УДК 521.1, 629 DOI: 10.17587/mau.17.633-643

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц., ChelnokovYuN@gmail.com,
Ю. Н. Челноков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. лаб., ChelnokovYuN@gmail.com,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2*

С использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) и принципа максимума Понтрягина изучается задача оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Во второй части статьи излагается новая теория решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА в импульсной постановке (с использованием импульсной (большой) реактивной тяги). Приводятся алгоритмы решения краевых задач оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА (для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги) и примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной (малой) или импульсной (большой) тяги, в которых для описания ориентации орбиты КА используется кватернионный оскулирующий элемент ориентации орбиты.

Ключевые слова: *космический аппарат, ориентация орбиты, ограниченная (малая) и импульсная (большая) реактивная тяга, оптимальное управление, кватернион*

Введение

В работе с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) [1—8] и принципа максимума Понтрягина изучается задача оптимальной переориентации орбиты КА с помощью реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Частным случаем этой задачи является хорошо известная и имеющая большое практическое значение задача коррекции угловых элементов орбиты КА, когда изменения угловых элементов орбиты в процессе управления имеют малые значения. Использование управления, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА, позволяет корректировать элементы орбиты КА, сохраняя ее форму и размеры неизменными. Это ценное свойство изучаемого процесса переориентации орбиты КА является полезным при решении как задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета, например, при управлении конфигурацией группировки спутников.

Комбинированный функционал, определяющий качество процесса переориентации орбиты КА, представляет собой свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса реактивной тяги, затраченных на процесс управления (частные случаи этого функционала — случай быстродействия и случай минимизации характеристической скорости). Рассмотрены случаи оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги.

В первой части нашей работы [9] был приведен обзор работ по дифференциальным уравнениям ориентации орбиты КА и изучаемой проблеме оптимальной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. В ней также была изложена известная кватернионная постановка задачи оптимальной переориентации орбиты КА посредством ограниченной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА, принадлежащая авторам работы, приведены основные уравнения и соотношения, полученные при решении этой задачи с помощью дифференциальных уравнений, содержащих кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА, и принципа максимума Понтрягина.

На практике [10] также рассматривается управление плоскостью орбиты КА (долготой восходящего узла $\mathbf{\Omega}_u$ или (и) наклоном орбиты I) импульсного типа с помощью вектора реактивной тяги, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА. При этом время работы реактивного двигателя считается малым, так что изменением радиуса-вектора $\mathbf{r}$ центра масс КА за время маневра пренебрегают. Схемы маневров такого типа описаны в работе [10], где приводятся векторные диаграммы маневров для малых углов поворота плоскости орбиты КА. Для нахождения зависимостей в работе [10] используют теоремы сферической тригонометрии. При этом вопросы оптимизации маневров (в стро-

* Часть 1 опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление" № 8, 2016.

гой линейной или нелинейной постановке) не затрагиваются.

Основная цель настоящей работы — решение задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием двигателя большой тяги (в импульсной постановке) и с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА. При решении этой задачи нами в соответствии с известной методологией решения задач оптимальных импульсных перелетов КА [11] используются соответствующие предельные переходы в кватернионных уравнениях и соотношениях, полученных с помощью принципа максимума Понтрягина в задаче оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной (малой) тяги и приведенных в первой части статьи [9].

Отметим, что исследованию задачи оптимальной переориентации орбиты КА в различных непрерывных постановках (с использованием двигателя малой тяги) и с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА были посвящены также работы [12—15].

В настоящей (второй) части статьи излагаются в строгой нелинейной постановке новая теория и новые алгоритмы решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА посредством импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты, с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА для нефиксированного числа импульсов тяги.

Построенная теория содержит формулы, лежащие в основе оптимальной импульсной переориентации орбиты КА: формулу, связывающую алгебраическую величину импульса реактивной тяги с углом поворота орбиты КА вокруг радиуса-вектора центра масс КА; формулы для приращений на активном участке траектории кватерниона конечного поворота орбиты КА, кватернионной сопряженной переменной и скалярной сопряженной (по отношению к истинной аномалии) переменной, а также формулы для приращений переменных, описывающих процесс (линию) переключения управления, и формулу, описывающую дополнительное условие для внутреннего импульса реактивной тяги.

Предложенные алгоритмы численного решения задачи оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги позволяют определять оптимальные моменты включения реактивного двигателя, оптимальные алгебраические величины импульсов реактивной тяги и их оптимальное число.

Импульсная задача оптимальной переориентации орбиты КА

Решение задачи об оптимальной переориентации орбиты КА с большой (импульсной) тягой, ортогональной плоскости орбиты КА, можно получить в результате предельного перехода в аналогичной задаче с ограниченной тягой [9], когда максимальное значение безразмерной тяги u_m реактивного двигателя неограниченно увеличивается, т.е. $u_m \to \infty$, а безразмерная длительность активных этапов управления $\Delta\tau_i$ уменьшается, т.е. $\Delta\tau_i \to 0$.

В те моменты времени, когда выполняется равенство

$$\frac{|N_1\cos\varphi_i + N_2\sin\varphi_i|}{2(1+e\cos\varphi_i)} = \alpha_2, \qquad (1)$$

в результате работы двигателя большой тяги (сообщения импульса тяги) орбита КА будет поворачиваться на некоторый конечный угол вокруг оси, совпадающей с радиус-вектором КА в этот момент времени. Во все остальные моменты времени двигатель большой тяги выключен, КА совершает пассивное движение, орбита остается неподвижной и выполняется неравенство

$$\frac{|N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi|}{2(1+e\cos\varphi)} < \alpha_2. \qquad (2)$$

Здесь φ — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); e — эксцентриситет орбиты; N_1, N_2 — переменные [9], описывающие линию переключения оптимального управления; $\alpha_2 > 0$ — постоянный безразмерный весовой множитель в функционале минимизации [9], характеризующий долю затрат характеристической скорости на переориентацию орбиты КА.

Предел произведения безразмерной величины тяги u с учетом ее знака в момент безразмерного времени τ_i на длительность активного этапа $\Delta\tau_i$ при условии, что $u_m \to \infty$, $\Delta\tau_i \to 0$, будем называть безразмерным импульсом тяги и обозначать U_i. Знак импульса U_i согласно закону оптимального управления (23) (см. работу [9]) должен совпадать со знаком суммы

$$N_{1,i-1}\cos\varphi_i + N_{2,i-1}\sin\varphi_i,$$

где $N_{1,i-1}$, $N_{2,i-1}$ — значения переменных N_1, N_2 на этапе пассивного движения перед сообщением импульса в момент τ_i.

Функционал, определяющий качество процесса управления и принимающий минимальное значение для оптимального процесса в импульсной задаче, в безразмерных переменных имеет вид

$$J = \alpha_1\tau_k + \alpha_2\sum_{i=1}^{k}|U_i|, \qquad (3)$$

где $\alpha_1 \geqslant 0$ — постоянный безразмерный весовой множитель, характеризующий долю затрат времени на переориентацию орбиты КА; k — число моментов включения двигателя большой тяги.

Угол поворота орбиты $\Delta\psi_i$ под действием импульса U_i согласно второму дифференциальному кватернионному уравнению системы (12) (см. работу [9]), описывающему мгновенную ориентацию орбиты КА, будет определяться по формуле

$$\Delta\psi_i = \frac{U_i}{1 - e\cos\varphi_i}. \qquad (4)$$

Если обозначить $\mathbf{\Lambda}_{i-1}$ значение кватерниона, определяющего ориентацию орбиты на этапе перед сообщением импульса U_i в момент τ_i, а $\mathbf{\Lambda}_i$ — значение кватерниона ориентации орбиты после сообщения импульса, то они будут связаны соотношением

$$\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{\Lambda}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i,$$
$$\mathbf{B}_i = \cos\frac{\Delta\psi_i}{2} + \sin\frac{\Delta\psi_i}{2}(\mathbf{i}_1\cos\varphi_i + \mathbf{i}_2\sin\varphi_i). \qquad (5)$$

Здесь и далее $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, $\circ$ — символ кватернионного умножения.

Аналогичное соотношение (согласно кватернионному сопряженному уравнению (19) (см. работу [9])) будет между кватернионами $\mathbf{M}_{i-1}$ и $\mathbf{M}_i$ в результате сообщения импульса U_i:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i. \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{M}$ — кватернионная сопряженная переменная, соответствующая кватернионной фазовой переменной $\mathbf{\Lambda}$, характеризующей ориентацию оскулирующей орбиты КА в инерциальной системе координат.

Согласно (20) (см. работу [9]), (5) и (6) значения кватернионной переменной $\mathbf{N}$, компоненты N_1, N_2, N_3 векторной части которой описывают собой линию переключения оптимального управления, до момента сообщения импульса и после него будут связаны соотношением

$$\mathbf{N}_i = \tilde{\mathbf{B}}_i \circ \mathbf{N}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i. \qquad (7)$$

Изменение $\Delta\chi_i$ скалярной переменной χ, сопряженной по отношению к скалярной фазовой переменной φ (истинной аномалии), за промежуток безразмерного времени $\Delta\tau_i$ под действием двигателя большой тяги согласно уравнению (22) (см. работу [9]), которому удовлетворяет сопряженная переменная χ, определяется по формуле

$$\Delta\chi_i = 2e\int_{\tau_i}^{\tau_i+\Delta\tau_i}\chi(1 + e\cos\varphi)\sin\varphi d\tau +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_i+\Delta\tau_i}\frac{u}{(1 + e\cos\varphi)^2}(N_1\sin\varphi - N_2(e + \cos\varphi))d\tau. \qquad (8)$$

При предельном переходе, в котором $u_m \to \infty$, $\Delta\tau_i \to 0$, значение первого слагаемого в правой части формулы (8) будет стремиться к нулю, так как подынтегральная функция остается ограниченной. При вычислении предела второго слагаемого в правой части (8) можно полагать, что $\varphi \approx \varphi_i$, и согласно кватернионному дифференциальному уравнению ориентации орбиты КА (второму уравнению фазовой системы (12) (см. работу [9])) орбита равномерно вращается вокруг неподвижной оси, так как промежуток активного этапа мал, а управляющий параметр u на этом этапе согласно закону оптимального управления (23) (см. работу [9]) сохраняет постоянное значение.

Введем на промежутке $\Delta\tau_i$ кватернион $\mathbf{B}_i(\Delta\tau)$ по формуле

$$\mathbf{B}_i(\Delta\tau) = \cos\left(\frac{\Delta\psi_i\Delta\tau}{2\Delta\tau_i}\right) + \sin\left(\frac{\Delta\psi_i\Delta\tau}{2\Delta\tau_i}\right)(\mathbf{i}_1\cos\varphi_i + \mathbf{i}_2\sin\varphi_i),$$
$$0 \leqslant \Delta\tau \leqslant \Delta\tau_i. \qquad (9)$$

Тогда внутри промежутка $\Delta\tau_i$ во время работы двигателя большой тяги кватернионы $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}$ по аналогии с (5) и (6) будут определяться по формулам

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i(\Delta\tau),\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i(\Delta\tau). \qquad (10)$$

Согласно формулам (7) и (9) кватернионная переменная $\mathbf{N}$ внутри промежутка $\Delta\tau_i$ будет определяться через свое значение $\mathbf{N}_{i-1}$ перед сообщением импульса по формуле

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{B}}_i(\Delta\tau) \circ \mathbf{N}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i(\Delta\tau). \qquad (11)$$

Компоненты N_1, N_2, N_3 кватерниона $\mathbf{N}$ внутри промежутка $\Delta\tau_i$ согласно (9), (11) определяются по формулам

$$N_1 = N_{1,i-1} - \sin\varphi_i\Phi_i(\Delta\tau),$$
$$N_2 = N_{2,i-1} + \cos\varphi_i\Phi_i(\Delta\tau),$$
$$N_3 = \sin\left(\frac{\Delta\psi_i\Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right))(N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}\cos\varphi_i) +$$
$$+ N_{3,i-1}\cos\left(\frac{\Delta\psi_i\Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right); \qquad (12)$$
$$\Phi_i(\Delta\tau) = 2\sin^2\left(\frac{\Delta\psi_i\Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right)(N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}\cos\varphi_i) +$$
$$+ N_{3,i-1}\sin\left(\frac{\Delta\psi_i\Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right).$$

Если соотношения (12) подставить в формулу (8) и выполнить предельный переход, в котором $u_m \to \infty$, $\Delta\tau_i \to 0$, то изменение $\Delta\chi_i$ сопряженной переменной χ под действием импульса U_i будет определяться по формуле

$$\Delta\chi_i = \frac{U_i}{2(1 + e\cos\varphi_i)^2}\Bigg\{N_{1,i-1}\sin\varphi_i -$$
$$- N_{2,i-1}(e + \cos\varphi_i) - (1 + e\cos\varphi_i) \times$$
$$\times \left[(N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}\cos\varphi_i)\left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i}\right) +\right.$$
$$\left.+ N_{3,i-1}\frac{1 - \cos(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i}\right]\Bigg\}. \qquad (13)$$

Из соотношения (7) следует, что выражение $N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi$ в момент сообщения импульса остается непрерывным, хотя при этом переменные N_1, N_2 испытывают разрыв, т.е.

$$N_{1,i-1}\cos\varphi_i + N_{2,i-1}\sin\varphi_i = \\ = N_{1,i}\cos\varphi_i + N_{2,i}\sin\varphi_i. \quad (14)$$

В каждый момент времени, когда аппарату сообщается импульс тяги в результате работы двигателя большой тяги, выполняется соотношение (1). Кватернионные переменные $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}$ в этот момент испытывают разрыв, их значения по обе стороны от разрыва связаны соотношениями (5), (6).

Сопряженная переменная χ на пассивных этапах управления определяется формулой (28) (см. работу [9]). Поэтому эта переменная должна оставаться непрерывной в те моменты сообщения импульсов тяги, которые не совпадают с начальным или конечным моментами времени движения КА, т.е. в те моменты времени, которые являются внутренними моментами сообщения импульсов тяги. В эти моменты времени согласно формуле (13) должно выполняться соотношение $\Delta\chi_i = 0$ или соотношение

$$N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}(e + \cos\varphi_i) - \\ - (1 + e\cos\varphi_i)\Big[(N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}\cos\varphi_i) \times \\ \times \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i}\right) + N_{3,i-1}\frac{1 - \cos(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i}\Big] = 0. \quad (15)$$

Импульс тяги U_i и угол поворота орбиты $\Delta\psi_i$, фигурирующий в формуле (15), связаны соотношением (4). Поэтому если импульс тяги U_i сообщается во внутренний момент времени, то он должен удовлетворять условию (15).

Таким образом, с использованием дифференциального кватернионного уравнения ориентации оскулирующей орбиты КА получены соотношения, лежащие в основе импульсной оптимальной переориентации орбиты КА: формула (4), связывающая импульс реактивной тяги U_i на i-м активном участке траектории с углом $\Delta\psi_i$ поворота орбиты КА вокруг его радиуса-вектора; формула (5), связывающая значение кватерниона $\mathbf{\Lambda}_{i-1}$, определяющего ориентацию орбиты перед сообщением импульса U_i в момент τ_i, со значением кватерниона ориентации орбиты $\mathbf{\Lambda}_i$ после сообщения импульса; аналогичная формула (6) для кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{M}$, формула (13) для приращения $\Delta\chi_i$ скалярной сопряженной переменной χ, а также формула (14), связывающая значения переменных N_1, N_2, описывающих функцию переключения управления, в начальный и конечный моменты времени i-го активного участка. Получено, кроме того, дополнительное условие (15) для внутреннего импульса реактивной тяги.

Структура и алгоритмы оптимального импульсного управления ориентацией орбиты КА

I. Как было отмечено в первой части статьи [9], в задаче с ограниченной тягой последний этап оптимального управления должен быть активным. По этой причине в задаче с импульсным двигателем момент окончания оптимального управления должен совпадать с моментом сообщения импульса. Следовательно, в конечный момент времени $\tau = \tau_k$ в скалярном исчислении должны выполняться шесть условий: условие (1), а также условия (15), (24), (25), приведенные в работе [9]:

$$\frac{|N_{1,k-1}\cos\varphi_k + N_{2,k-1}\sin\varphi_k|}{2(1 + e\cos\varphi_k)} = \alpha_2,$$

$$\mathrm{vect}(\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\tau_k) \circ \mathbf{\Lambda}_k) = 0, \ (\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda})_{\tau_k} = 0,$$

$$\alpha_1 + \frac{U_k}{2}\Big\{N_{1,k-1}\sin\varphi_k - N_{2,k-1}(e + \cos\varphi_k) - \\ - (1 + e\cos\varphi_k)\Big[(N_{1,k-1}\sin\varphi_k - N_{2,k-1}\cos\varphi_k) \times \\ \times \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_k}\right) + N_{3,k-1}\frac{1 - \cos(\Delta\psi_k)}{\Delta\psi_k}\Big]\Big\} = 0. \quad (16)$$

В соотношениях (16) через k обозначен номер момента сообщения последнего импульса, условие (26) (см. работу [9]) учтено выбором формулы (28) (см. работу [9]) для определения сопряженной переменной χ перед моментом сообщения последнего импульса.

Если начальный момент времени $\tau = 0$ совпадает с моментом сообщения импульса, то при $\varphi = \varphi_0$ должно выполняться условие (1):

$$\frac{|N_{1,0}\cos\varphi_0 + N_{2,0}\sin\varphi_0|}{2(1 + e\cos\varphi_0)} = \alpha_2. \quad (17)$$

Пусть оптимальное управление содержит два импульса, которые сообщаются в начальный и конечный моменты времени. Тогда соотношения (16), (17) дают семь уравнений (в скалярном исчислении) для определения семи неизвестных, а именно: U_1 — начального (первого) импульса, U_k — конечного (последнего) импульса, φ_k — значения истинной аномалии в конечный момент времени, $\mathbf{M}_0$ — значения кватернионной сопряженной переменной в начальный момент времени. Если оптимальное управление состоит только из одного импульса, который сообщается в конечный момент времени, то соотношения (16) дают шесть уравнений для определения шести (в скалярном исчислении) неизвестных: U_k, φ_k, $\mathbf{M}_0$.

Если оптимальное управление включает импульсы, которые сообщаются во внутренние моменты времени (т.е. число импульсов реактивной тяги больше двух), то каждый такой момент порождает две новые неизвестные U_i, φ_i и два новых уравнения (1) и (15). Кватернионный интеграл (29) (см. работу [9]) имеет место и для импульсной задачи оптимального управления и позволяет условие трансверсальности (25) (см. работу [9]) (третье из условий (16)) выполнить в начальный момент времени.

Так же, как и для случая решения задачи с ограниченным управлением, при решении задачи оптимального управления с импульсным управлением кватернионную переменную **M** можно исключить, если использовать кватернионную переменную **N** с нулевой скалярной составляющей.

Если оптимальное управление состоит только из двух импульсов, которые сообщаются в начальный и конечный моменты времени, то использование кватернионной переменной **N** с нулевой скалярной частью существенно упрощает решение задачи. Обозначим U_1 — начальный (первый) импульс, U_2 — второй (последний) импульс, φ_k — истинная аномалия в конечный момент времени. Тогда углы поворотов $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$ орбиты вокруг радиус-вектора КА в начальный и конечный моменты времени будут определяться согласно соотношению (4) по формулам

$$\Delta\psi_1 = \frac{U_1}{1 + e\cos\varphi_0},\ \Delta\psi_2 = \frac{U_2}{1 + e\cos\varphi_k}. \qquad (18)$$

Согласно соотношениям (5) вводятся кватернионы $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \cos\frac{\Delta\psi_1}{2} + \sin\frac{\Delta\psi_1}{2}(\mathbf{i}_1\cos\varphi_0 + \mathbf{i}_2\sin\varphi_0);\\ \mathbf{B}_2 &= \cos\frac{\Delta\psi_2}{2} + \sin\frac{\Delta\psi_2}{2}(\mathbf{i}_1\cos\varphi_k + \mathbf{i}_2\sin\varphi_k).\end{aligned} \qquad (19)$$

Кватернионы $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$, определяющие ориентации орбиты после сообщения первого и второго импульсов, согласно соотношениям (5) определяются по формулам

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \mathbf{B}_1,\ \mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{\Lambda}_1 \circ \mathbf{B}_2 = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \mathbf{B}_1 \circ \mathbf{B}_2. \qquad (20)$$

Векторное условие (15) (см. работу [9]) (второе из условий (16)), которое можно записать в виде

$$\mathrm{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}_2 \circ \mathbf{\Lambda}_k) = \mathrm{vect}(\tilde{\mathbf{B}}_2 \circ \tilde{\mathbf{B}}_1 \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \circ \mathbf{\Lambda}_k) = 0, \qquad (21)$$

дает три скалярных уравнения для определения неизвестных U_1, U_2, φ_k, из которых видно, что эти искомые величины не зависят от весовых множителей α_1, α_2 функционала минимизации. Заметим, что для нелинейной системы трансцендентных уравнений (21) можно получить аналитическое решение.

Если компоненты кватерниона $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$ с нулевой скалярной частью на пассивном этапе движения КА после сообщения первого (начального) импульса обозначить $N_{1,1}$, $N_{2,1}$, $N_{3,1}$, то для их определения согласно соотношениям (16), (17) можно записать систему трех линейных алгебраических уравнений:

$$N_{1,1}\cos\varphi_0 + N_{2,1}\sin\varphi_0 = 2\alpha_2(1 + \cos\varphi_0)\mathrm{sign}\,U_1; \qquad (22)$$

$$N_{1,1}\cos\varphi_k + N_{2,1}\sin\varphi_k = 2\alpha_2(1 + \cos\varphi_k)\mathrm{sign}\,U_2; \qquad (23)$$

$$\alpha_1 + \frac{U_2}{2}\Big\{N_{1,1}\sin\varphi_k - N_{2,1}(e + \cos\varphi_k) - $$

$$- (1 + e\cos\varphi_k)\Big[(N_{1,1}\sin\varphi_k - N_{2,1}\cos\varphi_k) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_2)}{\Delta\psi_2}\right) + N_{3,1}\frac{1 - \cos(\Delta\psi_2)}{\Delta\psi_2}\Big]\Big\} = 0. \qquad (24)$$

Уравнения (22) и (23) определяют $N_{1,1}$, $N_{2,1}$, а уравнение (24) определяет $N_{3,1}$.

Значения кватернионов $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ в начальный момент времени перед сообщением первого импульса согласно соотношениям (7) и (20) (см. работу [9]) определяются по формулам

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{B}_1 \circ \mathbf{N}_1 \circ \tilde{\mathbf{B}}_1,\ \mathbf{M}_0 = \Lambda_0 \circ \mathbf{N}_0. \qquad (25)$$

Из соотношений (22)—(24) видно, что значения сопряженных переменных $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{M}_0$ в начальный момент времени зависят от весовых множителей α_1, α_2.

Длительность пассивного этапа управления между двумя последовательными моментами сообщения импульса в безразмерных переменных определяется по формуле

$$\tau_i - \tau_{i-1} = \frac{1}{1 - e^2} \times$$

$$\times \left[-\frac{e\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi} + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}}\mathrm{arcth}\left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i}. \qquad (26)$$

После решения импульсной задачи оптимального управления необходимо проверить выполнение условия (2) на промежутках между моментами включения импульсного двигателя для того, чтобы были выполнены все условия принципа максимума Понтрягина.

Отметим основные особенности решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА (с использованием кватернионного оскулирующего элемента орбиты КА):

1. На пассивном этапе управления кватернион $\mathbf{\Lambda}$ ориентации орбиты КА сохраняет свое значение постоянным, а на активных этапах орбита КА поворачивается как неизменяемая фигура вокруг оси, направленной вдоль радиус-вектора КА.

2. Краевые условия задачи оптимальной переориентации орбиты КА и условия трансверсальности на правом подвижном конце траектории при использовании кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ записываются проще (естественнее), чем при использовании кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации орбитальной системы координат [5].

3. Дифференциальное кватернионное уравнение для переменной **M**, сопряженной к кватернионной фазовой переменной $\mathbf{\Lambda}$, совпадает по своей форме с дифференциальным кватернионным уравнением для переменной $\mathbf{\Lambda}$. Этот эффект является следст-

вием свойства самосопряженности кватернионного кинематического уравнения вращательного движения твердого тела, установленного В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским [16]. Указанный эффект позволяет получить кватернионный первый интеграл (29) (см. работу [9]) дифференциальных фазовых и сопряженных уравнений изучаемой задачи.

4. В импульсной задаче оптимальной переориентации орбиты КА кватернион $\mathbf{\Lambda}$ ориентации орбиты КА и сопряженный ему кватернион $\mathbf{M}$ во время работы импульсного двигателя (двигателя большой тяги) изменяются скачкообразно. Изменению фазового кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ соответствует поворот орбиты КА на конечный угол вокруг радиуса-вектора КА.

5. Решение импульсной задачи оптимальной переориентации орбиты КА в случае, когда оптимальное управление состоит из двух импульсов реактивной тяги, сообщаемых КА в начальный и конечный моменты времени движения, сводится к решению системы алгебраических уравнений, которая расщепляется на две системы алгебраических уравнений, решаемых последовательно. Первая система (21), состоящая из трех нелинейных уравнений, служит для определения алгебраических величин начального U_1 и конечного U_2 импульсов тяги реактивного двигателя и истинной аномалии φ_k, характеризующей положение КА на орбите в конечный момент времени. Вторая линейная система алгебраических уравнений (22)—(24) служит для определения значений компонент кватернионной переменной $\mathbf{N}$ (имеющей нулевую скалярную часть) после сообщения первого импульса тяги. По этим значениям вычисляются с помощью формул (25) значения кватернионной переменной $\mathbf{N}$ и кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{M}$ в начальный момент времени. По формуле (26) вычисляется длительность пассивного этапа управления между двумя моментами сообщения импульса, а следовательно, и длительность всего процесса управления. После этого необходимо проверить выполнение условия (2) на промежутках между моментами включения импульсного двигателя. Таким образом, имеем простой алгоритм решения задачи двухимпульсной переориентации орбиты КА в случае, когда оптимальные импульсы реактивной тяги сообщаются КА в начальный и конечный моменты времени.

Отметим, что в случае оптимальной переориентации орбиты КА, реализованной с помощью двух импульсов, сообщаемых КА в начальный и конечный моменты времени движения, оптимальное управление не зависит от значений весовых множителей в функционале качества, а зависит только от истинной аномалии КА в начальный момент времени, начальной и конечной ориентаций орбиты КА.

Свойства, аналогичные свойствам 1 и 3—5, имеются и при решении импульсной задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием в качестве кватернионной фазовой переменной кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации орбитальной системы координат [5].

II. Приведем алгоритм решения краевой задачи оптимального управления для переориентации орбиты КА с импульсной тягой, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты, в общем случае, когда заранее не задается число импульсов.

Как было показано выше, в случае, когда импульсный двигатель включается в момент времени, который является внутренней точкой промежутка управления, в этот момент времени должны выполняться следующие соотношения:

$$|N_{1,i-1}\cos\varphi_i + N_{2,i-1}\sin\varphi_i| = 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi_i); \quad (27)$$

$$N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}(e + \cos\varphi_i) -$$
$$- (1 + e\cos\varphi_i)\Big[(N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}\cos\varphi_i) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i}\right) + N_{3,i-1}\frac{1-\cos(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i}\Big] = 0, \quad (28)$$

где $\Delta\psi_i = \dfrac{U_i}{1 + e\cos\varphi_i}$, φ_i — истинная аномалия КА в момент сообщения импульса; U_i — алгебраическая величина импульса; $N_{1,i-1}$, $N_{2,i-1}$, $N_{3,i-1}$ — координаты вектора $\mathbf{N}$ (т.е. кватерниона $\mathbf{N}$ с нулевой скалярной частью) на промежутке пассивного движения перед моментом сообщения импульса.

Кроме того, в этот момент происходит скачкообразное изменение кватерниона ориентации орбиты $\mathbf{\Lambda}$ и вектора $\mathbf{N}$ по формулам

$$\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{\Lambda}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i, \ \mathbf{N}_i = \widetilde{\mathbf{B}}_i \circ \mathbf{N}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i; \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_i = \cos\frac{\Delta\psi_i}{2} + \sin\frac{\Delta\psi_i}{2}(\mathbf{i}_1\cos\varphi_i + \mathbf{i}_2\sin\varphi_i). \quad (30)$$

Если момент сообщения импульса совпадает с начальным моментом процесса управления, то в этот момент выполняется соотношение

$$|N_{1,0}\cos\varphi_1 + N_{2,0}\sin\varphi_1| = 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi_1), \quad (31)$$

где $\varphi_1 = \varphi_0$ — истинная аномалия КА в начальный момент времени; $N_{1,0}$, $N_{2,0}$ — координаты вектора $\mathbf{N}$ в начальный момент времени.

В конечный момент времени, который обязательно совпадает с моментом сообщения последнего импульса, должны выполняться следующие соотношения:

$$|N_{1,k-1}\cos\varphi_k + N_{2,k-1}\sin\varphi_k| = 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi_k); \quad (32)$$

$$\mathrm{vect}(\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\tau_k) \circ \mathbf{\Lambda}_k) = 0; \quad (33)$$

$$\alpha_1 + \frac{U_k}{2}\Big\{N_{1,k-1}\sin\varphi_k - N_{2,k-1}(e + \cos\varphi_k) -$$

$$- (1 + e\cos\varphi_k)\Big[(N_{1,k-1}\sin\varphi_k - N_{2,k-1}\cos\varphi_k) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_k)}{\Delta\psi_k}\right) + N_{3,k-1}\frac{1 - \cos(\Delta\psi_k)}{\Delta\psi_k}\Big]\Big\} = 0, \quad (34)$$

где $\Delta\psi_k = \dfrac{U}{1 + e\cos\varphi_k}$, а $N_{1,k-1}$, $N_{2,k-1}$, $N_{3,k-1}$ — компоненты вектора $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{k-1}$ на пассивном участке перед конечным моментом времени.

После сообщения импульса (за исключением последнего) необходимо проверить, что за моментом сообщения импульса следует пассивный этап. Для этого необходимо потребовать, чтобы знак дроби

$$\frac{N_{1,i}\cos\varphi + N_{2,i}\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi}, \quad (35)$$

где $N_{1,k}$, $N_{2,k}$ — компоненты вектора $\mathbf{N} = \mathbf{N}_k$ на этапе после сообщения импульса, и знак ее производной по истинной аномалии φ в момент сообщения импульса были противоположные. Следовательно, в этом случае должно выполняться условие

$$(N_{1,i}\cos\varphi + N_{2,i}\sin\varphi) \times$$
$$\times (-N_{1,i}\sin\varphi + N_{2,i}(e + \cos\varphi)) < 0. \quad (36)$$

Возможны два варианта в структуре оптимального управления: первый вариант, когда начальный момент не совпадает с моментом сообщения импульса, и второй вариант, когда эти моменты совпадают.

В первом варианте задаются (выбираются) значения $N_{1,0}$, $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ трех координат вектора $\mathbf{N}_0$ в начальный момент времени и значение истинной аномалии φ_k в конце процесса управления. Значения координат вектора $\mathbf{N}_0$ должны удовлетворять условию отсутствия импульса в этот момент времени:

$$|N_{1,0}\cos\varphi_0 + N_{2,0}\sin\varphi_{01}| < 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi_0). \quad (37)$$

Затем значение истинной аномалии φ постепенно изменяется в большую сторону (в сторону движения КА) и проверяется условие отсутствия импульса

$$|N_{1,0}\cos\varphi + N_{2,0}\sin\varphi| < 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi). \quad (38)$$

Как только условие (38) нарушается, из соотношения (27) определяется значение истинной аномалии φ_1 в момент сообщения первого импульса. Из соотношения (28) определяется алгебраическое значение первого импульса U_1. По формулам (29) и (30) по известным значениям $\mathbf{\Lambda}_0$ и $\mathbf{N}_0$ вычисляются значения кватерниона ориентации орбиты $\mathbf{\Lambda}_1$ и вектора $\mathbf{N}_1$ на следующем пассивном промежутке. Проверяется условие (36) для подтверждения, что после сообщения импульса следует пассивный этап. Если условие (36) не выполняется, то необходимо вернуться к начальному состоянию и выбрать новые значения для компонентов вектора $\mathbf{N}_0$. Далее процесс повторяется.

Как только истинная аномалия достигнет конечного значения, из соотношения (34) определяется значение последнего импульса U_k. По формуле (29) вычисляется значение кватерниона ориентации $\mathbf{\Lambda}(\tau_k)$ после сообщения последнего импульса. Затем вычисляются погрешности выполнения четырех условий (32) и (33) в скалярном исчислении. Если погрешности превышают заданную точность решения задачи, то с помощью комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска уточняются значения $N_{1,0}$, $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ трех координат вектора $\mathbf{N}_0$ в начальный момент времени и значение φ_k истинной аномалии в конечный момент времени.

Моменты времени сообщения импульсов определяются по найденным значениям φ_i с помощью интегрирования уравнения

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{1}{(1 + e\cos\varphi)^2} \quad (39)$$

и начального условия $\tau(\varphi_0) = 0$.

Во втором варианте выбираются две компоненты $N_{1,0}$, $N_{3,0}$ или $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ вектора $\mathbf{N}_0$, значение начального импульса U_0 и значение φ_k истинной аномалии в конце процесса управления. Значение третьей компоненты $N_{2,0}$ или $N_{1,0}$ вектора $\mathbf{N}_0$ определяется по двум другим компонентам из уравнения

$$N_{1,0}\cos\varphi_0 + N_{2,0}\sin\varphi_0 - 2(1 + e\cos\varphi_0)\operatorname{sign}U_0 = 0. \quad (40)$$

Далее по формулам (29), (30) по известным значениям $\mathbf{\Lambda}_0$ и $\mathbf{N}_0$ вычисляются кватернион ориентации орбиты $\mathbf{\Lambda}_1$ и вектор $\mathbf{N}_1$ на следующем пассивном промежутке. Проверяется условие (36) для подтверждения того факта, что после сообщения импульса следует пассивный этап. Если условие (36) не выполняется, то необходимо вернуться к начальному состоянию и выбрать новые значения для компонент вектора $\mathbf{N}_0$ и начального импульса U_0. Если условие (36) выполняется, то, как и в первом варианте, проводится постепенное увеличение истинной аномалии φ и проверяется условие отсутствия импульса (38). Далее повторяются все действия из первого варианта. В конце процесса вычисляются погрешности выполнения четырех условий (32) и (33) в скалярном исчислении. Если погрешности превышают заданную точность решения задачи, то с помощью комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска уточняются значения двух координат $N_{1,0}$, $N_{3,0}$ или $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ вектора $\mathbf{N}_0$ в начальный момент времени, значение начального импульса U_0 и значение φ_k истинной аномалии в конечный момент времени.

Примеры решения задач оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной или импульсной тяги

Для численного решения задач об оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной или импульсной тягой на ЭВМ разработаны программы, реализующие описанные выше алгоритмы. В случае ограниченной тяги краевая задача для системы дифференциальных уравнений (12), (22), (23), (31) (см. работу [9]) девятого порядка по определению фазовых и сопряженных переменных, сформулированная в первой части статьи, решалась (для нефиксированного числа активных участков) с использованием метода Рунге—Кутты 4-го порядка точности и комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Так как оптимальное управление согласно (23) (см. работу [9]) содержит разрывы, то для улучшения сходимости итерационного процесса проводилось уточнение момента разрыва управления. Для задачи с двухимпульсным управлением система алгебраических уравнений (21) решалась с использованием комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Результаты расчетов представлены ниже в безразмерных переменных.

Вариант 1. В этом примере приведено решение двухимпульсной задачи переориентации орбиты, когда первый импульс реактивной тяги сообщается КА в начальный момент времени процесса управления. Решение задачи получено в результате решения системы алгебраических уравнений (21).

Эксцентриситет орбиты $e = 0{,}1$, минимизируемый функционал и его весовые множители определяются соотношениями

$$J = \alpha_1\tau_k + \alpha_2(|U_1| + |U_2|),\ \alpha_1 = 1{,}0,\ \alpha_2 = 0{,}5. \quad (41)$$

Начальная ориентация орбиты определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}299626,\ \Lambda_1 = -0{,}249688,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}599251,\ \Lambda_3 = -0{,}699127.$$

В классических элементах начальная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 80{,}9609°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 45{,}8185°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 180{,}5787°$.

Положение КА на орбите в начальный момент времени определяется истинной аномалией $\varphi_0 = 0{,}5$ рад или $28{,}6479°$.

Заданная ориентация орбиты КА в конце управления определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}369880,\ \Lambda_1 = -0{,}342063,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}480209,\ \Lambda_3 = -0{,}718040.$$

В классических элементах конечная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 72{,}2548°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 62{,}7172°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 171{,}7910°$.

В результате решения двухимпульсной задачи переориентации орбиты КА получено, что начальный импульс $U_1 = 0{,}549631$, угол поворота орбиты за счет начального импульса $\Delta\psi = 0{,}505287$ рад или $28{,}9510°$. Ориентация орбиты после сообщения начального импульса определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}273073,\ \Lambda_1 = -0{,}092251,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}462771,\ \Lambda_3 = -0{,}838310.$$

В классических элементах орбиты ее ориентация после сообщения первого импульса и на пассивном этапе движения КА определяется углом наклона орбиты $I = 56{,}3122°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 29{,}3164°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 186{,}7689°$.

Время движения КА между начальным и конечным импульсами равно 0,534173 безразмерных единиц, значение истинной аномалии в конечный момент времени $\varphi_k = 1{,}109343$ рад или $63{,}5605°$.

Конечный импульс $U_2 = -0{,}616812$, угол поворота орбиты за счет конечного импульса $\Delta\psi = -0{,}590521$ рад или $-33{,}8343°$. Значение функционала (41), определяющего качество процесса управления, равно 1,117397.

Отметим, что все результаты расчетов кроме классических угловых элементов орбит представлены в безразмерных переменных. Для возвращения к размерным переменным необходимо воспользоваться соотношениями (11) (см. работу [9]).

Вариант 2. При увеличении разности между соответствующими угловыми элементами, определяющими ориентацию начальной и конечной орбит КА, число моментов переключения управления может возрастать. Приведем пример такого решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием двигателя малой тяги. В этом примере рассмотрен случай, когда критерием оптимальности является алгебраическая величина характеристической скорости, т.е. в функционале (16) (см. работу [9]) весовые множители $a_1 = 0{,}0$, $a_2 = 1{,}0$. Максимальное значение безразмерной тяги, ортогональной к плоскости орбиты КА, $u_m = 0{,}2$, эксцентриситет орбиты $e = 0{,}1$. Начальная ориентация орбиты в момент времени $t = 0{,}0$ определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}299626,\ \Lambda_1 = -0{,}249688,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}599251,\ \Lambda_3 = -0{,}699127.$$

В классических элементах начальная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 80{,}9609°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 45{,}8185°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 180{,}5787°$. Начальному положению КА на орбите соответствует значение истинной аномалии $\varphi = 0{,}5$ рад.

Ориентация орбиты, на которую требуется перевести КА, определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}376260,\ \Lambda_1 = -0{,}390577,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}570273,\ \Lambda_3 = -0{,}616982.$$

В классических элементах конечная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 87{,}4508°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 65{,}7835°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 176{,}9694°$.

Оптимальное управление состоит из пяти этапов, при этом первый, третий и пятый этапы являются активными, а второй и четвертый — пассивными, на которых управление $u = 0$ и ориентация орбиты не изменяются. На первом этапе $0{,}0 \leqslant t \leqslant 0{,}244511$ управление $u = 0{,}2$. Ориентация орбиты в конце первого этапа определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}295958,\ \Lambda_1 = -0{,}234733,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}590542,\ \Lambda_3 = -0{,}713141.$$

В классических элементах эта орбита определяется углом наклона орбиты $I = 78{,}9117°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 44{,}2160°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 180{,}8116°$. Истинная аномалия КА в этот момент времени $\varphi = 0{,}780333$ рад.

На втором этапе $0{,}244511 \leqslant t \leqslant 0{,}759668$ управление $u = 0{,}0$, орбита не изменяет свою ориентацию, а истинная аномалия КА изменяется в пределах $0{,}780333 \leqslant \varphi \leqslant 1{,}345307$.

На третьем этапе $0{,}759668 \leqslant t \leqslant 2{,}131597$ управление $u = -0{,}2$. Ориентация орбиты в конце третьего этапа определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}380611,\ \Lambda_1 = -0{,}298721,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}509331,\ \Lambda_3 = -0{,}711676.$$

В классических элементах эта орбита определяется углом наклона орбиты $I = 72{,}3804°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 58{,}5297°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 177{,}7468°$. Истинная аномалия КА в этот момент времени $\varphi = 2{,}615769$ рад.

На четвертом этапе $2{,}131597 \leqslant t \leqslant 2{,}665847$ управление $u = 0{,}0$, орбита не изменяет свою ориентацию, а истинная аномалия КА изменяется в пределах $2{,}615769 \leqslant \varphi \leqslant 3{,}050927$.

На пятом этапе $2{,}665847 \leqslant t \leqslant 4{,}081069$ управление $u = 0{,}2$, истинная аномалия КА изменяется в пределах $3{,}050927 \leqslant \varphi \leqslant 4{,}241363$. Ориентация орбиты в конце пятого этапа совпадает с заданной ориентацией конечной орбиты.

Длительности активных этапов $\Delta t_1 = 0{,}244511$, $\Delta t_3 = 1{,}371929$, $\Delta t_5 = 1{,}415222$. Длительности пассивных этапов $\Delta t_2 = 0{,}515157$, $\Delta t_4 = 0{,}534250$. Суммарная длительность активных этапов равна 3,031662, а значение функционала (16) (см. работу [9]) равно 0,606332. Общая продолжительность процесса равна 4,081069 безразмерного времени.

Ниже приводятся примеры решения импульсной задачи переориентации орбиты КА по алгоритму, изложенному в данной части статьи, в котором заранее не задается число импульсов. В вариантах 3 и 4 начальная и конечная ориентации орбиты, эксцентриситет орбиты и начальное положение КА на орбите совпадают с соответствующими величинами варианта 2.

Вариант 3. Весовые множители в функционале (3) равны следующим значениям: $\alpha_1 = 0{,}0$, $\alpha_2 = 1{,}0$. На промежутке $0 \leqslant t < 1{,}438531$ КА совершает пассивный полет, при этом истинная аномалия КА изменяется в пределах $0{,}5 \leqslant \varphi \leqslant 2{,}007904$. В момент $t = t_1 = 1{,}438531$ под действием импульса $U_1 = -0{,}213018$ совершается поворот орбиты вокруг радиуса-вектора КА на угол $\Delta\psi_1 = -0{,}222435$ рад или $-12{,}7446°$. После первого импульса ориентация орбиты определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}369763,\ \Lambda_1 = -0{,}304367,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}532573,\ \Lambda_3 = -0{,}697856.$$

В классических элементах ориентация промежуточной орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 75{,}6731°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 57{,}6652°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 178{,}1690°$.

По этой орбите на промежутке $1{,}438531 < t < 3{,}562805$ КА совершает пассивный полет, при этом истинная аномалия КА изменяется в пределах $2{,}007904 < \varphi < 3{,}784046$. В момент $t = t_k = 3{,}562805$ под действием импульса $U_k = 0{,}228738$ совершается поворот орбиты вокруг радиуса-вектора КА на угол $\Delta\psi_k = 0{,}248645$ рад или $14{,}2463°$. После второго импульса ориентация орбиты КА совпала с заданной конечной орбитой.

Значение функционала, определяющего качество процесса переориентации орбиты, $J = 0{,}441756$. Длительность процесса управления равна 3,562805 безразмерного времени.

Из сравнения результатов вариантов 2 и 3, в которых одни и те же исходные данные по начальной и конечной ориентациям орбит, эксцентриситету орбиты, начальной истинной аномалии и весовым множителям в функционале минимизации, видно, что значение функционала для импульсной задачи меньше, чем для задачи с ограниченной тягой, что и должно было иметь место.

Отметим, что решение двухимпульсной задачи для исходных данных варианта 2 по методу, изложенному в п. 1, когда первый импульс сообщается КА в начальный момент, а второй импульс — в конце движения, дает большее значение функционала $J = 0{,}793668$ и, следовательно, оказывается неоптимальным.

Вариант 4. Весовые множители в функционале (3) равны следующим значениям: $\alpha_1 = 0{,}75$, $\alpha_2 = 1{,}0$. В этом случае оптимальным режимом импульсного управления является режим, когда первый импульс сообщается в начальный момент времени, а второй — в конце процесса управления. Начальный импульс $U_1 = 0{,}229210$ поворачивает орбиту на угол $\Delta\psi = 12{,}0732°$. Далее, в течение промежутка $0{,}0 < t < 0{,}439623$ КА совершает пассивный полет по орбите, ориентация которой определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0{,}290795,\ \Lambda_1 = -0{,}185402,$$
$$\Lambda_2 = 0{,}546512,\ \Lambda_3 = -0{,}763144.$$

В классических элементах орбиты ее ориентация определяется углом наклона орбиты $I = 70{,}4943°$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 39{,}5986°$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 182{,}1200°$.

В момент $t = 0{,}439623$ сообщается второй импульс $U_2 = -0{,}564458$, который поворачивает орбиту на угол $\Delta\psi = -30{,}6962°$ вокруг радиуса-вектора КА с истинной аномалией $\varphi_k = 1{,}005280$ рад или 57,5983°. В результате сообщения второго импульса ориентация орбиты КА совпадает с заданной конечной орбитой. Значение функционала $J = 1{,}123386$. В то же время значение функционала для режима управления, рассмотренного в варианте 3, когда первый этап является пассивным и минимизируется характеристическая скорость, $J = 2{,}462584$ (имеет большее значение).

Рассмотренные примеры показывают, что с помощью принципа максимума Понтрягина, определяющего необходимые условия оптимальности, можно получить несколько режимов управления, претендующих на оптимальность. Из их сравнения между собой можно выбрать оптимальный режим управления.

Отметим, что численное решение задачи оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной тягой (для различных максимальных значений допустимого управления), а также с импульсной тягой показало, что при увеличении максимальной величины допустимого управления решение задачи об оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной тягой приближается к решению задачи с импульсной тягой, что свидетельствует о корректности используемой методологии построения импульсного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

Заключение

В настоящей, второй, части статьи в строгой нелинейной постановке построена новая теория решения задачи оптимальной импульсной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги: формула (4), связывающая импульс реактивной тяги U_i на i-м активном участке траектории с углом $\Delta\psi_i$ поворота орбиты КА вокруг его радиуса-вектора; формула (5), связывающая значение кватерниона $\mathbf{\Lambda}_{i-1}$, определяющего ориентацию орбиты перед сообщением импульса U_i в момент τ_i, со значением кватерниона ориентации орбиты $\mathbf{\Lambda}_i$ после сообщения импульса; аналогичная формула (6) для кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{M}$; формула (13) для приращения $\Delta\chi_i$ скалярной сопряженной переменной χ; формула (14), связывающая значения переменных N_1, N_2, описывающих функцию переключения управления, в начальный и конечный моменты времени i-го активного участка, а также дополнительное условие (15) для внутреннего импульса реактивной тяги.

На основе построенной теории предложены новые алгоритмы оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Приведены примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной или импульсной реактивной тягой, позволившие установить свойства и закономерности процесса оптимальной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты.

Список литературы

1. **Челноков Ю. Н.** Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 2 // Космические исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3—15.
2. **Chelnokov Yu. N.** Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. V. 31, N. 3. P. 409—418.
3. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.
4. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 560 с.
5. **Челноков Ю. Н.** Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, Вып. 6. С. 897—914.
6. **Chelnokov Yu. N.** Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane, J. Appl. Math. Mech. 76 (6), 646—657 (2012).
7. **Челноков Ю. Н.** Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 4. С. 322—336.
8. **Chelnokov Yu. N.** Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II // Cosmic Research. 2014. V. 52, N. 4. P. 350—361.
9. **Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. Т. 17, № 8. С. 567—575.
10. **Griffin M., French J.** Space Vehicle Design. AIAA Education Series, 2004. 665 p.
11. **Ильин В. А., Кузмак Г. Е.** Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976. 741 с.
12. **Ненахов С. В., Челноков Ю. Н.** Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления: Сб. тр. междунар. конф. М.: МАИ, 1998. С. 59—60.
13. **Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н.** Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 185—188.
14. **Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н.** Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Проблемы точной механики и управления: Сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002. С. 64—75.
15. **Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87—95.
16. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела М.: Наука, 1973. 320 с.

Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 2

Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov, ChelnokovYuN@gmail.com✉,
Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov National Research State University, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: **Chelnokov Yury N.,** D. Sc.,
Head of the Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control,
Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Received on March 29, 2016
Accepted on April 08, 2016

This paper considers the problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit by a limited or pulse jet thrust which is orthogonal to the plane of the osculating orbit, with the help of quaternion differential equation of the spacecraft (SC) orbit orientation and the Pontryagin maximum principle. This kind of jet thrust changes the orientation of the spacecraft orbits while its shape and size during control process kept unchanged. Functional that defines quality of control process is a weighted convolution of two criteria: time and the total momentum of jet thrust spent on control process (special cases of this functional are fast response problem and the problem of minimizing the characteristic velocity). In the second part of the article we present a new theory of problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit in pulse setting (using pulse (large) jet thrust). We provide algorithms for solving boundary value problems of optimal two-pulse and multi-pulse reorientation of the spacecraft orbit (non-fixed number of jet thrust pulses) and examples of numerical solution of boundary value problems of optimal reorientation of the spacecraft orbit with a limited (small) or pulse (large) thrust in which quaternion osculating element is used to describe the orientation of the spacecraft orbit.

Keywords: *spacecraft, orbit orientation, limited (small) and impulse (large) jet thrust, optimal control, quaternion*

For citation:

Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 2, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 9, pp. 633—643.

DOI: 10.17587/mau.17.633-643

References

1. **Chelnokov Yu. N.** *Primenenie kvaternionov v teorii orbital'nogo dvizheniia iskusstvennogo sputnika. Ch. 2* (Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. Part II), *Kosmicheskie Issledovaniya,* 1993, vol. 31, no. 3, pp. 3—15 (in Russian).
2. **Chelnokov Yu. N.** Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II, *Cosmic Research*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 409—418.
3. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* (Quaternion and bi-quaternion models and methods of solid state mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion), Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).
4. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniia dvizheniem* (Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control), Moscow, Fizmatlit, 2011. 560 p. (in Russian).
5. **Chelnokov Yu. N.** Optimal'naia pereorientatsiia orbity kosmicheskogo apparata posredstvom reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity (Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane), *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 897—914 (in Russian).
6. **Chelnokov Yu. N.** Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 646—657.
7. **Chelnokov Yu. N.** Kvaternionnaia reguliarizatsiia v nebesnoi mekhanike i astrodinamike i upravlenie traektornym dvizheniem. II (Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II), *Kosmicheskie Issledovaniya,* 2014. Vol. 52. No 4. P. 322—336 (in Russian).
8. **Chelnokov Yu. N.** Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II, *Cosmic Research*, 2014, vol. 52, no. 4, pp. 350—361.
9. **Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Issledovanie zadachi optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata posredstvom ogranichennoi ili impul'snoi reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity. Chast' 1* (Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 1), *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 8, pp. 567—575 (in Russian).
10. **Griffin M., French J.** Space Vehicle Design. AIAA Education Series. 2004, 665 pp.
11. **Il'in V. A., Kuzmak G. E.** *Optimal'nye perelety kosmicheskikh apparatov s dvigateliami bol'shoi tiagi* (Optimal flights of spacecraft with high-thrust engines), Moscow, Nauka, 1976, 741 p. (in Russian).
12. **Nenakhov S. V., Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniia orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Quaternion solution of a task of an optimal control of spacecraft's orbit orientation), *Proc. of the international conference "Bortovye integrirovannye kompleksy i sovremennye problemy upravleniia",* Moscow, MAI, 1998, pp. 59—60 (in Russian).
13. **Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of spacecraft's orbit's orientation), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.,*Saratov, Publishing house of SGTU, 2001, no 3, pp. 185—188 (in Russian).
14. **Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of spacecraft's orbit's orientation), *Problemy tochnoi mekhaniki I upravleniia: Sb. nauch. tr. IPTMU RAN*, Saratov: Publishing house of SGTU, 2002, pp. 64—75 (in Russian).
15. **Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Ob odnoi zadache optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata* (About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation), *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 87—95 (in Russian).
16. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela (Use of quaternions in the problems of orientation of solid bodies), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).