

А. А. Колесников, Засл. деятель науки и техники РФ, д-р техн. наук, проф., ankolesnikov@sfnedu.ru,
Ал. А. Колесников, канд. техн. наук, доц., alkolesnikov@sfnedu.ru,
А. А. Кузьменко, канд. техн. наук, доц., aakuzmenko@sfnedu.ru,
 Институт компьютерных технологий и информационной безопасности
 Южного федерального университета, г. Таганрог

Методы АКАР и АКОР в задачах синтеза нелинейных систем управления¹

Приводится сравнение известного метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) с методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР). Показано, что метод АКАР обладает значительными преимуществами, связанными с более простой процедурой аналитического конструирования нелинейных законов оптимального управления, ясной физической трактовкой весовых коэффициентов критериев оптимальности и устойчивостью замкнутых оптимальных систем.

Ключевые слова: нелинейные системы управления, синтез управления, метод АКОР, синергетическая теория управления, метод АКАР

"На свете есть вещи поважнее открытий — это знание метода, которым они были сделаны".

Г. Лейбниц

Введение

В современной теории управления проблема аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), начиная с работ А. М. Летова и Р. Калмана [1, 2], является основополагающей, но вместе с тем и наиболее трудноразрешимой. Методы АКОР, наряду с принципом максимума Понтрягина, и в настоящее время составляют наиболее важный раздел теории и практики синтеза систем оптимального управления. Однако необходимо отметить, что эти методы нашли свое приложение в основном для линейных объектов и квадратичных функционалов: критерия Летова—Калмана, функционала обобщенной работы (ФОР), критерия взвешенной обобщенной работы (КВОР) и др. При высокой размерности даже линейных объектов решение задачи АКОР встречается определенные трудности, связанные с численным решением уравнений Риккати [1]. Решение же задачи АКОР для нелинейных объектов наталкивается на принципиальные трудности, связанные с нахождением решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Именно этим и объясняется отсутствие достаточного числа публикаций с аналитическим синтезом (без использования численных методов) законов управления нелинейными объектами методами АКОР. В имеющихся же публикациях решению задачи синтеза оптимального управления предшествует линеаризация исходной нелинейной математической модели объекта или использование прогнозирующих линейных моде-

лей и дальнейшее применение численных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Но, тем не менее, интерес к практическому применению методов АКОР по-прежнему высок: так, поисковый запрос "LQR or LQG" в реферативной системе Scopus только за период 2000—2016 гг. выдает более 5000 уникальных ссылок на научные работы.

Отметим, что обозначенные выше проблемы АКОР усугубляются проблемой выбора весовых коэффициентов оптимизирующих функционалов, которая так и не получила приемлемого для проектировщиков решения: выбор этих коэффициентов заранее не определен физически ясными рекомендациями. Если в линейном случае подбор весовых коэффициентов квадратичных критериев можно каким-то образом организовать путем моделирования на ЭВМ переходных процессов в замкнутой линейной системе, то в нелинейном случае такой подход математически некорректен. Это объясняется тем общеизвестным фактом, что для нелинейных систем несправедлив принцип суперпозиции, а их поведение, в отличие от линейных, существенным образом зависит от начальных условий. В связи с этим, выбрав в результате моделирования нелинейной системы на ЭВМ те или иные подходящие, на первый взгляд, весовые коэффициенты соответствующих критериев, можно получить практически неработоспособную нелинейную систему, так как при других начальных условиях ее поведение может качественно измениться. Удивительно, но этот общеизвестный факт в литературе затушевывается, хотя его влияние на поведение синтезируемых систем носит, вообще говоря, принципиальный характер. По-видимому, в головах

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00782-а).

многих исследователей продолжает доминировать идеология классической линейной теории управления. В настоящее время востребованным направлением теории оптимального управления является управление на основе прогнозирующих моделей (model predictive control) [3—7]. А для дискретных систем управления удастся решить многие задачи оптимального управления на основе полиэдральной методологии [8, 9]. Так, в работе [8] отмечается, что одним из ее основных достоинств является "... ясный инженерный смысл полиэдральных критериев качества процессов управления, простота формализации полиэдральных целей управления, а также полиэдральных фазовых и ресурсных ограничений...".

Современная наука показала, что поведение нелинейных систем наиболее адекватно может быть отражено не столько путем моделирования ее переходных процессов во времени, а, в первую очередь, с помощью фазовых портретов, инвариантных многообразий и аттракторов в их фазовом пространстве. В настоящее время становится очевидным, что следует переходить к новым взглядам на проблему аналитического конструирования регуляторов, опираясь на базовые понятия современной нелинейной динамики и синергетики, а именно: на инвариантные многообразия, аттракторы, самоорганизацию, асимптотические свойства синтезируемых систем и др. Это позволяет весьма эффективно решить проблему формирования структуры и выбора весовых коэффициентов оптимизирующих функционалов, имеющих, как правило, сопровождающий характер.

Постановка задачи управления в методах АКОР и АКАР

Пусть объект управления описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ — векторы фазовых координат и управления; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$ — вектор-функция; $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (g_{ij}(\mathbf{x}))_{n \times m}$ — функциональная матрица.

Задача АКОР формулируется следующим образом [10]:

найти закон управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, который переводит объект (1) из любого начального состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ в начало координат фазового пространства $\mathbf{x} = 0$, обеспечивая асимптотическую устойчивость замкнутой системы, и доставляет минимум функционалу

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{D}\mathbf{u} \rangle) dt,$$

где $\mathbf{F}_0(\mathbf{x})$ — знакоопределенная по \mathbf{x} положительная функция; $\langle \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов; $\mathbf{D} = \text{diag}(d_{ij})_{n \times m}$ — диагональная матрица.

Процедура решения задачи АКОР базируется на методе динамического программирования Р. Беллмана. Ключевыми моментами этой процедуры является выбор соответствующей функции Ляпунова и решение алгебраических или дифференциальных уравнений типа Риккати.

Задача аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) формулируется следующим образом [10—12]:

требуется определить такой вектор управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, который обеспечивает перевод изображающей точки (ИТ) объекта (1) из произвольного исходного состояния (в некоторой допустимой области) сначала на многообразия $\psi_k(\mathbf{x}) = 0$, а затем движение вдоль них в заданное состояние (в частности, в начало координат $\mathbf{x} = 0$). При этом движение ИТ обязательно должно удовлетворять системе основных функциональных уравнений метода АКАР:

$$T_k \dot{\psi}_k(t) + \varphi_k(\psi_k) = 0. \quad (2)$$

Функции $\varphi_k(\psi_k)$ выбираются таким образом, чтобы, помимо асимптотической устойчивости (2), обеспечить желаемые показатели качества движения ИТ к притягивающим многообразиям $\psi_k(\mathbf{x}) = 0$. В простейшем случае $\varphi_k(\psi_k) = \psi_k$. В общем случае, ИТ системы движется от одного многообразия к другому, пока не достигнет либо финишного многообразия, которое задает желаемый инвариант объекта (1), при скалярном управлении, либо финишных многообразий, которые задают желаемые инварианты объекта (1), при векторном управлении. Представленная выше задача АКАР может быть также сформулирована в терминах оптимального управления: функциональные уравнения (2) являются уравнениями Эйлера—Лагранжа для следующего обобщенного сопровождающего функционала (СОФ):

$$J_0 = \int_0^{\infty} [\varphi_k^2(\psi_k) + T_k^2 \dot{\psi}_k^2(t)] dt. \quad (3)$$

Таким образом, синтезированный методом АКАР вектор управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ обеспечивает минимум СОФ, т.е. является оптимальным по СОФ. Однако, в отличие от метода АКОР, функционал (3) играет второстепенную (сопровождающую) роль и в процедуре аналитического синтеза вектора управления непосредственно не участвует.

Проиллюстрируем на конкретных примерах системного синтеза сравнение методов АКОР и АКАР, исторически следовавших друг за другом и обладающих как определенной аналогией, так и существенной разницей в подходах к сущности и процедурам аналитического синтеза законов управления.

Сравнительные примеры синтеза законов управления методами АКОР и АКАР

Пример 1. В работе [13] приведен сравнительный пример синтеза законов управления конкретным объектом второго порядка на основе различных методов АКОР с использованием критерия

Летова—Калмана, ФОР и предлагаемого авторами работы [13] КВОР. В качестве сравнительного примера для выявления достоинств и недостатков различных методов АКОР выбрана задача управления короткопериодическим движением самолета, уравнения которого имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3u, \end{aligned} \quad (4)$$

где x_1, x_2 — угол атаки и скорость его изменения, u — отклонение руля высоты, параметры равны: $a_1 = -4,71 \text{ с}^{-2}$; $a_2 = -1,76 \text{ с}^{-1}$; $a_3 = -7,50 \text{ с}^{-2}$.

Ставится задача синтеза в аналитическом виде закона оптимального управления рулем высоты $u_{\text{оп}}(x_1, x_2)$, стабилизирующего движение самолета по углу атаки ($x_1 = x_2 = 0$) при различных критериях качества:

- Летова—Калмана

$$J_1 = \int_0^{\infty} (q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + ru^2)dt; \quad (5)$$

- ФОР

$$J_2 = \int_0^{\infty} \left(q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + 2ru^2 + \frac{1}{2}ru_{\text{оп}}^2 \right) dt; \quad (6)$$

- КВОР

$$J_3 = \int_0^{\infty} (q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + ru \cdot u_{\text{оп}}) dt. \quad (7)$$

Решение задачи АКОР сводится к определению законов управления:

- для критерия (5)

$$u = u_{\text{оп}} = -\frac{a_3}{2r} \frac{\partial v}{\partial x_2}; \quad (8)$$

- для критериев (6), (7)

$$u = u_{\text{оп}} = -\frac{a_3}{r} \frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (9)$$

В законы управления (8), (9) входит функция Беллмана $v(x_1, x_2)$ в виде положительно-определенной квадратичной формы:

$$v(x_1, x_2) = A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2. \quad (10)$$

Коэффициенты A_{11}, A_{12}, A_{22} в выражении (10) определяются из уравнений Беллмана:

- для критерия (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} (a_1x_1 + a_2x_2) - \\ - \frac{1}{4} \frac{a_3^2}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + q_1x_1^2 + q_2x_2^2 = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

- для критериев (6), (7)

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} (a_1x_1 + a_2x_2) + q_1x_1^2 + q_2x_2^2 = 0. \quad (12)$$

В результате решения уравнений (11), (12) находятся значения коэффициентов функций Беллмана (10):

- для критерия (5)

$$(A_{12})_{1,2} = (-2a_1 \pm 2\sqrt{a_1^2 + \beta q_1})/\beta^2; \quad (13)$$

$$(A_{22})_{1,2} = (a_2 \pm \sqrt{\beta(A_{12} + q_2)})/\beta, \beta = a_3^2/r; \quad (14)$$

- для критериев (6), (7)

$$A_{12} = -q_1/a_1, A_{22} = (q_1 - a_1q_2)/(2a_1a_2). \quad (15)$$

Из выражений (13)—(15) следует, что для минимизации критерия J_1 (5) из четырех возможных комбинаций коэффициентов A_{12} и A_{22} необходимо выбрать одну комбинацию этих коэффициентов с положительными вещественными значениями. Для критериев J_2 (6) и J_3 (7) указанная комбинация единственна и, кроме того, в этом случае коэффициенты A_{12}, A_{22} не зависят от параметров a_3 и r . Законы оптимального управления (8) и (9) имеют вид:

- для критерия (5)

$$u_{\text{оп}} = -a_3(A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2)/(2r); \quad (16)$$

- для критериев (6), (7)

$$u_{\text{оп}} = -a_3(A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2)/r. \quad (17)$$

Для закона (16) коэффициенты A_{12}, A_{22} определяются из выражений (13) и (14), а для закона (17) — из (15) соответственно. Подставив (16), (17) в уравнение объекта (4), можно записать уравнение замкнутой системы:

- для критерия (5)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + (a_3^2 A_{22}/r - a_2)\dot{x}_1(t) + \\ + (a_3^2 A_{12}/(2r) - a_1)x_1 = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

- для критериев (6), (7)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + (2a_3^2 A_{22}/r - a_2)\dot{x}_1(t) + \\ + (a_3^2 A_{12}/r - a_1)x_1 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В зависимости от знака детерминантов в замкнутых системах (18) и (19) соответственно могут возникнуть монотонные ($D_i > 0$), апериодические ($D_i = 0$) или колебательные ($D_i < 0$) переходные процессы.

В статье [13] для задачи (4) выделяются следующие преимущества методов АКОР по критериям J_2 и J_3 по сравнению с критерием J_1 : а) единственность и простота решения задачи вычисления коэффициентов A_{12} и A_{22} ; б) коэффициенты A_{12}, A_{22} (15) не зависят от параметров a_3 и r ; в) существен-

ное расширение области задания коэффициента r ; г) при одинаковых параметрах a_i объекта (4) и коэффициентах q_1, q_2, r лучшее качество переходных процессов по характеру их протекания и прямым показателям; д) возможность смены стратегий управления относительно функции $u_{\text{оп}}$ для критерия J_3 , в том числе с использованием предельно допустимых значений управления.

В работе [13] особо подчеркивается, что формулировка задачи АКОР на основе КВОР (7), по существу, является синергетической, так как допускает многосвязность объекта управления и многовариантность путей достижения цели. Следует напомнить, что общая синергетическая постановка современной проблемы управления впервые была сделана в монографии [11], а в цитируемых в ней работах были ранее заложены основы нового метода АКАР. В связи с этим рассмотрим решение задачи синтеза различных законов оптимального управления объектом (4) с использованием идеологии метода АКАР синергетической теории управления [10–12]. Согласно этому методу введем сначала в рассмотрение функцию преобразования в виде следующей агрегированной макропеременной:

$$\psi(x_1, x_2) = \beta_1 x_1 + x_2. \quad (20)$$

На основе этой макропеременной построим СОФ (3) в виде

$$J_\Sigma = \int_0^\infty [\psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2(t)] dt. \quad (21)$$

Подставим в (21) функцию ψ (20) и ее первую производную

$$\dot{\psi}(t) = \beta_1 \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) = a_1 x_1 + (\beta_1 + a_2) x_2 + u_1,$$

где $u_1 = a_3 u$, найденную с учетом уравнений объекта (4). В результате получим критерий качества

$$J_4 = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\beta_1^2}{T^2} + a_1^2 \right) x_1^2 + \left(\beta_1^2 + a_2^2 + \frac{1}{T^2} \right) x_2^2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2) u_1 + u_1^2 \right] dt + 2 \int_0^\infty \left[\left(\frac{\beta_1}{T^2} + a_1 a_2 \right) x_1 \dot{x}_1(t) + \beta_1 x_2 \dot{x}_2(t) \right] dt.$$

Второй интеграл в этом выражении может быть вычислен в силу уравнений объекта (4):

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^\infty \left[\left(\frac{\beta_1}{T^2} + a_1 a_2 \right) x_1 \dot{x}_1(t) + \beta_1 x_2 \dot{x}_2(t) \right] dt = \\ & = - \left(\frac{\beta_1}{T^2} + a_1 a_2 \right) x_{10}^2 - \beta_1 x_{20}^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

так как по условиям устойчивости системы $x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$. В результате критерий качества, полученный на основе СОФ J_Σ (21), макропеременной ψ (20) и уравнений объекта (4), принимает форму

$$J_4 = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\beta_1^2}{T^2} + a_1^2 \right) x_1^2 + \left(\beta_1^2 + a_2^2 + \frac{1}{T^2} \right) x_2^2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2) u_1 + u_1^2 \right] dt. \quad (22)$$

Сначала для синтеза закона управления $u_1(x_1, x_2)$, обеспечивающего оптимальное по критерию (22) управление объектом (4), используем метод динамического программирования. Для этого составим уравнения Беллмана:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, u) + f_1(x_1, x_2) \frac{\partial v}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2) \frac{\partial v}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где F — подынтегральная функция критерия (22); f_1, f_2 — правые части дифференциальных уравнений (4) объекта. Подставив в выражение (23) соответствующие выражения из (4) и (22), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta_1^2}{T^2} + a_1^2 \right) x_1^2 + \left(\beta_1^2 + a_2^2 + \frac{1}{T^2} \right) x_2^2 + \\ & + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2) u_1 + u_1^2 + x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \\ & + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u_1) \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0; \end{aligned} \quad (24)$$

$$2(a_1 x_1 + a_2 x_2) + 2u_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0.$$

Найдем управление u_1 из второго уравнения системы (24):

$$u_1 = - \left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + 0,5 \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \quad (25)$$

и подставим его в первое уравнение (24):

$$\begin{aligned} & \beta_1^2 x_1^2 + (1 + \beta_1^2 T^2) x_2^2 - \\ & - 2a_1 a_2 T^2 x_1 x_2 + T^2 x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{T^2}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, для решения которого функцию Беллмана $v(x_1, x_2)$, согласно работе [14], можно выбрать в виде определенно-положитель-

ной квадратичной формы координат (10), и, следовательно, ее частные производные имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 2A_{11}x_1 + A_{12}x_2; \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = 2A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2. \quad (27)$$

Подставив $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial v}{\partial x_2}$ из выражения (27) в формулу (26) и приравнявая нулю коэффициенты при соответствующих степенях x_1 и x_2 , находим $A_{12} = 2\beta_1/T$; $A_{22} = \beta_1 + 1/T$; $A_{11} = a_1a_2 + \beta_1/T(\beta_1 + 1/T)$. Зная коэффициенты A_{12} , A_{22} из (27), определяем закон управления u_1 (25):

$$u_1 = -\left(a_1 + \frac{\beta_1}{T}\right)x_1 - \left(a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T}\right)x_2. \quad (28)$$

Подстановка $\frac{1}{2}(a_1x_1 + a_2x_2)u_1 = 2a_1x_1\dot{x}_2(t) - 2a_1^2x_1^2 - 2a_2^2x_2^2$ в выражение (22) приводит к следующему критерию:

$$J_5 = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{\beta_1^2}{T^2} - a_1^2 \right) x_1^2 + \left(\beta_1^2 + \frac{1}{T^2} - a_2^2 - 2a_1 \right) x_2^2 + u_1^2 \right] dt. \quad (29)$$

Это означает, что закон управления (28) доставляет минимум как критерию J_4 (22), так и критерию J_5 (29), т.е. эти критерии эквивалентны в смысле качества переходных процессов в замкнутой системе.

Теперь, в соответствии с методом АКАР, для поиска закона управления используем функциональное уравнение, являющееся простейшей формой (2):

$$T\dot{\psi}(t) + \psi = 0, \quad (30)$$

которое доставляет минимум СОФ J_2 (21) и, следовательно, критериям J_4 (22) и J_5 (29). С учетом (20) и уравнений объекта (4) из (30) получаем управление

$$u_1 = -\left(a_1 + \frac{\beta_1}{T}\right)x_1 - \left(a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T}\right)x_2, \quad (31)$$

совпадающее по структуре с полученным выше законом (28). Закон управления (31) найден в аналитической форме в результате простейшей процедуры удовлетворения функциональному уравнению (30) с учетом уравнений (4) исходного объекта. Исследуем свойства синтезированной замкнутой системы (4), (31):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= -(\beta_1/T)x_1 - (\beta_1 + 1/T)x_2, \end{aligned} \quad (32)$$

условия устойчивости которой имеют простой вид: $\beta_1 > 0$, $T > 0$. Запишем уравнения (32) относительно координаты x_1 :

$$(T/\beta_1)\ddot{x}_1(t) + (T + 1/\beta_1)\dot{x}_1(t) + x_1 = 0. \quad (33)$$

Из (33) следует, что замкнутая система имеет декремент затухания $\xi = \frac{1 + \beta_1 T}{2\sqrt{\beta_1 T}} \geq 1$, а при $\beta_1 T = 1$ имеем $\xi = 1$. Отсюда следует, что переходные процессы в системе при $\xi > 1$ имеют монотонный характер.

Запишем теперь уравнения замкнутой системы (32) в следующей симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{x_2} = -\frac{Tdx_2}{(\beta_1x_1 + x_2) + \beta_1Tx_2} = dt.$$

Учитывая функцию (20), запишем это соотношение в виде

$$\frac{dx_1}{x_2} = -\frac{Tdx_2}{\psi(x_1, x_2) + \beta_1Tx_2}. \quad (34)$$

Положив в формуле (34) $\psi = \beta_1x_1 + x_2 = 0$ и интегрируя, находим выражение $\beta_1x_1 = -x_2$, которое точно совпадает с соотношением $\psi = 0$. Это означает, что многообразие $\psi = \beta_1x_1 + x_2 = 0$ является интегралом движения системы дифференциальных уравнений (32). Это означает, что синтезированная система (32) обладает следующим характерным свойством: с течением времени координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$, стартуя из произвольных начальных условий, асимптотически устремляются к многообразию $\psi = 0$ и через время $(4 \div 5)T$ фактически его достигают. Такое многообразие, как известно, называется инвариантным по отношению к системе дифференциальных уравнений (32). Подставив из уравнения $\psi = 0$ координату $x_2 = -\beta_1x_1$ в первое уравнение объекта (4), получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = -\beta_1x_{1\psi},$$

которое определяет движение ИТ системы вдоль многообразия $\psi = 0$ к началу координат. Время этого движения $t_\psi = (4 \div 5)\beta_1^{-1}$ определяется значением коэффициента β_1 . Очевидно, что общее время движения ИТ синтезированной системы из произвольного исходного состояния в начало координат определяется верхней оценкой $t_\Sigma \leq (4 \div 5)(T + 1/\beta_1)$.

Закон управления u_1 (28) был получен на основе линейной функции ψ (20). Используем теперь нелинейную функцию преобразования

$$\psi_1 = \beta_1x_1 + \beta_2x_1^3 + x_2 \quad (35)$$

и функциональное уравнение (30) при $\psi = \psi_1$, $T = T_1$. Подставив ψ_1 (35) в СОФ вида J_Σ (21), с учетом

уравнений объекта (4) находим структуру сопрягающего критерия качества:

$$J_6 = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{T_1^2} + \beta_1^2 - 2a_1 - a_2^2 + 6\beta_1\beta_2x_1^2 \right) x_2^2 + \left(\frac{\beta_1}{T_1^2} - a_1^2 \right) x_1^2 + (2\beta_1\beta_2 + 9\beta_2^2x_2^2 + \beta_2^2x_1^2)x_1^4 + u^2 \right] dt. \quad (36)$$

Разумеется, что при $\beta_2 = 0$ критерии (36) и (29) совпадают.

Критерий J_6 (36) содержит, помимо квадратичных форм координат, как в критериях $J_1 - J_5$, также составляющие, пропорциональные четвертой и шестой степеням. Известно, использование критериев с высокими степенями координат позволяет существенно улучшить показатели качества синтезируемых систем управления в отношении их быстродействия, демпфирования колебаний и др. Особенно проявляются достоинства такого рода критериев качества в областях значительных отклонений ИТ системы от заданного состояния. Так, критерий J_6 (36), по сравнению с квадратичным критерием (29), более полно отражает важное требование минимизации больших отклонений, так как в этом случае регулятор будет эффективно подавлять такого рода отклонения координат. Кроме того, присутствие в критерии J_6 также и квадратичных членов x_1^2 , x_2^2 позволяет наделять синтезируемый регулятор необходимой чувствительностью и к малым отклонениям координат. Итак, оптимальный по критерию J_6 (36) регулятор эффективно реагирует как на малые, так и большие отклонения координат. Кроме указанных преимуществ, такого рода критерии качества могут использоваться для аппроксимации других критериев, имеющих важное практическое значение, но для которых отсутствуют эффективные аналитические или численные методы решения задач синтеза законов оптимального управления. В методе АКАР указанные законы определяются в результате простых аналитических процедур с обеспечением условий асимптотической устойчивости движения вдоль соответствующих многообразий. Так, для рассматриваемой здесь задачи, используя функциональное уравнение (30), с учетом уравнений объекта (4) и ψ_1 (35), определяем оптимальный по критерию J_6 (36) нелинейный закон управления

$$u_1 = -(\beta_1/T_1 + a_1)x_1 - (\beta_1 + a_2 + 1/T_1)x_2 - (\beta_2/T_1)x_1^3 - 3\beta_2x_1^2x_2. \quad (37)$$

Этот закон в течение времени $(4 \div 5)T_1$ переводит изображающую точку в окрестность многообразия $\psi_1 = \beta_1x_1 + \beta_2x_1^3 + x_2 = 0$. Разумеется, что при $\beta_2 = 0$ законы управления (37) и (31) совпадают. Найдем теперь из $\psi_1 = 0$ координату $x_{2\psi} = -\beta_1x_{1\psi} - \beta_2x_{1\psi}^3$

и подставив ее в первое уравнение системы (4), получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = -\beta_1x_{1\psi} - \beta_2x_{1\psi}^3, \quad (38)$$

которое описывает движение ИТ вдоль многообразия $\psi_1 = 0$ к началу координат фазовой плоскости. Очевидно, что при $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ это движение асимптотически устойчиво в целом. Иначе говоря, закон управления (37), полученный на основе функции (35), гарантирует асимптотическую устойчивость движения в целом синтезированной нелинейной системы. Кроме того, этот закон обеспечивает также повышенное быстродействие нелинейной системы (4), (37) по сравнению с линейной (31). Это непосредственно следует из свойств дифференциального уравнения (38), характеризующего динамику замкнутой системы (4) на заключительном этапе движения. На рис. 1 изображен фазовый портрет синтезированной системы (4), (31) при $\beta_1 = T_1 = 1$, а на рис. 2 — фазовый портрет синтезированной системы (4), (37) при $\beta_1 = \beta_2 = T_1 = 1$, подтверждающий изложенные соображения о повышенном ее быстродействии.

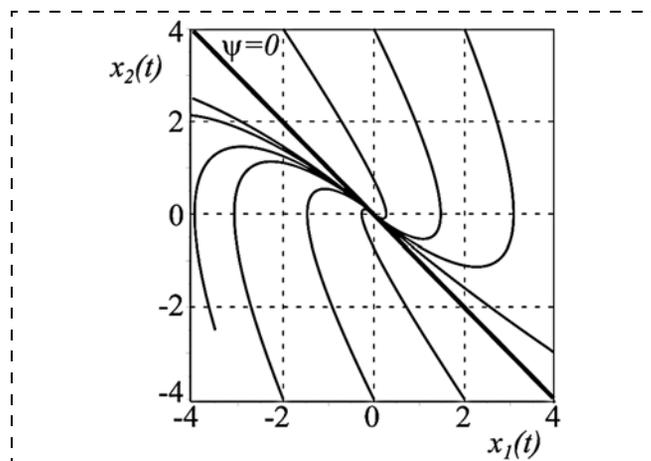


Рис. 1. Фазовый портрет системы (4), (31) при $\beta_1 = T_1 = 1$

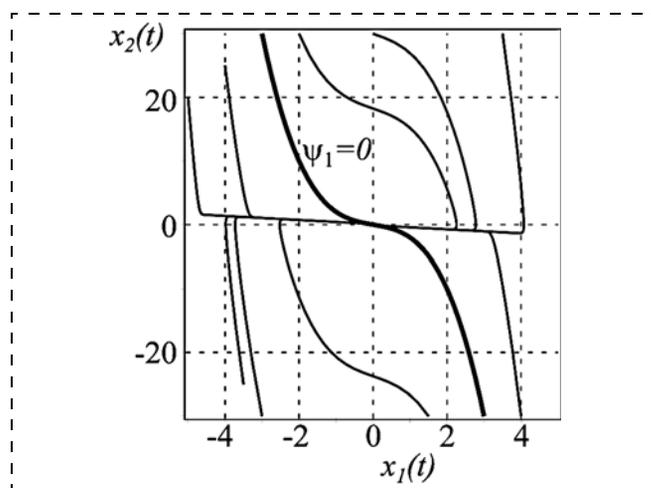


Рис. 2. Фазовый портрет системы (4), (37) при $\beta_1 = \beta_2 = T_1 = 1$

Предположим теперь, что на координату x_2 наложено следующее ограничение:

$$|x_2| \leq B. \quad (39)$$

Применим метод АКАР для синтеза закона управления объектом (4) с учетом этого ограничения. Для этого введем макропеременную

$$\psi_2 = x_2 + B \operatorname{th}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^3) \quad (40)$$

и, подставив ее в функциональное уравнение (30) при $\psi = \psi_2$, $T = T_2$, найдем с учетом уравнений объекта (4) закон управления

$$u_2 = -a_1 x_1 - \left(a_2 + \frac{1}{T_2} \right) x_2 - \frac{B}{T_2} \operatorname{th}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^3) - \frac{B(\beta_1 + 3\beta_2 x_1^2)}{\operatorname{ch}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^3)} x_2. \quad (41)$$

Этот закон обеспечивает ограничение (39) и переводит, согласно (30), ИТ замкнутой системы (4), (41) в окрестность многообразия $\psi_2 = 0$, движение вдоль которого будет описываться дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_{1\psi}(t) + B \operatorname{th}(\beta_1 x_{1\psi} + \beta_2 x_{1\psi}^3) = 0.$$

Очевидно, что это уравнение при $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ является асимптотически устойчивым относительно $x_1 = 0$. Это означает, что закон управления u_1 (41) при $T_2 > 0$ также обеспечивает асимптотическую устойчивость движения синтезированной системы относительно начала координат. Отметим, что закон (41) в режиме средних отклонений, когда можно положить $\operatorname{th}(\beta_1 x_{1\psi} + \beta_2 x_{1\psi}^3) \approx \beta_1 x_{1\psi} + \beta_2 x_{1\psi}^3$ и $\operatorname{ch}(\beta_1 x_{1\psi} + \beta_2 x_{1\psi}^3) \approx 1$, будет полностью совпадать по своей структуре с законом (37), который, в свою очередь, при $\beta_2 = 0$ переходит в предыдущий закон управления (31). Это означает, что возникает своего рода "эстафета" законов управления, последовательно превращающихся друг в друга по мере движения ИТ синтезированной системы из области больших отклонений в область средних и, в конечном итоге, область малых отклонений с квадратичным критерием качества. На рис. 3 приведен фазовый портрет замкнутой системы (4), (41), а на рис. 4 представлены соответствующие ей графики изменения координат и управления во времени при $\beta_1 = \beta_2 = T_2 = 1$, $B = 5$.

Сравним теперь результаты оптимизации системы (4) на основе критериев Летова—Калмана (5) и (29). Если положить

$$\frac{q_1}{r} = \frac{\beta_1 - a_1^2 T^2}{T^2 a_2^3}; \quad \frac{q_2}{r} = \frac{1 + \beta_1^2 - 2a_1 T^2 - a_2^2 T^2}{T^2 a_2^3}, \quad (42)$$

то при $D_1 \geq 0$ в (18), (19) эти критерии и, следовательно, законы управления (16), (31) точно совпа-

дут, что приведет к полной эквивалентности переходных процессов в синтезируемой оптимальной системе.

Сравним далее результаты оптимизации по критериям ФОР (6), КВОР (7) и (29). Замкнутая система (4), (17), оптимальная по ФОР (6) и КВОР (7), описывается уравнением (19). Если предположить, что параметр $a_1 > 0$, т.е. собственное движение управляемого объекта (4) при $u = 0$ неустойчиво, то тогда замкнутая управлением (17) система (19) при любом сочетании весовых коэффициентов q_1 и r будет также неустойчива, так как в этом случае ко-

эффициент $\frac{a_3^2 A_{12}}{r} - |a_1| = -\frac{a_3^2 q_1}{r|a_1|} - |a_1| < 0$ при позиционном члене станет отрицательным. Указанная особенность требует, очевидно, дополнительных предположений, например, об устойчивости неуправляемого объекта.

Если положить

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{T} &= -a_1 - \frac{a_3^2 q_1}{r a_1} > 0; \\ \beta_1 + \frac{1}{T} &= \frac{a_3(q_1 - a_1 a_2)}{r a_1 a_2} - a_2 > 0, \end{aligned} \quad (43)$$

то тогда законы управления (17) и (31), оптимальные по ФОР (6), КВОР (7) и (29) соответственно,

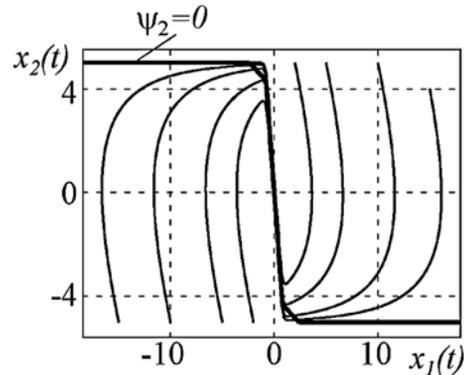


Рис. 3. Фазовый портрет замкнутой системы (4), (41)

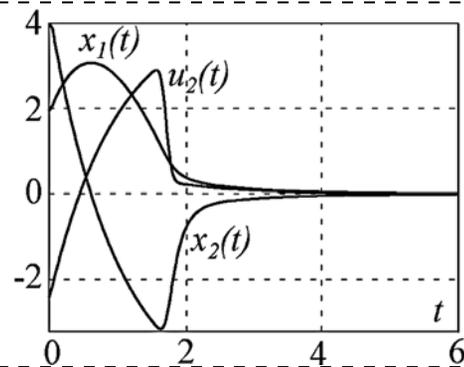


Рис. 4. Графики изменения координат и управления при $\beta_1 = \beta_2 = T_2 = 1$, $B = 5$

полностью совпадут. Разумеется, что при этом параметр $a_1 < 0$, так как в противном случае нарушается условие $\beta_1/T > 0$ (43). Выдерживая соотношения (43) при условии $a_1 < 0$, можно обеспечить полную эквивалентность законов управления (17) и (31) в смысле качества переходных процессов в замкнутой системе. Однако оптимальный по СОФ закон (31) обеспечивает асимптотическую устойчивость синтезированной системы (4), (31) и при произвольных знаках параметров a_i объекта (4), т.е. устойчивость или неустойчивость объекта при $u = 0$ не влияет на свойство устойчивости замкнутой системы.

Итак, при выполнении соотношений (42) для критерия Летова—Калмана (5) или соотношений (43) для ФОР (6) и КВОР (7) соответствующие оптимальные законы управления $u_{оп}$ (16) или $u_{оп}$ (17) точно совпадут с законом u_1 (31), минимизирующим (29). Это будет означать полную тождественность переходных процессов в замкнутой системе, оптимальной по различным критериям качества. Следует особо подчеркнуть то важное обстоятельство, что, согласно (42) и (43), весовые коэффициенты q_1 и q_2 в критериях (5) и (6) выбираются уже не произвольно, а исходя из требований к желаемым свойствам системы (коэффициенты T и β_1) и динамики (параметры a_i) объекта. Что же касается простоты вычисления коэффициентов закона управления (31), оптимального по критерию (29), то для этого не требуется вообще решать какие-либо уравнения типа уравнений Беллмана или Риккати в исходном виде, как в методе Летова—Калмана, или в упрощенной форме, как в методах ФОР и КВОР. Указанные коэффициенты вместе с параметрами объекта a_i входят в критерий (29) и имеют ясный физический смысл — они определяют время движения ИТ синтезируемой системы к инвариантному многообразию $\psi = 0$ (коэффициент T) и время движения вдоль $\psi = 0$ (коэффициент β_1) к началу координат фазовой плоскости системы. Это означает, что зная коэффициенты T , β_1 и параметры объекта a_i , можно, согласно (42) и (43), определить соответственно весовые коэффициенты q_1 и q_2 критериев (5)—(7), т.е. дать этим коэффициентам очевидную физическую интерпретацию. Отсюда следует, что СОФ (29) отражает естественные закономерности процессов управления конкретными объектами. Так, например, применение такого рода подхода, основанного на идеологии метода АКАР, позволило не только осуществить аналитический синтез законов управления объектом (4) с квадратичными критериями качества, но и ввести в проблему АКАР более эффективные СОФ, обеспечивающие повышенное быстроедействие нелинейной системы, ограничение ее координат и т.д. Следует отметить, что решение рассмотренной выше задачи оптимального управления объектом (4) с помощью метода АКАР сводится к элементарным алгебраическим процедурам, носящим характер студенческих упражнений. При этом

использовалась лишь простейшая версия метода АКАР с одним притягивающим многообразием.

Следует особо подчеркнуть, что, в отличие от методов АКОР, СОФ типа (21) и последующие его версии — это, по существу, конструируемый критерий качества, структуры и параметры которого определяются проектировщиком системы управления исходя из физических свойств объекта и предъявляемых к системе инженерных требований. Аналитическая мощь и эвристическая эффективность обобщенного метода АКАР будут показаны в последующих примерах. Здесь же продолжим рассмотрение сравнительных задач оптимального управления различными объектами.

Пример 2. Рассмотрим задачу синтеза законов оптимального управления объектом третьего порядка

$$\dot{x}_1(t) = x_2; \dot{x}_2(t) = bf(x_1) + x_3; \dot{x}_3(t) = u. \quad (44)$$

В работе [14] рассмотрена задача оптимизации системы управления объектом (44) при $b = 0$, т.е.

$$\dot{x}_1(t) = x_2; \dot{x}_2(t) = x_3; \dot{x}_3(t) = u. \quad (45)$$

Уравнениями (45) в первом приближении описывается, в частности, процесс аэродинамического торможения при баллистическом входе в атмосферу искусственного спутника Земли. Ставится задача синтеза автопилота, оптимального по критерию

$$J_1 = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 + u^2). \quad (46)$$

В работе [14] приведены значения коэффициентов p_k уравнения автопилота

$$u_1 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3, \quad (47)$$

рассчитанные путем численного решения уравнения Риккати для различных комбинаций весовых коэффициентов q_i критерия качества (46) и построены соответствующие им переходные процессы.

Синтезируем законы управления объектом (45) на основе идеологии метода АКАР в его первой, простейшей версии, т.е. с использованием одного притягивающего многообразия. Для этого сначала введем в рассмотрение линейную макропеременную

$$\psi_1 = x_3 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \quad (48)$$

Тогда, подставляя ψ_1 (48) в функциональное уравнение (30) при $\psi = \psi_1$, $T = T_1$ с учетом уравнений объекта (45) находим закон управления

$$u_1 = u = -(\beta_1/T_1)x_1 - (\beta_1 + \beta_2/T_1)x_2 - (\beta_2 + 1/T_1)x_3. \quad (49)$$

Отсюда следует, что управление (47) будет эквивалентно (49) при выборе

$$p_1 = \beta_1/T_1, p_2 = \beta_1 + \beta_2/T_1, p_3 = \beta_2 + 1/T_1. \quad (50)$$

Управление u_1 (49), согласно (30), за время $(4 \div 5)T_1$ переводит ИТ системы в окрестность много-

образия $\psi_1 = 0$ (48), движение вдоль которого описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}, \quad \dot{x}_{2\psi}(t) = -\beta_1 x_{1\psi} - \beta_2 x_{2\psi}.$$

Очевидно, что при $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ эта система устойчива, а следовательно, при $T_1 > 0$ устойчива и замкнутая система (45), (49). В зависимости от выбранных значений коэффициентов β_1, β_2 в замкнутой системе можно обеспечить желаемое время и требуемый характер переходных процессов. Выполнение соотношений (50) означает эквивалентность оптимизации системы (45), (49) по квадратичному критерию J_1 (46) и СОФ вида

$$J_2 = \int_0^{\infty} [\psi_1^2 + T_1^2 \dot{\psi}_1^2(t)] dt, \quad (51)$$

где макропеременная ψ_1 определяется выражением (48).

Следует подчеркнуть, что расчет коэффициентов p_i закона управления (47) при оптимизации системы по критерию J_1 (46) требует численного решения нелинейного уравнения типа Риккати, а при оптимизации по СОФ J_2 (51) используются простые аналитические соотношения при синтезе эквивалентного закона управления (49). Еще более возрастают преимущества метода АКАР с повышением размерности систем управления.

Продолжим решение различных задач управления объектом (45) на основе методологии АКАР. Сначала предположим, что на координату x_3 наложено ограничение $|x_3| \leq B$. Для учета этого ограничения, согласно методу АКАР, следует ввести макропеременную

$$\psi_2 = x_3 + B \operatorname{th}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2). \quad (52)$$

Тогда, используя уравнение объекта (45) и подставляя ψ_2 (52) в функциональное уравнение вида (30) при $\psi = \psi_2, T = T_2$, получим закон управления

$$u_2 = u = \frac{B(\beta_1 x_2 + \beta_2 x_3)}{\operatorname{ch}^2(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - \frac{1}{T_2} \psi_2. \quad (53)$$

Этот закон переводит изображающую точку системы в окрестность многообразия $\psi_2 = 0$, движение вдоль которого описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}, \quad \dot{x}_{2\psi}(t) = -B \operatorname{th}(\beta_1 x_{1\psi} + \beta_2 x_{2\psi}). \quad (54)$$

Система (54) при $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ асимптотически устойчива относительно $x_{1\psi} = x_{2\psi} = 0$, а следовательно, при $T_2 > 0$ будет асимптотически устойчива относительно начала координат и замкнутая система (45), (53). При этом закон управления u_2 (53) в области малых отклонений вырождается в закон u_1 (49), что означает оптимизацию системы по критерию (46). Иначе говоря, также возникает иерархия законов управления в зависимости от области фазового пространства замкнутой системы.

Предположим теперь, что необходимо синтезировать такой закон управления объектом (45), чтобы координаты x_1 и x_2 находились в режиме устойчивых автоколебаний. Для реализации такого требования сформируем следующую макропеременную:

$$\psi_3 = x_3 + x_1 + (x_1^2 - \varepsilon)x_2. \quad (55)$$

Тогда, подставляя ψ_3 (55) в функциональное уравнение вида (30) при $\psi = \psi_3, T = T_3$, в силу уравнений объекта (45) находим закон управления

$$u_3 = u = -(2x_1 x_2 + 1)x_2 - (x_1^2 - \varepsilon)x_3 - \psi_3/T_3. \quad (56)$$

Этот закон через время $(4+5)T_3$ переводит систему в окрестность многообразия $\psi_3 = 0$ (55), движение вдоль которого описывается известным уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}_{1\psi}(t) - (\varepsilon - x_{1\psi}^2)\dot{x}_{1\psi}(t) + x_{1\psi} = 0. \quad (57)$$

В зависимости от значений параметра ε в системе (57) могут возникать как автоколебания, близкие к синусоидальным (малые ε), так и релаксационные автоколебания (большие ε). Это означает, что координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ под действием закона управления u_3 (56) будут совершать соответствующие автоколебания. При этом параметр T_3 определяет время выхода синтезированной системы (45), (56) на режим желаемых гармонических или релаксационных колебаний. Разумеется, что в этом случае замкнутая система (45), (56) будет существенно нелинейной. Итак, использование даже простейшей версии метода АКАР с одним многообразием позволяет наделять систему управления объектом (45) разнообразными динамическими свойствами.

Рассмотрим далее задачу синтеза оптимальной системы управления нелинейным объектом (44), когда $b > 0$ и $f(x_1) = \sin x_1$, т.е. уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2; \quad \dot{x}_2(t) = b \sin x_1 + x_3; \quad \dot{x}_3(t) = u. \quad (58)$$

Уравнениями (58) описывается, в частности, движение математического маятника в верхнем неустойчивом положении, при этом x_1 — угол отклонения маятника от вертикали; x_2 — скорость отклонения; x_3 — момент, приложенный к маятнику. Ставится задача стабилизации маятника моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Указанный момент развивается исполнительным механизмом, который представлен интегрирующим звеном. Требуется найти управление $u(x_1, x_2, x_3)$ на входе исполнительного механизма, которое стабилизирует маятник в верхнем положении равновесия, т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость системы. Выберем следующий критерий оптимальной стабилизации:

$$J_4 = \int_0^{\infty} [\psi_4^2 + T_4^2 \dot{\psi}_4^2(t)] dt, \quad (59)$$

где $\psi_4 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + x_3$. Применяя метод АКАР, на основе функционального уравнения вида (30) при $\psi = \psi_4$, $T = T_4$ находим закон управления:

$$u_4 = u = -(\beta_1/T_4)x_1 - \beta_2 b \sin x_1 - (\beta_1 + \beta_2/T_4)x_2 - (\beta_2 + 1/T_4)x_3, \quad (60)$$

доставляющий минимум критерию качества (59). Исследуем устойчивость движения синтезированной системы, уравнения движения которой вдоль многообразия $\psi_4 = 0$ принимают следующий вид:

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}, \quad \dot{x}_{2\psi}(t) = b \sin x_{1\psi} - \beta_1 x_{1\psi} - \beta_2 x_{2\psi}.$$

Отсюда следуют неравенства $\beta_1 > b$, $\beta_2 > 0$, $T_4 > 0$, которые являются условиями асимптотической устойчивости в целом синтезированной системы.

Разумеется, что если параметр $b = 0$, то тогда уравнения объектов (45) и (58), а также законы управления (49) и (60) совпадут. Критерий J_4 (59) с учетом уравнений объекта (58) принимает вид

$$J_4 = \int_0^{\infty} [\beta_1^2 x_1^2 + (\beta_2^2 + T_4^2 \beta_1^2 - 2\beta_1)x_2^2 + (1 + \beta_2^2 T_4^2 - 2\beta_1 T_4^2)x_3^2 + T_4^2 (b^2 \sin^2 x_1 + 2b \sin x_1 + u^2)] dt.$$

Это означает, что для объекта (45) при выполнении соотношений $q_1 = \beta_1^2/T_4^2$, $q_2 = \beta_2^2/T_4^2 + \beta_1^2 - 2\beta_1/T_4^2$, $q_3 = 1/T_4^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1$ критерии J_1 (46) и J_4 (60) точно совпадут и, следовательно, будут эквивалентны оптимальные переходные процессы в синтезированной системе. Синтезируем закон стабилизирующего управления объектом (58) теперь уже на основе нелинейной агрегированной макропеременной, например, вида

$$\psi_5 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + x_3 + \alpha \sin x_1. \quad (61)$$

Используя функцию (61), запишем закон управления

$$u_5 = u = -\frac{\beta_1}{T_5} x_1 - \left(\beta_2 b + \frac{\alpha}{T_5} \right) \sin x_1 - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{T_5} + \alpha \cos x_1 \right) x_2 - \left(\beta_1 + \frac{1}{T_5} \right) x_3. \quad (62)$$

Уравнения, описывающие движение вдоль многообразия $\psi_5 = 0$, имеют вид

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}, \quad \dot{x}_{2\psi}(t) = -\beta_1 x_{1\psi} - \beta_2 x_{2\psi} - (\alpha - b) \sin x_{1\psi}. \quad (63)$$

Условия устойчивости системы (63), а следовательно, и условия асимптотической устойчивости в целом синтезированной нелинейной системы (58),

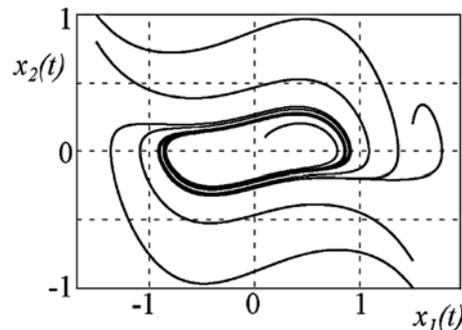


Рис. 5. Проекция фазового портрета замкнутой системы (45), (56) при $\varepsilon = 0,2$, $T_3 = 1$

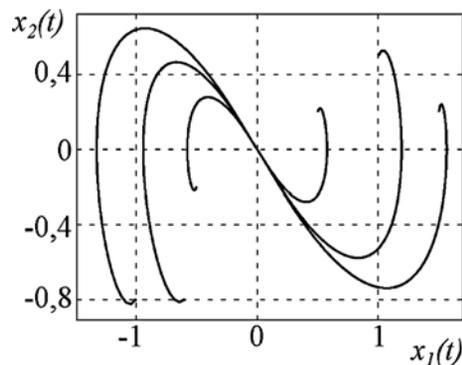


Рис. 6. Проекция фазового портрета замкнутой системы (58), (62) при $b = 1$, $\alpha = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 4$, $T_5 = 1$

(62) весьма просты: $\alpha \geq b$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, $T_5 > 0$. Заметим, что если положить $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то уравнения (63) будут описывать движение классического математического маятника на многообразии $\psi_5 = 0$. Таким образом, использование нелинейной макропеременной ψ_5 (61) позволило эффективно решить поставленную задачу синтеза стабилизирующего закона управления нелинейным колебательным объектом. На рис. 5 приведена проекция фазового портрета замкнутой системы (45), (56) при $\varepsilon = 0,2$, $T_3 = 1$, а на рис. 6 представлена проекция фазового портрета замкнутой системы (58), (62) при $b = 1$, $\alpha = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 4$, $T_5 = 1$.

Приведенные выше примеры свидетельствуют также о перспективности применения метода АКАР в задачах эквивалентирования критериев оптимальности синтезируемых систем управления.

Многокритериальная оптимизация

Для некоторых объектов выбором функции $\psi(x_1, \dots, x_n)$ и заменой ψ на $\text{th}\psi$ в функциональных уравнениях можно сразу образовать оптимизирующие функционалы, являющиеся аналогами критериев быстродействия и расхода энергии в режимах больших отклонений и квадратичными критериями для режимов малых отклонений.

Рассмотрим синтез системы управления объектом, состоящим из $(n - 1)$ инерционных и одного интегрирующего звеньев, т.е. описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} T_1 \dot{x}_1(t) &= k_1 x_2; \\ T_i \dot{x}_i(t) + x_i &= k_i x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1; \\ T_n \dot{x}_n(t) + x_n &= k_n u. \end{aligned} \quad (64)$$

Выберем агрегированную переменную

$$\psi = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \beta_n = 1, \quad (65)$$

тогда производная $\dot{\psi}(t)$ после подстановки $\dot{x}_i(t)$ из (64) принимает вид

$$\dot{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i k_i / T_i - \beta_{i+1} / T_{i+1}) x_{i+1} + \beta_n k_n u / T_n.$$

Положив, в частности,

$$\beta_i k_i / T_i = \beta_{i+1} / T_{i+1}, \quad (66)$$

получим

$$\dot{\psi}(t) = \beta_n k_n u / T_n. \quad (67)$$

Из соотношения (66) следует выражение

$$\begin{aligned} \beta_i &= T_i / (k_i \dots k_{n-1} T_n), \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \quad \beta_n = 1, \end{aligned} \quad (68)$$

устанавливающее связь между коэффициентами β_i макропеременной ψ и параметрами исходного объекта (64).

Для синтеза управления будем рассматривать функциональное уравнение

$$T \dot{\psi}(t) + \text{th} \psi = 0. \quad (69)$$

Тогда подставив ψ (65) и $\dot{\psi}(t)$ (67) в СОФ

$$J_\Sigma = \int_0^\infty [\text{th}^2 \psi + T^2 \dot{\psi}^2(t)] dt,$$

получаем критерий качества

$$J_1 = \int_0^\infty \left(\text{th}^2 \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \frac{T^2 \beta_n^2 k_n^2}{T_n^2} u^2 \right) dt, \quad (70)$$

который в режиме больших отклонений принимает форму, сходную с критерием быстродействия и затрат энергии на управление

$$J_{1\text{sup}} \sim \int_{t_0 \text{ sup}}^{t_k \text{ sup}} \left(1 + \frac{T^2 \beta_n^2 k_n^2}{T_n^2} u^2 \right) dt. \quad (71)$$

Подставив ψ (65) в функциональное уравнение в силу уравнений объекта (64), получаем оптимальный по критерию (70) закон управления

$$u = -\frac{T_n}{k_n \beta_n T} \text{th} \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad (72)$$

который в режиме больших отклонений имеет ограничение

$$u_{\text{max}} = T_n / (k_n \beta_n T),$$

а в режиме малых отклонений с учетом (68) принимает вид

$$u_{\text{inf}} = -\frac{T_n}{k_1 k_2 \dots k_n T} \left(x_1 + \frac{1}{T_1} \sum_{i=2}^n k_1 k_2 \dots k_{i-1} T_i x_i \right). \quad (73)$$

Закон управления u_{inf} (73) точно совпадает с законом, полученным в работе А. А. Красовского [15] при синтезе следящей системы (64), (73), оптимальной по критерию обобщенной работы

$$J_{\text{inf}} = M \left[\int_0^\infty x_1^2 dt \right] \quad (74)$$

при дополнительном условии

$$\frac{1}{k} M \left[\int_0^\infty u^2 dt \right] + k \left[\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)^2 dt \right] = \text{const}, \quad (75)$$

где весовой коэффициент k связан с параметром T следующим соотношением:

$$k = T_1 T_2^2 \dots T_{n-2}^2 T_n / (k_1 k_2 \dots k_{n-2} T). \quad (76)$$

В выражении (75) коэффициенты α_i определяются через β_i макропеременной ψ выражением

$$\alpha_i = k_i k_2 \dots k_{n-2} \beta_i / (T_1 T_2^2 \dots T_{n-2}^2 T_n). \quad (77)$$

Приведенное соотношение (76) устанавливает связь между параметром T в критерии (70) и весовым коэффициентом k в критерии обобщенной работы (74), (75), а выражение (77) — между коэффициентами обратных связей β_i и α_i , при оптимизации системы соответственно по критериям (70) и (74).

Таким образом, синтезированный закон управления u (72) обеспечивает для объекта (64) переходные процессы, сходные с оптимальным по быстродействию и расходу энергии (71) в режимах больших отклонений, и оптимальные по квадратичному критерию обобщенной работы (74), (75) в режимах малых отклонений от желаемого состояния.

Пример 3. Уравнениями вида (64) описывается достаточно распространенный класс промышленных объектов — электроприводов, транспортных установок, следящих систем и др. На рис. 7, 8 приведены результаты моделирования объекта третьего порядка

вида (64) при $T_1 = 1; T_2 = 2; T_3 = 1; k_1 = k_2 = 1; \beta_1 = 1; \beta_2 = 2$, описываемого уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) + 0,5x_2 &= 0,5x_3; \\ \dot{x}_3(t) + x_3 &= u. \end{aligned} \quad (78)$$

Закон управления (72) объектом (78) принимает вид

$$u = -\frac{1}{T} \text{th}(x_1 + 2x_2 + x_3). \quad (79)$$

На рис. 7 изображены переходные процессы в замкнутой системе (78), (79) при $T = 0,5$, когда критерий (71) принимает вид

$$J_{\text{sup}} \sim \int_{t_0 \text{ ssu}}^{t_k \text{ sup}} (1 + 0,25u^2) dt, \quad (80)$$

а на рис. 8 — при $T = 1$, когда критерий (71) имеет вид

$$J_{\text{sup}} \sim \int_{t_0 \text{ ssu}}^{t_k \text{ sup}} (1 + u^2) dt. \quad (81)$$

Из рис. 7 и 8 следует, что при управлении u (79) переходные процессы в замкнутой системе (78), (79) имеют апериодический характер, при этом для рис. 7, когда параметр компромисса $T = 0,5$, время затухания меньше по сравнению с рис. 8, когда $T = 1$, что соответствует виду критериев (80) и (81) в режиме больших отклонений от заданного состояния объекта.

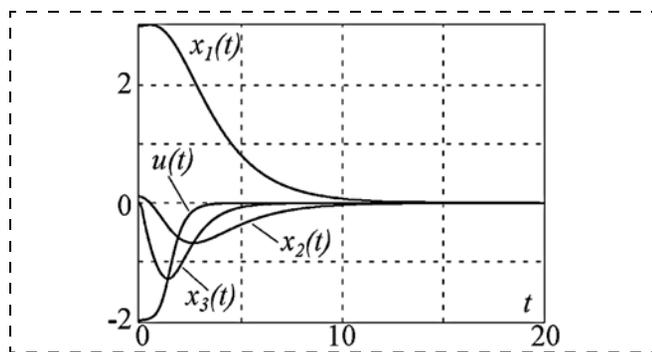


Рис. 7. Переходные процессы при $T = 0,5$

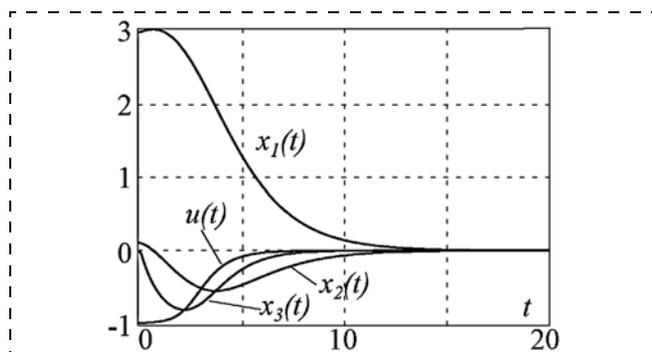


Рис. 8. Переходные процессы при $T = 1$

Рассмотренный здесь подход к многокритериальной оптимизации системы управления объектом (64) опирается на применение СОФ (70), который идентичен частным критериям качества (71) или (74) в соответствующих областях пространства состояний. Это означает, что указанный функционал постепенно, асимптотически сходится к конкретному критерию качества, обеспечивая субоптимальные переходные процессы в системе.

Заключение

В работе проведено сравнение методов АКАР и АКОР на конкретных примерах синтеза систем. Показана эквивалентность этих методов, так и существенная разница в подходах к аналитическому синтезу законов управления: в отличие от методов АКОР, в методе АКАР оптимизирующий функционал является конструируемым критерием качества, структура и параметры которого определяются проектировщиком системы управления исходя из физических свойств объекта и предъявляемых к системе инженерных требований. Синтезируемые методом АКАР законы управления также могут обеспечивать субоптимальные переходные процессы в системе: оптимальные по быстродействию и расходу энергии в режиме больших отклонений от желаемого конечного состояния и оптимальные по квадратичному критерию обобщенной работы в режиме малых отклонений. На примерах синтеза проиллюстрированы явные преимущества метода АКАР как в отношении процедур аналитического конструирования законов управления для нелинейных объектов, обоснованности и однозначности выбора настроечных параметров регуляторов, так и в отношении обеспечения свойств асимптотической устойчивости замкнутых систем.

Список литературы

1. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
2. Seron M. M., Braslavsky J. H., Kokotovic P. V., Mayne D. Q. Feedback limitations in nonlinear systems: from Bode integrals to cheap control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. Vol. 44, Iss. 4. P. 829–833.
3. Garcia C., Prett M. Model predictive control: theory and practice // Automatica. 1989. Vol. 25, Iss. 3. P. 335–348.
4. Åström K. J., Kumar P. R. Control: A perspective // Automatica. 2014. Vol. 50, Iss. 1. P. 3–43.
5. Isidori A. Nonlinear control systems an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1995. 545 p.
6. Hull D. G. Optimal Control Theory for Applications. New York: Springer-Verlag, 2003. 384 p.
7. Burghes D., Graham A. Control and Optimal Control Theories with Applications. London: Woodhead Publishing, 2004. 400 p.
8. Филимонов Н. Б. Непостижимая эффективность математики и кризис современной теории управления // Тр. 4-го Междунар. науч.-техн. семинара "Современные проблемы прикладной математики, информатики, автоматизации, управления". Севастополь: Изд-во ИПИ РАН, 2014. С. 16–28.
9. Филимонов Н. Б. Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2–11.

10. Современная прикладная теория управления: Ч. II. Синергетический подход в теории управления / Под ред. А. А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. 559 с.

11. Колесников А. А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.

12. Kolesnikov A. A. Introduction of synergetic control // Proc. of the American Control Conference ACC-2014, Portland, OR, USA, 4–6 June 2014. P. 3013–3016.

13. Буков В. Н., Сизых В. Н. Приближенный синтез оптимального управления в вырожденной задаче аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 16–32.

14. Летов А. М. Синтез оптимальных систем // Тр. II Международного конгресса ИФАК "Оптимальные системы. Статистические методы". М.: Наука, 1965. 456 с.

15. Красовский А. А. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М.: Наука, 1968. 240 с.

The ADAR Method and Theory of Optimal Control in the Problems of Synthesis of Nonlinear Control Systems

A. A. Kolesnikov, ankolesnikov@sfedu.ru, Al. A. Kolesnikov, alkolesnikov@sfedu.ru,
A. A. Kuz'menko, aakuzmenko@sfedu.ru, Southern Federal University,
Institute of Computer Technologies and Information Security, Taganrog, 347922, Russian Federation

Corresponding author: Kuzmenko Andrew A., Ph. D., Associate Professor,
Southern Federal University, Institute of Computer Technologies and Information Security,
Taganrog, 347922, Russian Federation, e-mail: aakuzmenko@sfedu.ru

Received on May 25, 2016

Accepted on June 04, 2016

In the paper the authors compare the known method of Analytical Design of the Aggregated Regulators (ADAR) with the method of Analytical Design of the Optimal Regulators (ADOR). The ADAR method has significant advantages: (i) easier procedure of analytical design of the nonlinear laws of the optimal control; (ii) physically clear presentation of the weight factors of the optimality criterions; and (iii) stability of the closed-loop optimal system. As opposed to the method of the optimal control, the ADAR method is free from the demand to solve Riccati's equation and Bellman's equation, and the procedure of the control laws' analytical design is easier. The control laws designed with ADAR method also may ensure sub-optimal transients in a system: time optimal and energy optimal in the mode of big deviations from the desired final state, as well as optimal to the quadratic criterion of the generalized work (criterion of A. A. Krasovskii) in the mode of small deviations. The provided numerical examples display equivalency of these methods, as well as a significant difference in the approaches used for the analytical design of the control laws, i.e. in contrast to ADOR, in the ADAR method the optimizing functional is a constructed performance criteria, the structure and the parameters of which are defined by the designer of the control system in accordance with the object's physical properties and the desired engineering requirements.

Keywords: control design, nonlinear control systems, optimal control, synergetic control theory

Acknowledgements: This work was supported by RFBR (grant № 14-08-00782-a).

For citation:

Kolesnikov A. A., Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A. The ADAR Method and Theory of Optimal Control in the Problems of Synthesis of the Nonlinear Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 10, pp. 657–669.

DOI: 10.17587/mau.17.657-669

References

1. Krasovskii A. A. *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya poletom i ih analiticheskoe konstruirovaniye* (Systems of automatic flight control and their analytical design), Moscow, Nauka, 1973, 560 p. (in Russian).

2. Seron M. M., Braslavsky J. H., Kokotovic P. V., Mayne D. Q. Feedback limitations in nonlinear systems: from Bode integrals to cheap control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, vol. 44, iss. 4, pp. 829–833.

3. Garcia C., Prett M. Model predictive control: theory and practice, *Automatica*, 1989, vol. 25, iss. 3, pp. 335–348.

4. Åström K. J., Kumar P. R. Control: A perspective, *Automatica*, 2014, vol. 50, iss. 1, pp. 3–43.

5. Isidori A. Nonlinear control systems an introduction, Berlin, Springer-Verlag, 1995, 545 p.

6. Hull D. G. Optimal Control Theory for Applications, New York, Springer-Verlag, 2003, 384 p.

7. Burghes D., Graham A. Control and Optimal Control Theories with Applications, London, Woodhead Publishing, 2004, 400 p.

8. Filimonov N. B. *Nepostizhimaya jeffektivnost' matematiki i krizis sovremennoj teorii upravleniya* (Incomprehensible efficiency of mathematics and crisis of the modern control theory), *Trudy 4th Mezhdunarodnogo nauchno-tehnicheskogo seminaru "Sovremennye problemy prikladnoj matematiki, informatiki, avtomatizatsii, upravleniya"*, Sevastopol, IPI RAN, 2014, pp. 16–28 (in Russian).

9. Filimonov N. B. *Problema kachestva processov upravleniya: smena optimizacionnoy paradigmy* (The problem of quality of control processes: change of an optimizing paradigm), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 12, pp. 2–11 (in Russian).

10. Kolesnikov A. A. ed. *Sovremennaja prikladnaja teorija upravleniya: Ch. II. Sinergeticheskij podhod v teorii upravleniya* (The modern applied control theory: Part II. Synergetic approach in the control theory), Taganrog, Publishing house of TRTU, 2000, 559 p. (in Russian).

11. Kolesnikov A. A. *Sinergeticheskaja teorija upravleniya* (Synergetic control theory), Moscow, Jenergoatomizdat, 1994. 344 p. (in Russian).

12. Kolesnikov A. A. Introduction of synergetic control, *Proceedings of the American Control Conference ACC-2014*, Portland, OR, USA, 4–6 June 2014, pp. 3013–3016.

13. Bukov V. N., Sizyh V. N. *Priblizhennyj sintez optimal'nogo upravleniya v vyrozhdennoj zadache analiticheskogo konstruirovaniya regulatorov* (Approximate synthesis of optimum control in a confluent problem of analytical regulators design), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1999, no. 12, pp. 16–32 (in Russian).

14. Letov A. M. *Sintez optimal'nyh sistem* (The optimal systems synthesis), *Trudy II Mezhdunarodnogo kongressa IFAK "Optimal'nye sistemy. Statisticheskie metody"*, Moscow, Nauka, 1965, 456 p. (in Russian).

15. Krasovskii A. A. *Statisticheskaja teorija perehodnyh processov v sistemah upravleniya* (The statistical theory of transient processes in control systems), Moscow, Nauka, 1968, 240 p. (in Russian).