекта позволяет получить численную оценку степеней управляемости компонент вектора состояния.

Рассмотрим уравнение в канонической форме вида (21). Определим каноническую матрицу управляемости и исследуем суммы элементов каждой ее строки. Обозначим h_i суммы модулей элементов каждой строки этой матрицы, которые позволяют судить о степени управляемости компонент вектора состояния модели ЛА.

Максимальной степенью управляемости обладает компонента вектора состояния с наибольшей суммой модулей элементов соответствующей строки канонической матрицы управления $h_{\max}$. Степени управляемости других компонент вектора состояния определяются путем сравнения сумм модулей элементов строк канонической матрицы, соответствующих исследуемым компонентам вектора состояния с максимальным значением суммы модулей элементов канонической матрицы. Сравнить степени управляемости можно, воспользовавшись критерием следующего вида [26]:

$$\gamma = \frac{h_i}{h_{\max}}, \tag{22}$$

где h_i — модуль суммы элементов, которые находятся в i-й строке матрицы $\mathbf{B}^*$; $h_{\max}$ — максимальное значение h_i.

Предложенный критерий степени управляемости позволяет определить степень управляемости каждой конкретной компоненты вектора состояния в численном виде γ.

В соответствии с представленным численным критерием степени управляемости компонент вектора состояния мерой управляемости является конкретное число. Этот критерий удобен при автоматизированном проектировании систем управления, так как позволяет включать в вектор управления и вектор состояния только эффективно управляемые компоненты. Примером использования критерия является решение задачи выявления участков наиболее эффективного управления полетом баллистической ракеты [24].

Численный критерий степени идентифицируемости. Ставится задача оценивания неизвестных постоянных параметров матрицы объекта $\mathbf{\Phi}$, которая входит в уравнение объекта (10). Уравнение измерений имеет вид (11).

Вектор состояния $\mathbf{x}_{n+1}$ можно выразить через его значение в первый момент времени следующим образом:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{\Phi}^n\mathbf{x}_1 + \mathbf{\Phi}^{n-1}\mathbf{w}_1 + ... + \mathbf{w}_n. \tag{23}$$

Подставив выражение для x_{n+1} в уравнение измерений z_{n+1}, получим

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{H\Phi}^n\mathbf{x}_1 + \mathbf{H\Phi}^{n-1}\mathbf{w}_1 + ... + \mathbf{Hw}_n + \mathbf{v}_{n+1}. \tag{24}$$

Подставим в это уравнение выражение $\mathbf{x}_1$, тогда

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{H\Phi}^n \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H\Phi} \\ \mathbf{H\Phi}^2 \\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \dots \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix} -$$

$$- \mathbf{H\Phi}^n \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H\Phi} \\ \mathbf{H\Phi}^2 \\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{Hw}_1 \\ \mathbf{H\Phi w}_1 + \mathbf{Hw}_2 + \mathbf{v}_3 \\ \dots\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-2}\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{v}_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \mathbf{H\Phi}^{n-1}\mathbf{w}_1 + \mathbf{H\Phi}^{n-2}\mathbf{w}_2 + ... + \mathbf{Hw}_n + \mathbf{v}_{n+1}. \tag{25}$$

Введем обозначения:

$$[d_1\ d_2\ ...\ d_n] = \mathbf{H\Phi}^n \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H\Phi} \\ \mathbf{H\Phi}^2 \\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{26}$$

$$\mathbf{v}_1^0 = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + ... +$$
$$+ b_n\mathbf{w}_n - d_1\mathbf{v}_1 - d_2\mathbf{v}_2 - ... - d_n\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1} =$$
$$= \mathbf{H\Phi}^n \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H\Phi} \\ \mathbf{H\Phi}^2 \\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{Hw}_1 \\ \mathbf{H\Phi w}_1 + \mathbf{Hw}_2 + \mathbf{v}_3 \\ \dots\ \dots \\ \mathbf{H\Phi}^{n-2}\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{v}_n \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Таким образом, постановка задачи сводится к определению неизвестных элементов вектора-столбца $[d_1\ d_2\ ...\ d_n]$ по вновь сформированным измерениям. Для $n + 2$, $n + 3$, ..., $2n$ моментов времени по аналогии можно записать уравнения для вновь сформированных измерений:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ z_{n+3} \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ z_2 & \cdots & z_{n+1} \\ z_3 & \cdots & z_{n+2} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ z_n & \cdots & z_{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \\ \dots \\ v_n^0 \end{bmatrix}, \qquad (28)$$

откуда может быть выражен вектор-столбец, состоящий из неизвестных параметров d_1, d_2, ..., d_n:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ z_2 & \cdots & z_{n+1} \\ z_3 & \cdots & z_{n+2} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ z_n & \cdots & z_{2n-1} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ z_{n+3} \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \\ \dots \\ v_n^0 \end{bmatrix} \right\}. \qquad (29)$$

Уравнение для вектора неизвестных параметров в скалярной форме будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} d_1 &= f_1(z_1, ..., z_{2n}) + v_1^{00}; \\ d_2 &= f_2(z_1, ..., z_{2n}) + v_2^{00}; \\ &\dots\ \dots\ \dots \\ d_n &= f_n(z_1, ..., z_{2n}) + v_n^{00}. \end{aligned} \qquad (30)$$

Здесь

$$\begin{bmatrix} f_1(z_1, \dots, z_{2n}) \\ f_2(z_1, \dots, z_{2n}) \\ f_3(z_1, \dots, z_{2n}) \\ \dots \\ f_n(z_1, \dots, z_{2n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ z_2 & \cdots & z_{n+1} \\ z_3 & \cdots & z_{n+2} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ z_n & \cdots & z_{2n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ z_{n+3} \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} v_1^{00} \\ v_2^{00} \\ v_3^{00} \\ \dots \\ v_n^{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ z_2 & \cdots & z_{n+1} \\ z_3 & \cdots & z_{n+2} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ z_n & \cdots & z_{2n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \\ \dots \\ v_n^0 \end{bmatrix}.$$

Точность определения параметров зависит от интенсивности приведенного измерительного шума. Приведенный измерительный шум может достигать значительных значений, что приводит к недостоверному определению параметров d. Поэтому для определения неизвестных параметров целесообразно использовать алгоритмы сглаживания измерительных шумов и алгоритмы оценивания. В качестве алгоритмов оценивания можно использовать адаптивные модификации фильтра Калмана [4, 26]. В этом адаптивном алгоритме проводится оценка дисперсии измерительного шума с помощью выражения вида

$$\hat{r}_k^i = \frac{1}{2}\sqrt{\{p_0^1 k - E[(v_k^i)^2]\}^2 + 4E[(v_k^i)^2]p_0(k-1)} - \\ - \frac{1}{2}\{p_0^i k - E[(v_k^i)^2]\}. \qquad (31)$$

В практических приложениях часто необходимо знать степень идентифицируемости параметров, т.е. качественные характеристики идентифицируемых параметров: возможную точность идентификации параметров и время, за которое можно осуществить идентификацию параметра с заданной точностью.

Судить о мере идентифицируемости можно по двум характеристикам: точности идентификации и времени сходимости. Критерий, по которому определяется степень идентифицируемости, имеет вид [27]

$$\chi^i = \frac{E[(d^i)^2]r}{E[(z^i)^2]r^{*i}}, \qquad (32)$$

где $E[(d^i)^2]$ — дисперсия произвольной i-й компоненты вектора параметров d^i; $E[(z^i)^2]$ — дисперсия непосредственно измеряемой компоненты вектора параметров; $r = E[v^2]$ — дисперсия исходного измерительного шума;

$r_k^{*i} = \frac{1}{2}\sqrt{\{p_0^1 k - M[(v_k^i)^2]\}^2 + 4M[(v_k^i)^2]p_0(k-1)} - \frac{1}{2}\{p_0^i k - M[(v_k^i)^2]\}$ — дисперсия приведенного измерительного шума.

В критерии степени идентифицируемости (32) мерой качества идентификации является скаляр. Эта особенность позволяет проводить сравнение степеней идентифицируемости компонент векторов параметров матриц различных объектов.

Таким образом, формализованная зависимость (32) используется для определения степени идентифицируемости параметров матрицы **Ф**. Дисперсия исходного измерительного шума определяется из практических соображений в соответствии с режимом работы измерительной системы или принимается значение из паспорта измерительного прибора. Определенные сложности возникают при вычислении приведенного измерительного шума. Однако при использовании при идентификации параметров матрицы модели исследуемой системы скалярного адаптивного алгоритма оценивания дисперсия приведенного измерительного шума вычисляется на каждом шаге функционирования алгоритма.

Качество идентификации или эффективность идентификации определяется максимально достижимой точностью идентификации и необходимым временем достижения заданной точности идентификации.

Заключение

Исследованные численные критерии степени наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости имеют ясный физический смысл, отличаются простотой, универсальностью, позволяют определять качество наблюдения и управления компонент вектора состояния, а также идентификации параметров в виде скаляра, что чрезвычайно удобно при использовании в практических приложениях.

Можно констатировать, что свойство дуальности в исследованных критериях степени наблюдаемости и управляемости явно не проявляется. Интуитивно ясно, что имеется связь между степенью управляемости и запасом устойчивости, степенью наблюдаемости и степенью идентифицируемости, но для получения формализованных зависимостей в явном виде требуются дополнительные исследования. Систематизация результатов подобных исследований существенно дополнит теорию качественного анализа систем.

Список литературы

1. **Воронов А. А.** Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
2. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
3. **Брайсон, Хо Ю Ши.** Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
4. **Кузовков Н. Т., Карабанов С. В., Салычев О. С.** Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978.
5. **Балонин Н. А.** Теоремы идентифицируемости. СПб.: Политехника, 2010.
6. **Балакришнан А. В.** Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988.
7. **Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.** Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.
8. **Yusupov R., Rozenwasser E.** Sensitivity of Automatic Control Systems. London: CRS Press, 1999.
9. **Ивановский Р. И., Игнатов А. А.** Теория чувствительности в задачах управления и оценки. СПб.: ЦНИИ "РУМБ", 1986.
10. **Шмидт С. В., Белова Д. Ю., Калиев Б. З.** Применение функции чувствительности к энергетическим задачам // Онлайн Электрик: Электроэнергетика. Новые технологии, 2012. URL: http // www.jgline-electric.ru/articles.php?id = 30 (дата обращения:10.05.15).
11. **Ткаченко В. Н., Коротков Е. К., Поздняков Е. К.** Исследование исходных параметров метода определения дальности целей в пассивных многопозиционных системах при помощи функции чувствительности // Изв. ЮФУ. Технические науки, 2014. № 8 (157). С. 170—177.
12. **Парусников Н. А., Морозов В. М., Борзов В. И.** Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: МГУ, 1982.
13. **Brown R. G.** Not just observable, but how observable? // National Electronics Conference Proceedings. 1966. N. 22. P. 409—714.
14. **Ablin H. L.** Criteria for degree of observability in a control system // Retrospective Theses and Dissertations. Paper 3188. Iowa State University, 1967.
15. **Ham F. M., Brown R. G.** Observability, eigenvalues, and Kalman filtering // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1983. Vol. AES-19, Iss. 2. P. 269—273.
16. **Kai Shen, Neusypin K. A., Proletarsky A. V.** On State Estimation of Dynamic Systems by Applying Scalar Estimation Algorithms // Proc. of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference. 2014. August 8—10. Yantai, China. P. 124—129.
17. **Кай Шэнь, Пролетарский А. В., Неусыпин К. А.** Исследование степени наблюдаемости погрешностей автономных инерциальных навигационных систем // Автоматизация и современные технологии. 2015. № 1. С. 24—30.
18. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш.** и др. Идентификация положения равновесной ориентации международной космической станции как задача матричного пополнения с устойчивостью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 130—144.
19. **Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.** Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 196—240.
20. **Салычев О. С.** Скалярное оценивание многомерных динамических систем. М.: Машиностроение, 1987.
21. **Афанасьев В. Н., Неусыпин К. А.** Навигационный комплекс. Патент на изобретение RUS 2016383.
22. **Афанасьев В. Н., Неусыпин К. А.** Синтез адаптивного регулятора инерциальной навигационной системы // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1992. № 2. С. 178—183.
23. **Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S.** Controllability of linear dynamical systems. // Contributions to the Theory of Differential Equations. 1963. Vol. I, No. 2. P. 189—213.
24. **Богословский С. В., Дорофеев А. Д.** Динамика полета летательных аппаратов. СПб. ГУАП, СПб., 2002.
25. **Кай Шэнь.** Разработка методов оценивания и прогноза навигационных систем летательных аппаратов // Автоматизация. современные технологии. 2015. № 7. С. 13—18.
26. **Неусыпин К. А., Фам Суан Фанг.** Численный критерий степени управляемости переменных состояния // Автоматизация и современные технологии. 2007. № 7. С. 24—26.
27. **Неусыпин К. А., Пролетарский А. В., Кузнецов И. А.** Синтез численного критерия меры идентифицируемости параметров моделей // Автоматизация. Современные технологии. 2015. № 3. С. 9—13.

Study of the Criteria for the Degrees of Observability, Controllability and Identifiability of the Linear Dynamical Systems

Kai Shen, shenkaichn@mail.ru, Nanjing University of Science and Technology
K. A. Neusypin, neysipin@mail.ru✉, Bauman Moscow State Technical University

Corresponding author: **K. A. Neusypin,** D. Sc., Professor,
Bauman Moscow State University, Moscow, 105005, Russian Federation
e-mail: neysipin@mail.ru

Received on June 20, 2016
Accepted on July 08, 2016

The article is devoted to approaches to determination of the degree of observability, controllability and identifiability of the parameters in the linear dynamical systems. Well-known criteria for determination of the observability, controllability and identifiability of the dynamical objects were presented. Those criteria only allow us to determine, which component of the state vector is observable or controllable better. They can only give a relative assessment of the quality of the observability and controllability of a specific component of the state vector of the system, whereas, it is impossible to compare the quantitative characteristics of the state variables and parameters in various systems. Numerical criteria for calculation of the degree of observability and controllability of the state variables, as well as the degree of identifiability of the model parameters of the dynamical objects were researched using the scalar methods. The proposed numerical criteria have a clear physical meaning, and are characterized by simplicity and versatility. They allow us to determine the quality of the observability, controllability and identifiability in a scalar form, which can be very convenient for practical applications.

Keywords: *model of dynamical object, degree of identifiability, degree of controllability, degree of observability*

Acknowledgements: This work was supported by the Programme of Introducing Talents of Discipline to Universities in P. R. China ("111 program" No. B 16025).

For citation:

Kai Shen, Neusypin K. A. Study of the Criteria for the Degrees of Observability, Controllability and Identifiability of the Linear Dynamical Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 9, pp. 723—731.

DOI: 10.17587/mau.17.723-731

References

1. **Voronov A. A.** *Ustojchivost', upravlyaemost', nablyudaemost'* (Stability, controllability, observability), Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
2. **E'jkxoff P.** *Osnovy identifikacii sistem upravleniya* (Fundamentals of identification of control systems), Moscow, Mir, 1975 (in Russian).
3. **Brajson, Xo Yu Shi.** *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* (Applied optimal control theory), Moscow, Mir, 1972 (in Russian).
4. **Kuzovkov N. T., Karabanov S. V., Salychev O. S.** *Nepreryvnye i diskretnye sistemy upravleniya i metody identifikacii* (Continuous and discrete control systems and identification methods), Moscow, Mashinostroenie, 1978 (in Russian).
5. **Balonin N. A.** *Teoremy identificiruemosti* (Theorem of identifiability), Saint Petersburg, Politexnika, 2010 (in Russian).
6. **Balakrishnan A. V.** *Teoriya fil'tracii Kalmana* (Theory of Kalman filter), Moscow, Mir, 1988 (in Russian).
7. **Ajvazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D.** *Prikladnaya statistika: Issledovanie zavisimostej* (Applied statistics: Research of dependences), Moscow, Finansy i statistika, 1985 (in Russian).
8. **Yusupov R., Rozenwasser E.** Sensitivity of Automatic Control Systems, London, CRS Press, 1999.
9. **Ivanovskiy R. I., Ignatov A. A.** *Teoriya chuvstvitel'nosti v zadachax upravleniya i ocenki* (Theory of sensitivity in the task control and estimation), Saint Petersburg, TsNII "RUMB", 1986 (in Russian).
10. **Shmidt C. V., Belova D. Yu., Kaliev B. Z.** *Primenenie funkcii chuvstvitel'-nosti k e'nergeticheskim zadacham* (Application of the sensitivity function to the energy task), Onlajn E'lektrik: E'lektroe'nergetika, Novye texnologii, 2012, available at: http//www.jgline-electric.ru/articles.php?id=30 (date of access: 10.05.15) (in Russian).
11. **Tkachenko V. N., Korotkov E. K., Pozdnyakov E. K.** *Issledovanie isxodnyx parametrov metoda opredeleniya dal'nosti celej v passivnyx mnogopozicion-nyx sistemax pri pomoshhi funkcii chuvstvitel'nosti* (Research of the input parameters from the target distance determination method in the passive multiposition system by using the sensitivity function), Izv. YuFU, Texnicheskie nauki, 2014, no. 8, pp. 170—177 (in Russian).
12. **Parusnikov N. A., Morozov V. M., Borzov V. I.** *Zadacha korrekcii v inerci-al'noj navigacii* (The correction problem of inertial navigation), Moscow, MGU, 1982 (in Russian).
13. **Brown R. G.** Not just observable, but how observable? *National Electronics Conference Proceedings*, 1966, no. 22, pp. 409—714.
14. **Ablin H. L.** Criteria for degree of observability in a control system, *Retrospective Theses and Dissertations*, Paper 3188, Iowa State University, 1967.
15. **Ham F. M., Brown R. G.** Observability, eigenvalues, and Kalman filtering, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1983, vol. AES-19, iss. 2, pp. 269—273.
16. **Kai Shen, Neusypin K. A., Proletarsky A. V.** On State Estimation of Dynamic Systems by Applying Scalar Estimation Algorithms, *Proc. of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, August 8—10, 2014, Yantai, China, pp. 124—129.
17. **Kai Shen, Proletarskiy A. V., Neusypin K. A.** *Issledovanie stepeni nablyudaemosti pogreshnostej avtonomnyx inercial'nyx navigacionnyx system* (Research of the degree of observability of errors of autonomous inertial navigation systems), *Avtomatizaciya i Sovremennye Texnologii*, 2015, no. 1, pp. 24—30 (in Russian).
18. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrixanov M. Sh.** i dr. *Identifikaciya polozheniya ravnovesnoj orientacii mezhdunarodnoj kosmicheskoj stancii kak zadacha matrichnogo popolneniya s ustojchivost'yu* (Identification of the equilibrium orientation of the international space station as a problem of matrix replenishment stability), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2012, no. 2, pp. 130—144 (in Russian).
19. **Misrixanov M. Sh., Ryabchenko V. N.** *Algebraicheskie i matrichnye metody v teorii linejnyx MIMO-sistem* (The algebraic and matrix methods in the theory of linear MIMO-systems), *Vestnik IGE'U*, 2005, vol. 5, pp. 196—240 (in Russian).
20. **Salychev O. S.** *Skalyarnoe ocenivanie mnogomernyx dinamicheskix system* (Scalar estimation of multidimensional dynamical systems), Moscow, Mashinostroenie, 1987 (in Russian).
21. **Afanas'ev V. N., Neusypin K. A.** *Navigacionnyj kompleks* (Navigation systems), Patent na izobretenie RUS 2016383 (in Russian).
22. **Afanas'ev V. N., Neusypin K. A.** *Sintez adaptivnogo regulyatora inercial'noj navigacionnoj sistemy* (The synthesis of adaptive controller for inertial navigation systems), *Izv. RAN. Texnicheskaya Kibernetika*, 1992, no. 2, pp. 178—183 (in Russian).
23. **Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S.** Controllability of linear dynamical systems, *Contributions to the Theory of Differential Equations*, 1963, vol. I, no. 2, pp. 189—213.
24. **Bogoslovskiy S. V., Dorofeev A. D.** *Dinamika poleta letatel'nyx apparatov* (Flight dynamics of aircrafts), Saint Petersburg, GUAP, SPb., 2002 (in Russian).
25. **Kai Shen.** *Razrabotka metodov ocenivaniya i prognoza navigacionnyx sistem letatel'nyx apparatov* (Development of estimation and prediction methods of aircraft navigation systems), *Avtomatizaciya. Sovremennye Texnologii*, 2015, no. 7, pp. 13—18 (in Russian).
26. **Neusypin K. A., Fam Suan Fang.** *Chislennyj kriterij stepeni upravlyaemosti peremennyx sostoyaniya* (The numerical criterion of the degree of controllability of state variables), *Avtomatizaciya i Sovremennye Texnologii*, 2007, no. 7, pp. 24—26 (in Russian).
27. **Neusypin K. A., Proletarskiy A. V., Kuznecov I. A.** *Sintez chislennogo kriteriya mery identificiruemosti parametrov modelej* (The synthesis of numerical criterion for the degree of identifiability of model parameters), *Avtomatizaciya. Sovremennye Texnologii*, 2015, no. 3, pp. 9—13 (in Russian).