

К. А. Неусыпин¹, д-р техн. наук, проф., **В. В. Сизых**², д-р техн. наук, доц., vszykh@yandex.ru,
Б. И. Шахтарин¹, д-р техн. наук, проф., shakhtarin@mail.ru, **В. А. Шевцев**², аспирант, vshevtsev@inbox.ru,
¹Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
²Московский технологический университет (МИРЭА)

Анализ системы фазовой автоподстройки с квадратурными каналами при наличии аддитивных гармонических помех и широкополосного шума методом кумулянтов

Представлена марковская математическая модель системы фазовой автоподстройки частоты с квадратурными каналами (система Костаса) при одновременном воздействии аддитивных гармонических помех и белого гауссовского шума в форме стохастических дифференциальных уравнений, учитывающая влияние низкочастотных фильтров в контуре регулирования на форму импульсов полезного сигнала. Представлен анализ системы методом кумулянтов в нормальном приближении. Проведено сравнение статистических характеристик сигнала ошибки, полученных методом кумулянтов и в линейном приближении.

Ключевые слова: фазовая автоподстройка частоты, система Костаса, фазоквадратурное кольцо, восстановление несущей, фазовая ошибка, метод линеаризации, метод кумулянтов

Введение

Вопросы анализа статистических характеристик систем радиоавтоматики, в частности фазовой автоподстройки (ФАП), относятся к классическим задачам статистической радиотехники.

Одной из широко применяемых приближенных аналитических процедур исследования статистических характеристик ФАП наряду с методом усреднения и статистической линеаризацией является метод кумулянтов [1–4]. Например, в работе [4] была решена задача анализа методом кумулянтов в нормальном приближении классической ФАП произвольного порядка.

ФАП с фазоквадратурным кольцом слежения была предложена Джоном Костасом еще в 50-х годах прошлого века [5, 6], однако несмотря на это она изучена недостаточно полно. В дальнейшем данную систему будем называть просто системой Костаса. В настоящее время данная система радиоавтоматики находит широкое практическое применение в телекоммуникационных устройствах, системах глобального позиционирования (GPS, ГЛОНАСС), медицинских имплантах, системах мобильной связи. В отличие от классической ФАП система Костаса одновременно решает задачи восстановления подавленной несущей и демодуляции входного сигнала [7–11].

Следует упомянуть ряд недавних работ, посвященных математическим моделям детерминированной схемы Костаса [12], воздействию гармонических помех на детерминированные системы синхронизации [13], вопросам имитационного моделирования системы Костаса при наличии широкополосных случайных помех (белого шума) [14, 15]. При этом как в указанных работах, так и в большинстве других исследуется случай, когда фильтры нижних частот контура регулирования имеют достаточно широкую полосу пропускания, при этом эффектом

искажения формы импульсов полезного сигнала можно пренебречь.

Построим марковскую модель указанной ФАП, учитывающую эффект искажения форм импульсов полезного сигнала, действующего на фоне аддитивной смеси белого шума и гармонической помехи. Проведем анализ системы методом кумулянтов в нормальном приближении. Сравним полученные результаты с данными имитационного моделирования с использованием исходной модели и данными анализа линеаризованной модели, полученными, следуя подходам, изложенным в работе [17].

Особенности системы

Классическая функциональная схема ФАП с фазоквадратурным кольцом слежения приведена на рис. 1. Контур регулирования данной схемы состоит из двух каналов — синфазного и квадратурного. Колебание с местного управляемого генератора (УГ) прикладывается к входам фазовых детекторов (ФД), которые на схеме представлены как умножители. Перед поступлением на ФД в синфазном канале фаза колебания с выхода УГ поворачи-

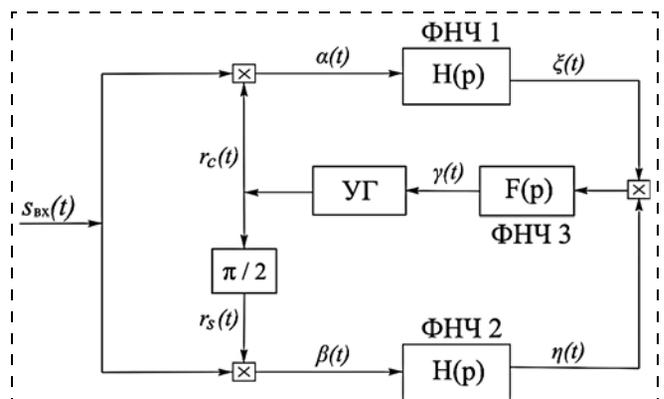


Рис. 1. Функциональная схема петли Костас

вается на 90° . На другие входы ФД поступает сигнал с двухпозиционной фазовой манипуляцией (ФМ2), с частотой которого необходимо синхронизировать частоту УГ. Важной особенностью данной ФАП является возможность слежения за центральной частотой входного сигнала, которая была подавлена вследствие применения модуляции.

Колебания с выходов ФД фильтруются с помощью низкочастотных фильтров ФНЧ1 и ФНЧ2 и перемножаются в третьем ФД. Сигнал с выхода данного детектора пропускают через третий низкочастотный фильтр ФНЧ3 для подавления шумов и высокочастотных составляющих. Напряжение с выхода ФНЧ3 применяется для регулирования частоты УГ таким образом, чтобы она совпадала с частотой входного сигнала.

Процесс управления приводит к тому, что сигнал в синфазном канале максимально усиливается, а в квадратурном — подавляется. Заметим также, что колебание на выходе ФНЧ1 в синфазном канале соответствует информационному сообщению, передаваемому с помощью ФМ2 сигнала. Таким образом, данная система не только синхронизирует частоту УГ с частотой входного сигнала, но и выступает в роли демодулятора.

Математическая модель системы

Построим математическую модель рассматриваемой системы в условиях воздействия наряду с полезным сигналом детерминированной помехи и аддитивного шума.

Входной сигнал системы Костаса представляет собой смесь сигнала с двухпозиционной фазовой манипуляцией (ФМ2) $s_c(t)$, детерминированной помехи $s_{\Pi}(t)$ и белого гауссовского шума $v(t)$:

$$s_{\text{вх}}(t) = s_c(t) + s_{\Pi}(t) + v(t).$$

Будем считать, что полезный ФМ2 сигнал и помеха имеют вид

$$s_c(t) = \sqrt{2}A_c M(t) \sin(\omega_0 t + \theta_c(t));$$

$$s_{\Pi}(t) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^R A_{\Pi i}(t) \sin[\omega_0 t + \theta_{\Pi i}(t)],$$

где $\sqrt{2}A_c(t)$ и $\sqrt{2}A_{\Pi i}(t)$ — законы изменения огибающей сигнала и помехи, обычно медленно изменяющейся по сравнению с колебанием частоты ω_0 ; $\theta_c(t)$ и $\theta_{\Pi i}(t)$ — законы изменения фазы сигнала и помехи; $M(t)$ — информационная последовательность (телеграфный сигнал, принимающий значения ± 1).

Аддитивный шум $v(t)$ представим в виде

$$v(t) = \sqrt{2}v_c(t) \cos(\omega_0 t) - \sqrt{2}v_s(t) \sin(\omega_0 t),$$

где $v_c(t)$ и $v_s(t)$ — некоторые случайные процессы, которые будем считать независимыми и гауссовскими.

Поскольку после перемножителей находятся ФНЧ, которые подавляют гармоники частоты $2\omega_0$, то колебание на выходе перемножителя в квадратурном канале (верхнего на рис. 1) при $r_c(t) = \sqrt{2}A_c \cos(\omega_0 t + \theta_r(t))$ приближенно можно записать в виде

$$\alpha(t) = A_r \left[A_c M(t) \sin(\theta_c - \theta_r) + \sum_{i=1}^R A_{\Pi i} \sin(\theta_{\Pi i} - \theta_r) + v_c \cos \theta_r + v_s \sin \theta_r \right],$$

а на выходе перемножителя в синфазном канале при $r_s(t) = \sqrt{2}A_r \sin(\omega_0 t + \theta_r(t))$ — в виде

$$\beta(t) = A_r \left[A_c M(t) \cos(\theta_c - \theta_r) + \sum_{i=1}^R A_{\Pi i} \cos(\theta_{\Pi i} - \theta_r) + v_c \sin \theta_r - v_s \cos \theta_r \right].$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(t) = \theta_c(t) - \theta_r(t);$$

$$\varepsilon_i(t) = \frac{A_{\Pi i}(t)}{A_c(t)}; \Delta_i(t) = \theta_{\Pi i}(t) - \theta_{\Pi i}(t) - \theta_c(t);$$

$$h_1(\varphi, t) = M(t) \sin \varphi + \sum_{i=1}^R \varepsilon_i(t) \sin(\Delta_i + \varphi);$$

$$h_2(\varphi, t) = M(t) \cos \varphi + \sum_{i=1}^R \varepsilon_i(t) \cos(\Delta_i + \varphi);$$

$$v_1(t) = \frac{1}{A_c} [v_c \cos(\theta_c - \varphi) + v_s \sin(\theta_c - \varphi)];$$

$$v_2(t) = \frac{1}{A_c} [v_c \sin(\theta_c - \varphi) - v_s \cos(\theta_c - \varphi)].$$

Тогда получим, что

$$\alpha(t) = A_r A_c \tilde{\alpha}(t); \beta(t) = A_r A_c \tilde{\beta}(t),$$

где $\tilde{\alpha}(t) = [h_1(\varphi, t) + v_1(t)]$; $\tilde{\beta}(t) = [h_2(\varphi, t) + v_2(t)]$.

Будем считать, что передаточные функции фильтров ФНЧ1 и ФНЧ2 совпадают и равны $H(s)$. Передаточная функция фильтра ФНЧ3 равна $F(s)$. Пусть рассматриваемые передаточные функции фильтров являются дробно-рациональными:

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_{n_1} s^{n_1}}{B_0 + B_1 s + \dots + B_{n_2} s^{n_2}};$$

$$F(s) = \frac{C_0 + C_1 s + \dots + C_{m_1} s^{m_1}}{D_0 + D_1 s + \dots + D_{m_2} s^{m_2}},$$

где $n_1 \leq n_2$; $m_1 \leq m_2$.

Будем рассматривать случай $n_1 = n_2 = n$ и $m_1 = m_2 = m$. Перейти к случаю $n_1 < n_2$ можно просто, приняв $A_n = A_{n-1} = \dots = A_{n_1+1} = 0$ (аналогично и для случая $m_1 < m_2$). Тогда колебания на выходе фильтров ФНЧ1 и ФНЧ2 можно записать в форме

$$\xi(t) = H(p)\alpha(t); \eta(t) = H(p)\beta(t),$$

а колебание на выходе фильтра ФНЧ3 представить в виде

$$\gamma(t) = F(p)[\xi(t)\eta(t)].$$

Будем считать, что фаза $\theta_r(t)$ колебания пере-страиваемого генератора связана с управляющим напряжением $\gamma(t)$ зависимостью

$$\frac{d\theta_r}{dt} = k_r\gamma(t),$$

где k_r — некоторый постоянный коэффициент.

В этом случае получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta_c}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} = \frac{d\theta_c}{dt} - k_r\gamma(t).$$

В итоге получаем систему дифференциальных уравнений, описывающую работу системы:

$$\begin{aligned} B_0\tilde{\xi} + B_1\tilde{\xi}' + \dots + B_n\tilde{\xi}^{(n)} &= \\ &= A_0\tilde{\alpha} + A_1\tilde{\alpha}' + \dots + A_n\tilde{\alpha}^{(n)}; \\ B_0\tilde{\eta} + B_1\tilde{\eta}' + \dots + B_n\tilde{\eta}^{(n)} &= \\ &= A_0\tilde{\beta} + A_1\tilde{\beta}' + \dots + A_n\tilde{\beta}^{(n)}; \\ D_0\tilde{\gamma} + D_1\tilde{\gamma}' + \dots + D_m\tilde{\gamma}^{(m)} &= \\ &= C_0[\tilde{\xi}\tilde{\eta}] + C_1[\tilde{\xi}\tilde{\eta}]' + \dots + C_m[\tilde{\xi}\tilde{\eta}]^{(m)}; \\ \varphi' &= \theta_c' - K\tilde{\gamma}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{\xi} = \xi/(A_r A_c)$; $\tilde{\eta} = \eta/(A_r A_c)$; $\tilde{\gamma} = \gamma/(A_r A_c)^2$; $K = k_r(A_r A_c)^2$.

В дальнейшем будем считать, что $A_n = 0$. Рассмотрим случай, когда квадратурные составляющие $v_c(t)$ и $v_s(t)$ представляют собой гауссовские независимые белые шумы с двусторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Тогда систему уравнений (1) можно записать в нормальной форме в виде

$$dX_i = m_i(\mathbf{X}, t)dt + \sigma_{i1}(\mathbf{X}, t)d\omega_1 + \sigma_{i2}(\mathbf{X}, t)d\omega_2, \quad (2)$$

где

$$N = 2n + m + 1; \mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_M]^T;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = X_{i+1} + q_i h_1(X_N, t) \text{ при } i = \overline{1, n-1};$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{l=1}^n B_n^{-1} B_{l-1} X_l + q_n h_1(X_N, t) \text{ при } i = n;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = X_{i+1} + q_{i-n} h_2(X_N, t) \text{ при } i = \overline{n+1, 2n-1};$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{l=n+1}^{2n} B_n^{-1} B_{l-n-1} X_l + q_n h_2(X_N, t) \text{ при } i = 2n;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = X_{i+1} + g_i - 2n X_1 X_{n+1} \text{ при } i = \overline{2n+1, 2n+m-1};$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{l=2n+1}^{2n+m} D_m^{-1} D_{l-2n-1} X_l + g_m X_1 X_{n+1} \text{ при } i = 2n+m;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \theta_c' - K[X_{2n+1} + g_0 X_1 X_{n+1}] \text{ при } i = N;$$

$$\sigma_{i1}(\mathbf{X}, t) = q_i \sqrt{\frac{N_0}{2A_c^2}} \text{ при } i = \overline{1, n};$$

$$\sigma_{i1}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ при } i = \overline{n+1, N};$$

$$\sigma_{i2}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ при } i = \overline{1, n};$$

$$\sigma_{i2}(\mathbf{X}, t) = q_{i-n} \sqrt{\frac{N_0}{2A_c^2}} \text{ при } i = \overline{n+1, 2n};$$

$$\sigma_{i2}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ при } i = \overline{2n+1, N};$$

$$X_1 = \tilde{\xi} - q_0 \tilde{\alpha}; X_{n+1} = \tilde{\eta} - q_0 \tilde{\beta};$$

$$X_{2n+1} = \tilde{\gamma} - g_0[\tilde{\xi}\tilde{\eta}]; X_N = \varphi;$$

$$q_0 = B_n^{-1} A_n; g_0 = D_m^{-1} C_m;$$

$$q_k = B_n^{-1} \left(A_{n-k} - \sum_{h=0}^{k-1} B_{n-k+h} q_h \right);$$

$$g_k = D_m^{-1} \left(C_{m-k} - \sum_{h=0}^{k-1} D_{m-k+h} g_h \right).$$

Например, рассмотрим случай, когда в качестве фильтров нижних частот используются интегрирующие фильтры с постоянными времени T_1 и T_2 , и детерминированная помеха является гармоническим сигналом:

$$s_{\Pi}(\tilde{t}) = \sqrt{2} A_{\Pi} \sin[\omega_0 \tilde{t} + \theta_{\Pi}(\tilde{t})];$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + T_1 s}; F(s) = \frac{1}{1 + T_2 s}.$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что $A_c = \text{const}$, $A_{\Pi} = \text{const}$, и фаза сигнала и детерминированной помехи имеют вид

$$\theta_c(\tilde{t}) = \Omega_c \tilde{t} + \varphi_c; \theta_{\Pi}(\tilde{t}) = \Omega_{\Pi} \tilde{t} + \varphi_{\Pi};$$

$$\Delta\Omega = \Omega_{\Pi} - \Omega_c; \varphi_1 = \varphi_{\Pi} - \varphi_c,$$

где Ω_c и Ω_{Π} — начальные расстройки по частоте сигнала и помехи относительно частоты управляемого генератора; φ_c и φ_{Π} — начальные фазы сигнала и помехи.

В этом случае $n = 1$, $m = 1$ и $N = 4$. Рассчитывая коэффициенты системы (2), получаем

$$q_0 = 0; q_1 = B_1^{-1} A_0 = \frac{1}{T_1}; g_0 = 0; g_1 = D_1^{-1} C_0 = \frac{1}{T_2}.$$

Введем нормированное время $t = K\tilde{t}$, тогда в итоге получим систему стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\alpha_1^2 [x_1 - M \sin x_4 - \\ &- \varepsilon \sin(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] dt + \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} d\omega_1; \\ dx_2 &= -\alpha_2^2 [x_2 - M \cos x_4 - \\ &- \varepsilon \cos(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] dt + \alpha_2^2 \sqrt{\frac{2}{r}} d\omega_2; \\ dx_3 &= -\alpha_2^2 [x_3 - x_1 x_2] dt; \\ dx_4 &= [\beta - x_3] dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{KT_1}}; \alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{KT_2}}; \beta = \frac{\Omega_c}{K}; \beta_1 = \frac{\Delta\Omega}{K}; r = \frac{4A_c^2}{N_0 K}.$$

Линеаризованная модель

Будем следовать рассуждениям работы [17]. Считая, что $\Omega_{pi} = \Omega_c$ и случайная величина M имеет фиксированное значение, можем найти точки устойчивого положения $\mathbf{X}_y = [X_{y1}, X_{y2}, \dots, X_{yN}]^T$, приравняв левые части системы (2) и решив получившуюся систему алгебраических уравнений.

Далее перейдем к новым переменным $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_y$, характеризующим отклонение системы от точек устойчивого положения. Будем считать, что отклонения от устойчивого положения малы, поэтому, отбрасывая члены второго порядка $\hat{X}_i \hat{X}_j$, аппроксимируя $\sin \hat{X}_N = \hat{X}_N$ и $\cos \hat{X}_N \approx 1$, перейдем к системе линейных дифференциальных уравнений

$$d\hat{X}_i = F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) dt + \sigma_{i1}(\hat{\mathbf{X}}, t) d\omega_1 + \sigma_{i2}(\hat{\mathbf{X}}, t) d\omega_2; \quad (4)$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \hat{X}_{i+1} + q_i f_1(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = \overline{1, n-1};$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \sum_{l=1}^n B_n^{-1} B_{l-1} \hat{X}_l + q_n f_1(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = n;$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \hat{X}_{i+1} + q_{i-n} f_2(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = \overline{n+1, 2n-1};$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \sum_{l=n+1}^{2n} B_n^{-1} B_{l-n-1} \hat{X}_l + q_n f_2(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = 2n;$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \hat{X}_{i+1} + g_{i-2n} X_{yn+1} \hat{X}_1 + g_{i-2n} \hat{X}_{n+1} X_{y1} \text{ при } i = \overline{2n+1, 2n+m-1};$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \sum_{l=2n+1}^{2n+m} D_m^{-1} D_{l-2n-1} \hat{X}_l + g_m \hat{X}_1 X_{yn+1} + g_m \hat{X}_{n+1} X_{y1} \text{ при } i = 2n+m;$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = -K[\hat{X}_{2n+1} + g_0 \hat{X}_1 X_{yn+1} + g_0 \hat{X}_{n+1} X_{y1}] \text{ при } i = N,$$

где

$$f_1(X_{yN}, t) = M \cos(X_{yN}) + \sum_{i=1}^R \varepsilon_i \cos(\varphi_{1i} + X_{yN});$$

$$f_2(X_{yN}, t) = -M \sin(X_{yN}) - \sum_{i=1}^R \varepsilon_i \sin(\varphi_{1i} + X_{yN}).$$

Систему (4) можно представить в матричном виде:

$$d\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{X}} dt + \mathbf{G}d\omega. \quad (5)$$

Вычислив математическое ожидание от правой и левой частей (5), перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно математических ожиданий:

$$\frac{d\hat{\mathbf{M}}}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{M}}. \quad (6)$$

Теперь найдем матрицу дисперсий случайного процесса $\hat{\mathbf{X}}$ в стационарном режиме. Если случайный процесс задан системой линейных уравнений (5), то матрица дисперсий удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\frac{d\hat{\mathbf{D}}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T. \quad (7)$$

Мы получили вектор математических ожиданий и матрицу дисперсий в стационарном режиме при условии, что случайная величина M приняла фиксированное значение. Усредняя решения уравнений (6) и (7) по M , получим вектор безусловных математических ожиданий и матрицу безусловных дисперсий.

Найдем точки устойчивого равновесия системы (3) при условии, что $\beta_1 = 0$. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$x_{y1} - M \sin(x_{y4}) - \varepsilon \sin(\varphi_1 + x_{y4}) = 0;$$

$$x_{y2} - M \cos(x_{y4}) - \varepsilon \cos(\varphi_1 + x_{y4}) = 0;$$

$$x_{y3} - x_{y1} x_{y2} = 0; \beta - x_{y3} = 0.$$

От системы (6) переходим к линейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}d\hat{x}_1 &= -\alpha_1^2[\hat{x}_1 - x_{y2}\hat{x}_4]dt + \alpha_1^2\sqrt{\frac{2}{r}}d\omega_1; \\d\hat{x}_2 &= -\alpha_1^2[\hat{x}_2 + x_{y1}\hat{x}_4]dt + \alpha_1^2\sqrt{\frac{2}{r}}d\omega_2; \\d\hat{x}_3 &= -\alpha_2^2[\hat{x}_3 - x_{y2}\hat{x}_1 - x_{y1}\hat{x}_2]dt; \\d\hat{x}_4 &= -\hat{x}_3 dt.\end{aligned}\quad (8)$$

Представим систему (8) в матричном виде:

$$d\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{X}} dt + \mathbf{G}d\boldsymbol{\omega},$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\alpha_1^2 & 0 & 0 & \alpha_1^2 x_{y2} \\ 0 & -\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_1^2 x_{y1} \\ \alpha_2^2 x_{y2} & \alpha_2^2 x_{y1} & -\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2\sqrt{\frac{2}{r}} & 0 \\ 0 & \alpha_1^2\sqrt{\frac{2}{r}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор математических ожиданий $\hat{\mathbf{M}}$ случайного процесса $\hat{\mathbf{X}}$ находим, решая систему уравнений (6). Учитывая соотношение $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{X}_y$, получаем, что вектор математических ожиданий случайного процесса \mathbf{X} равен $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{M}} + \mathbf{X}_y$. Усредняя вектор \mathbf{M} по M , получим вектор безусловных математических ожиданий. Так как \mathbf{X}_y при фиксированном M является постоянным вектором, то дисперсия \mathbf{D} случайного процесса \mathbf{X} равна дисперсии $\hat{\mathbf{D}}$ случайного процесса $\hat{\mathbf{X}}$. Опять же, усредняя дисперсию \mathbf{D} по M , получим безусловную матрицу дисперсий.

Метод кумулянтов

Заметим, что систему уравнений (2) можно представить в виде

$$d\mathbf{X} = [\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}x_1x_{n+1} + \mathbf{C}_1\sin x_N + \mathbf{C}_2\cos x_N]dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}_t, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$, \mathbf{B} , \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 — вектор-столбцы размерности $N \times 1$; \mathbf{A} — матрица размерности $N \times N$; \mathbf{G} — матрица размерности $N \times 2$; $\mathbf{W}_t = [\omega_1, \omega_2]^T$ — двумерный винеровский случайный процесс.

Например, для системы уравнений (3) будем иметь

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2\sqrt{\frac{2}{r}} & 0 \\ 0 & \alpha_1^2\sqrt{\frac{2}{r}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2[M + \varepsilon\cos(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] \\ -\alpha_1^2\varepsilon\sin(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2\varepsilon\sin(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4) \\ \alpha_1^2[M + \varepsilon\cos(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть случайный марковский процесс $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ито [5]:

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}, t)d\mathbf{t} + \mathbf{B}(\mathbf{Y}, t)d\mathbf{W}_t,$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{Y}, t)$ — вектор-столбцы размерности $N \times 1$; $\mathbf{B}(\mathbf{Y}, t)$ — матрица размерности $N \times r$; $\mathbf{W}_t = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T$ — вектор независимых стандартных винеровских процессов размерности $r \times 1$.

Будем также считать, что процесс \mathbf{Y} имеет нормальную совместную плотность распределения

$$\mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{D}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{M})^T \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{M})\right],$$

где \mathbf{M} — вектор математических ожиданий размерности $N \times 1$; \mathbf{D} — матрица дисперсий размерности $N \times N$; $|\mathbf{D}|$ — определитель матрицы дисперсий.

В этом случае уравнения относительно вектора математических ожиданий и матрицы дисперсий будут иметь вид

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \int_{R^N} \mathbf{A}(\mathbf{Z}, t)\mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t)d\mathbf{Z}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{D}(t)}{dt} &= \int_{R^N} \mathbf{B}(\mathbf{Z}, t)\mathbf{B}^T(\mathbf{Z}, t)\mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t)d\mathbf{Z} + \\ &+ \int_{R^N} \mathbf{A}(\mathbf{Z}, t)[\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t)d\mathbf{Z} + \\ &+ \int_{R^N} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]\mathbf{A}(\mathbf{Z}, t)^T \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t)d\mathbf{Z}.\end{aligned}\quad (11)$$

Подставляя соотношение (9) в уравнения для математического ожидания (10), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} &= \int_{R^N} [\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}z_1z_{n+1} + \\ &+ \mathbf{C}_1\sin z_N + \mathbf{C}_2\cos z_N]\mathbf{W}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}, t)d\mathbf{Z}.\end{aligned}\quad (12)$$

Рассмотрим отдельно интегралы от слагаемых, входящих в (12):

$$\int_{R^N} \boldsymbol{\Omega}\mathbf{W}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}, t)d\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Omega};$$

$$\int_{R^N} \mathbf{AZW}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{AM};$$

$$\int_{R^N} \mathbf{Bz}_1 z_{n+1} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{B}(D_{1, n+1} + m_1 m_{n+1}) = \\ = \mathbf{BQ}_1^T (\mathbf{D} + \mathbf{MM}^T) \mathbf{Q}_2,$$

где \mathbf{Q}_1 — вектор-столбец размерности $N \times 1$, в первой строке которого стоит единица, а в остальных строках — нули; \mathbf{Q}_2 — вектор-столбец размерности $N \times 1$, в $(n+1)$ -й строке которого стоит единица, а в остальных строках — нули.

Для четвертого слагаемого в квадратных скобках (12) получим

$$\int_{R^N} \mathbf{C}_1 \sin z_N \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} [\mathbf{e}^{iz_N} - \mathbf{e}^{-iz_N}] \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \quad (13)$$

Заметим, что

$$\int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{S}^T \mathbf{Z}} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{S}, t)}, \quad (14)$$

где $\Psi_X(\mathbf{S}, t) = i\mathbf{M}^T(t)\mathbf{S} - \frac{1}{2}\mathbf{S}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{S}$ — кумулянтная функция нормального распределения.

Тогда с учетом (14) находим, что

$$\int_{R^N} \mathbf{e}^{iz_N} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} [\cos \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V} + i \sin \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}],$$

где \mathbf{V} — вектор-столбец размерности $N \times 1$, в N -й строке которого стоит единица, а в остальных строках — нули. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\int_{R^N} \mathbf{e}^{-iz_N} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} [\cos \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V} - i \sin \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}].$$

В итоге получаем окончательное выражение для интеграла (13):

$$\int_{R^N} \mathbf{C}_1 \sin z_N \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}.$$

Таким же образом находим выражения для последнего слагаемого в квадратных скобках (12)

$$\int_{R^N} \mathbf{C}_2 \cos z_N \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{C}_2 \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}.$$

Окончательное уравнение относительно математического ожидания будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{AM} + \mathbf{BQ}_1^T (\mathbf{D} + \mathbf{MM}^T) \mathbf{Q}_2 + \\ + \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} [\mathbf{C}_1 \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V} + \mathbf{C}_2 \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V}]. \quad (15)$$

Теперь получим дифференциальное уравнение относительно матрицы дисперсий. Уравнение (11) состоит из трех слагаемых. Рассмотрим их в отдельности.

Для первого слагаемого (11) находим

$$\int_{R^N} \mathbf{GG}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{GG}^T.$$

Рассмотрим второе слагаемое уравнения (11). С учетом (9) оно будет иметь вид

$$\int_{R^N} [\mathbf{\Omega} + \mathbf{AZ} + \mathbf{Bz}_1 z_{n+1} + \mathbf{C}_1 \sin z_N + \mathbf{C}_2 \cos z_N] \times \\ \times [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \quad (16)$$

Последовательно найдем все интегралы от слагаемых в квадратных скобках уравнения (16):

$$\int_{R^N} \mathbf{\Omega} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = 0;$$

$$\int_{R^N} \mathbf{AZ} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{AZZ}^T - \mathbf{AMM}^T = \mathbf{AD};$$

$$\int_{R^N} \mathbf{Bz}_1 z_{n+1} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{BE}\{z_1 z_{n+1} \mathbf{Z}^T\} - \mathbf{BE}\{z_1 z_{n+1}\} \mathbf{M}^T. \quad (17)$$

Заметим, что $z_1 z_{n+1} \mathbf{Z}^T$ является вектор-строкой размерности $1 \times N$, элементы которой имеют вид $z_1 z_{n+1} z_k$, где $k = \overline{1, N}$. Для совместно распределенных гауссовских случайных величин имеем

$$E\{z_1 z_{n+1} z_k\} = m_1 D_{n+1, k} + m_{n+1} D_{1, k} + \\ + m_k D_{1, n+1} + m_1 m_{n+1} m_k.$$

Также $E\{z_1 z_{n+1}\} \mathbf{M}^T$ является вектор-строкой размерности $1 \times N$, элементы которой имеют вид $E\{z_1 z_{n+1}\} m_k = D_{1, n+1} m_k + m_1 m_{n+1} m_k$, где $k = \overline{1, N}$.

Таким образом, получили, что $\mathbf{H}^T = E\{z_1 z_{n+1} \mathbf{Z}^T\} - E\{z_1 z_{n+1}\} \mathbf{M}^T$ есть вектор-строка размерности $1 \times N$, элементы которой имеют вид $m_1 D_{n+1, k} + m_{n+1} D_{1, k}$, где $k = \overline{1, N}$. Вектор \mathbf{H} можно выразить через вектор математических ожиданий и матрицу дисперсий:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{MDQ}_2 + \mathbf{Q}_2^T \mathbf{MDQ}_1. \quad (18)$$

В итоге получаем окончательное выражение для (17):

$$\int_{R^N} \mathbf{B}z_1 z_{n+1} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T.$$

Теперь вычислим интеграл от четвертого слагаемого в квадратных скобках (16). Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} [\mathbf{e}^{iz_N} - \mathbf{e}^{-iz_N}] \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что

$$\mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{S}} \mathbf{Z}^T = -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}^T} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{S}}.$$

Тогда, проводя вычисления, находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{V}} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}^T} \int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{S}} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} \Big|_{\mathbf{S} = \mathbf{V}} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 \frac{\partial \Psi_X(\mathbf{S}, t)}{\partial \mathbf{S}^T} \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{S}, t)} \Big|_{\mathbf{S} = \mathbf{V}} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) - \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{V}} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) - \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)}. \end{aligned}$$

Теперь можем записать окончательное выражение для (19):

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) - \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(-\mathbf{V}, t)}. \end{aligned}$$

Далее найдем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N \mathbf{M}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [\mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)} - \mathbf{e}^{\Psi_X(-\mathbf{V}, t)}] i\mathbf{M}^T. \end{aligned}$$

С учетом проведенных вычислений получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = \mathbf{C}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Таким же образом находим выражение для последнего слагаемого в квадратных скобках (16):

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_2 \int_{R^N} \cos z_N [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\mathbf{C}_2 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Теперь можем записать окончательное выражение для интеграла (16):

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} [\Omega + \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}z_1 z_{n+1} + \mathbf{C}_1 \sin z_N + \mathbf{C}_2 \cos z_N] \times \\ & \times [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}^T + \\ & + \mathbf{C}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V} - \mathbf{C}_2 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления для третьего слагаемого (11), получим

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)] [\Omega + \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}z_1 z_{n+1} + \\ & + \mathbf{C}_1 \sin z_N + \mathbf{C}_2 \cos z_N]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = \mathbf{D}\mathbf{A}^T + \mathbf{H}\mathbf{B}^T + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_1^T \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V} - \\ & - \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_2^T \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Тогда дифференциальное уравнение относительно матрицы дисперсий будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbf{D}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{B}^T + \\ & + [\mathbf{C}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_1^T] \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V} - \\ & - [\mathbf{C}_2 \mathbf{V}^T \mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_2^T] \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V} + \mathbf{G}\mathbf{G}^T. \end{aligned} \quad (20)$$

Результаты расчетов

Рассмотрим уравнения (3), описывающие работу системы с двумя интегрирующими фильтрами. В первую очередь, будем рассматривать характеристики переменной состояния x_4 и ее производной \dot{x}_4 , так как они соответствуют фазовой и частотной ошибкам регулирования. Находя математическое ожидание от правой и левой частей четвертого уравнения системы (3), получим

$$E\{\dot{x}_4\} = \beta - m_3,$$

где m_3 — математическое ожидание переменной состояния x_3 . Также находим из последнего уравнения системы (3), что дисперсия ошибки по частоте равна дисперсии x_3 .

В дальнейшем на рисунках сплошной линией будем обозначать данные, полученные с помощью имитационного моделирования, основанного на численном решении системы стохастических дифференциальных уравнений (3). Пунктиром будем обозначать данные расчета методом линейаризации по формулам (6) и (7), штриховой линией — результаты, полученные с помощью метода кумулянтов по формулам (15) и (20).

На рис. 2—5 приведены математические ожидания и дисперсии фазовой и частотной ошибок при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\varphi_1 = \pi/2$. Для рис. 2, 3 $\beta_1 = 0$, а для рис. 4, 5 $\beta_1 = 0,2$.

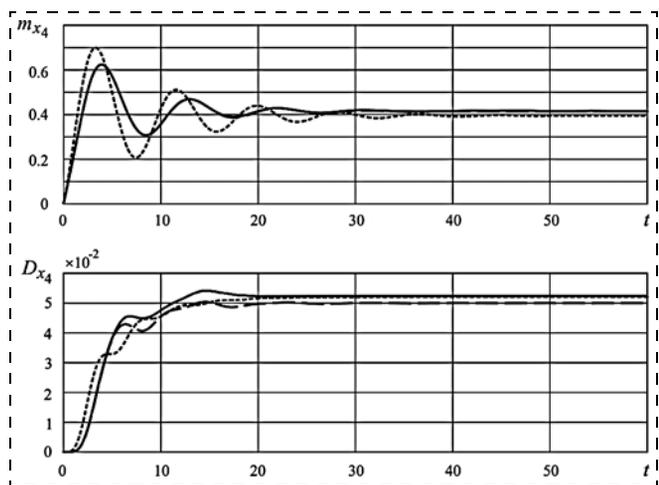


Рис. 2. Зависимость математического ожидания и дисперсии фазовой ошибки от времени при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$

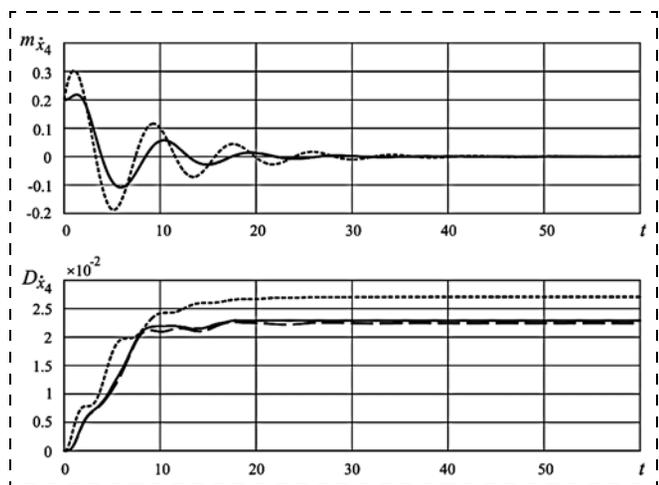


Рис. 3. Зависимость математического ожидания и дисперсии частотной ошибки от времени при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$

Расчеты показывают хорошее совпадение приближенных формул с данными имитационного моделирования, причем, как видно из рис. 2, 3, результаты метода кумулянтов лучше результатов, полученных с помощью линейаризации. При $\beta_1 \neq 0$ система (3) не имеет точек устойчивого равновесия, поэтому результаты для метода линейаризации на рис. 4, 5 не представлены.

Далее на рис. 6—9 приведены зависимости дисперсии фазовой и частотной ошибок от параметра r при различных значениях α_1^2 и α_2^2 , $\beta = 0$ и отсутствии гармонической помехи ($\varepsilon = 0$). Для рис. 6, 7 $\alpha_2^2 = 1$, а для рис. 8, 9 $\alpha_1^2 = 1$.

Также на рис. 10—13 представлены зависимости дисперсии фазовой и частотной ошибок от параметра r при различных значениях φ_1 , $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta_1 = 0$ и $\varepsilon = 0,2$. Для рис. 10, 11 $\beta = 0$, а для рис. 12, 13 $\beta = 0,2$.

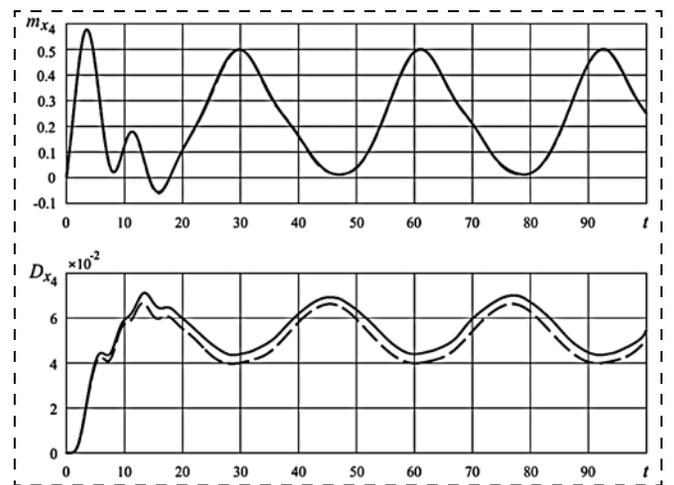


Рис. 4. Зависимость математического ожидания и дисперсии фазовой ошибки от времени при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0,2$, $\varphi_1 = \pi/2$

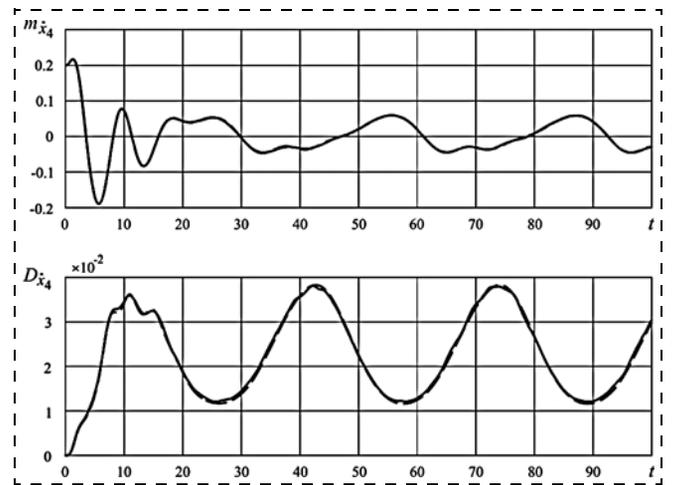


Рис. 5. Зависимость математического ожидания и дисперсии частотной ошибки от времени при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0,2$, $\varphi_1 = \pi/2$

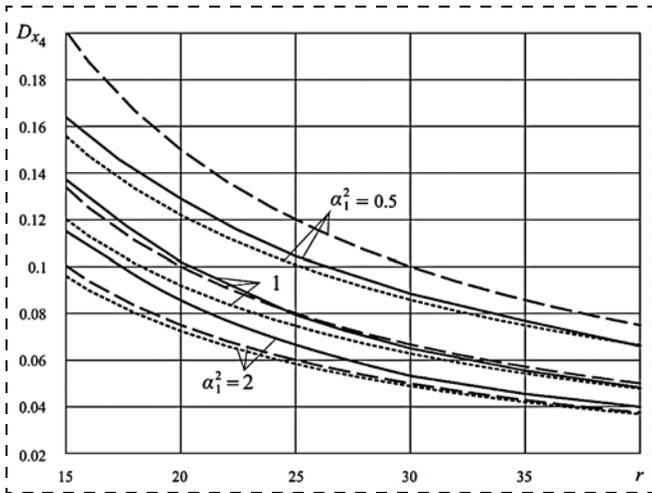


Рис. 6. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях α_1^2 и $\alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

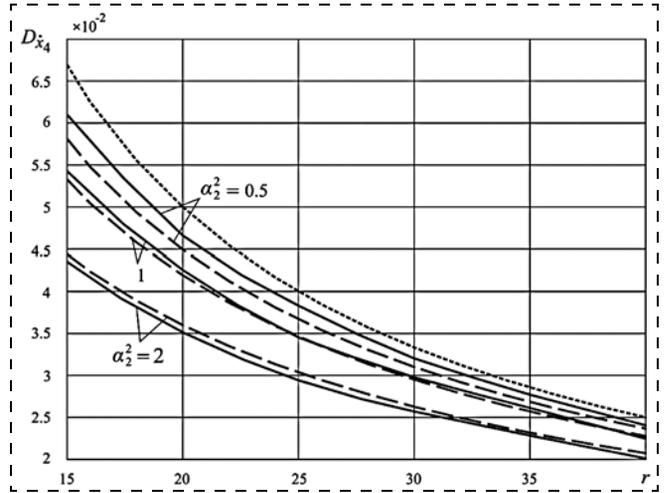


Рис. 9. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях α_2^2 и $\alpha_1^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

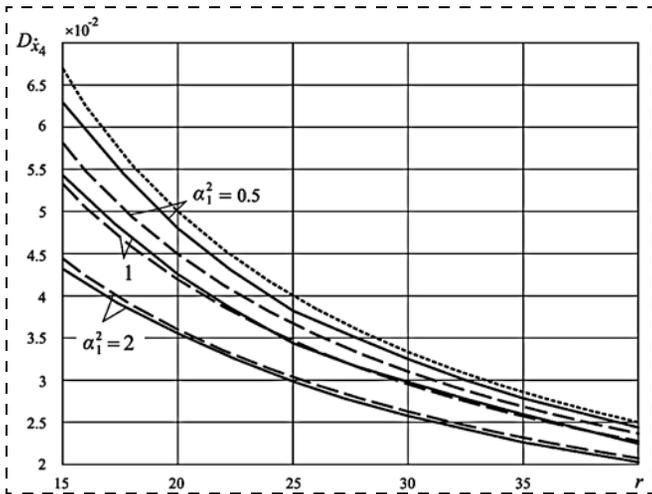


Рис. 7. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях α_1^2 и $\alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

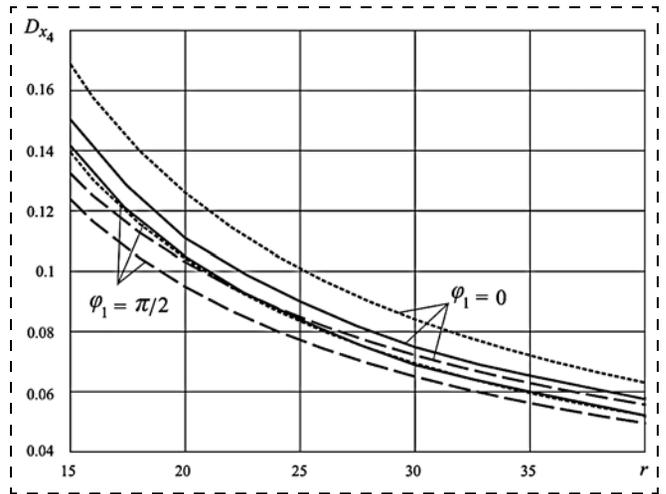


Рис. 10. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$

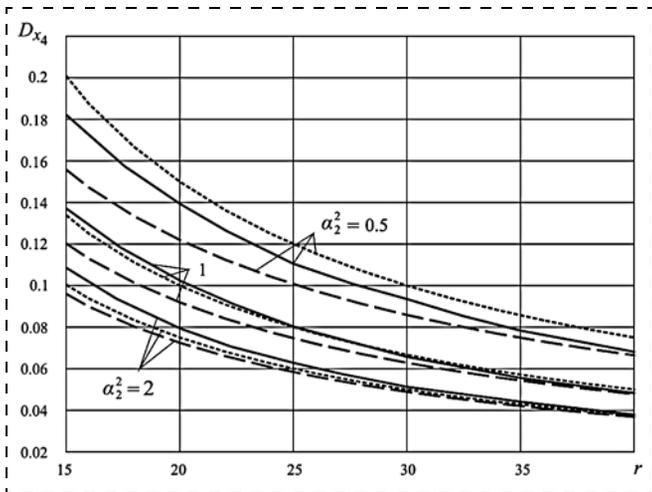


Рис. 8. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях α_2^2 и $\alpha_1^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

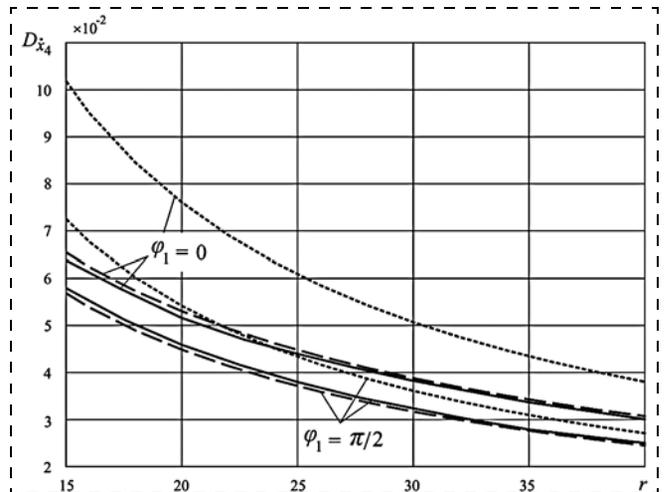


Рис. 11. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$

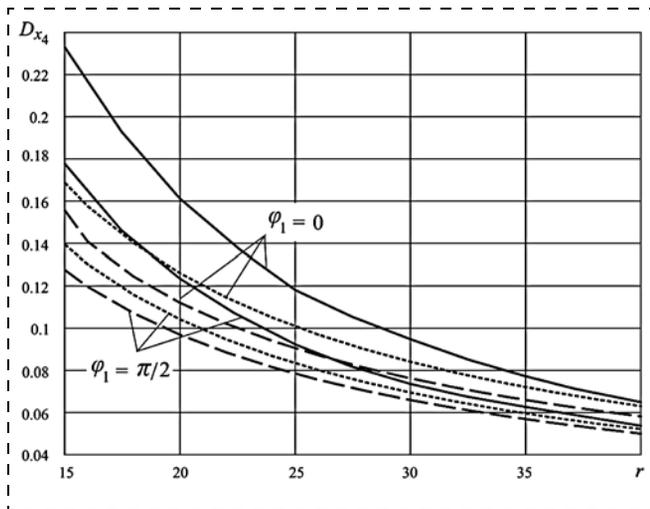


Рис. 12. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1, \beta = 0,2, \varepsilon = 0,2, \beta_1 = 0$

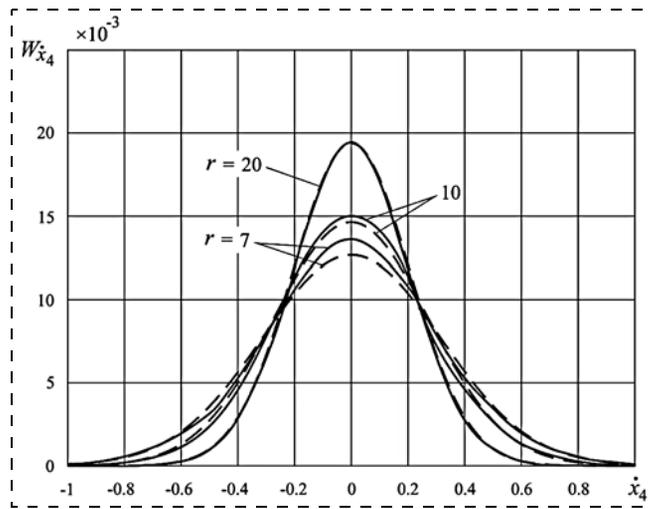


Рис. 15. Плотность распределения вероятностей частотной ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1, \beta = 0, \varepsilon = 0$

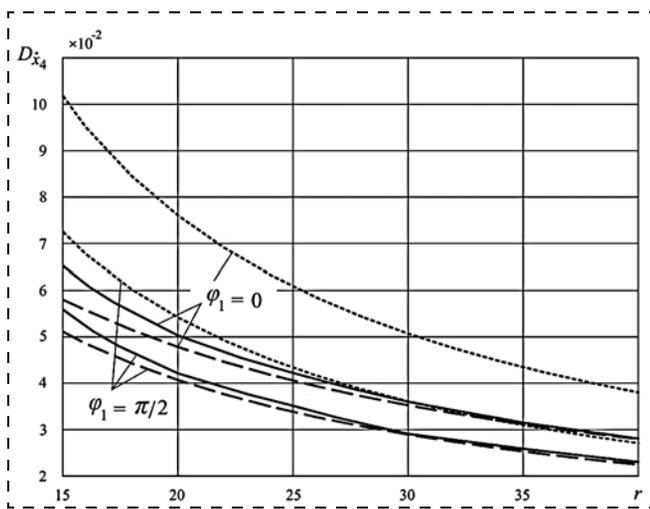


Рис. 13. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1, \beta = 0,2, \varepsilon = 0,2, \beta_1 = 0$

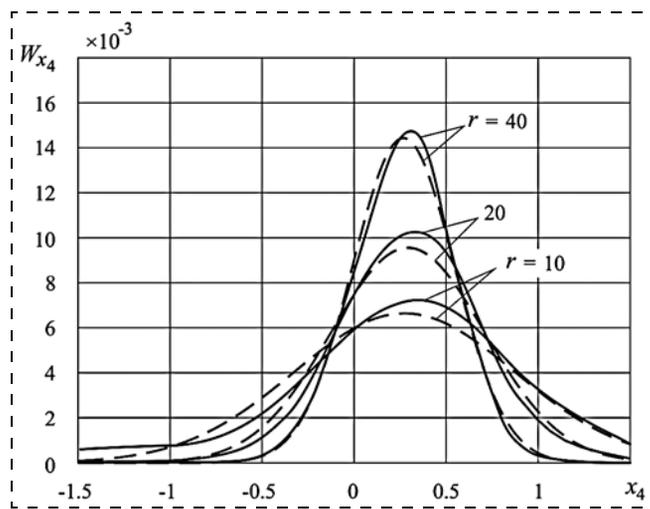


Рис. 16. Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1, \beta = 0,2, \varepsilon = 0,2, \beta_1 = 0, \varphi_1 = 0$

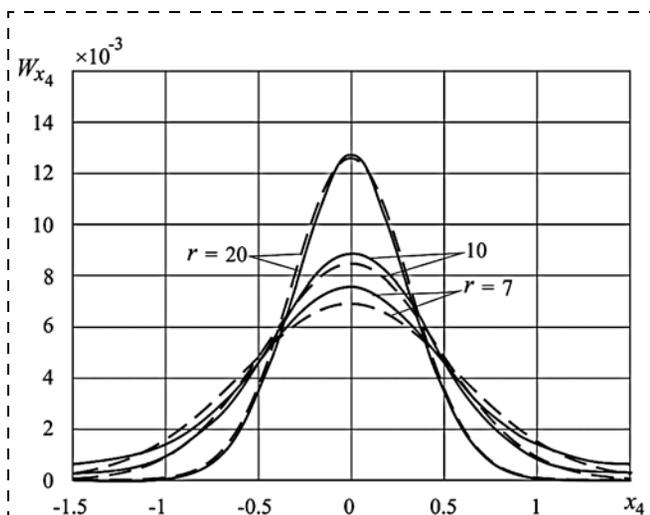


Рис. 14. Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1, \beta = 0, \varepsilon = 0$

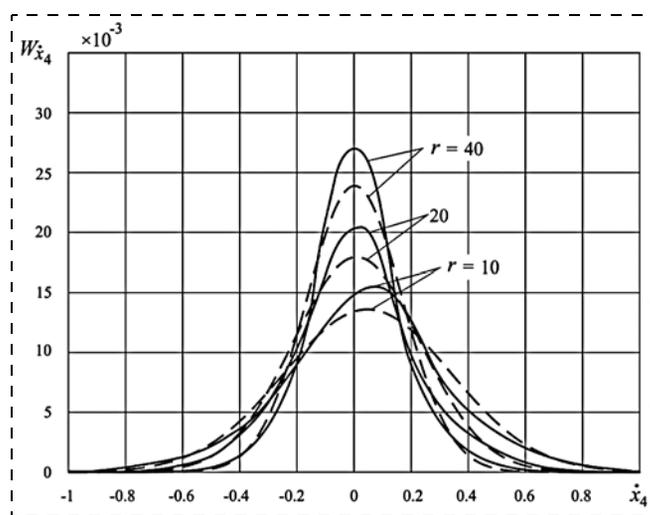


Рис. 17. Плотность распределения вероятностей частотной ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1, \beta = 0,2, \varepsilon = 0,2, \beta_1 = 0, \varphi_1 = 0$

Из приведенных рисунков видно, что результаты, полученные с помощью метода кумулянтов, в целом лучше совпадают с данными имитационного моделирования, чем результаты, найденные методом линеаризации. Интересно отметить, что в методе линеаризации дисперсия частотной ошибки вообще не зависит от значений α_1^2 и α_2^2 . Также на рисунках можно увидеть, что при уменьшении значения r совпадение результатов несколько ухудшается, что можно объяснить появлением срывов слежения. Метод линеаризации возможность возникновения срывов слежения не учитывает, так как линейная модель (8) имеет всего одно положение устойчивого равновесия.

В случае расчета методом кумулянтов применяется нормальное приближение, однако появление срывов слежения приводит к тому, что плотность распределения вероятностей при уменьшении значения r начинает существенно отличаться от нормальной.

В этом можно убедиться, взглянув на рис. 14—17, на которых приведены плотности распределения вероятностей фазовой и частотной ошибок при различных значениях r , $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta_1 = 0$. Для рис. 14, 15 $\beta = 0$ и $\varepsilon = 0$, а для рис. 16, 17 $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$ и $\varphi_1 = 0$. Сплошными линиями представлены плотности, полученные с помощью имитационного моделирования, а штриховыми — нормальные плотности распределения вероятностей с теми же математическими ожиданиями и дисперсиями.

Из приведенных рисунков видно, что результаты, полученные с помощью метода кумулянтов, адекватны данным имитационного моделирования и, очевидно, лучше совпадают с ними, чем результаты применения метода линеаризации.

Заключение

Построена марковская модель системы фазовой автоподстройки с квадратурными каналами при воздействии гармонической помехи и белого гауссовского шума, учитывающая искажение формы импульсов информационного сигнала в контуре регулирования. На основе линеаризации модели и метода кумулянтов в нормальном приближении предложены приближенные формулы для математического ожидания и дисперсии фазовой и частотной ошибки. Данные результаты можно использовать в дальнейшем при инженерном анализе помехозащищенности данной системы при наличии гармонических помех на фоне широкополосного шума, что характерно для работы систем связи и навигации в сложной помеховой обстановке, вы-

званной либо индустриальными широкополосными и узкополосными помехами указанных видов, либо наличием преднамеренных помех систем радиоэлектронной борьбы. Полученная модель и изложенные подходы к ее анализу могут быть также использованы при спектральном анализе фазовых шумов системы.

Список литературы

1. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Анализ и фильтрация. М.: Физматгиз. 1962.
2. Дашевский М. Л. Приближенный анализ точности нестационарных нелинейных систем методом семиинвариантов // Автоматика и телемеханика. 1967. № 11.
3. Шалфеев В. Д. Использование кумулянтного анализа для исследования СФС // Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь, 1982.
4. Шахтарин Б. И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998.
5. Costas J. P. Synchronous communications // Proc. IRE. 1956. V. 44. No. 12. P. 1713.
6. Taylor D. Introduction to "Synchronous Communications", A Classic Paper by J. P. Costas // IEEE Proc. 2002. V. 90, N. 8. P. 1459.
7. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Вильямс, 2003.
8. Tsui J. B. Y. Fundamentals of Global Positioning System receivers software approach. N. Y.: Wiley, 2000.
9. Gardner F. M. Phase lock techniques. N. Y.: Wiley, 2005.
10. Simon M. K., Smith J. G. Offset Quadrature Communications with Decision-Feedback Carrier Synchronization // IEEE Trans. on Comm. 1974. V. 22. N. 10. P. 1576—1584.
11. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Сов. радио, 1978.
12. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Юлдашев М. В., Юлдашев Р. В. Дифференциальные уравнения схемы Костаса // Доклады академии наук. 2012. Т. 446. № 2. С. 149.
13. Шахтарин Б. И. Динамические характеристики фазовой автоподстройки частоты при наличии гармонической помехи // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. № 6. С. 649.
14. Шахтарин Б. И., Фоменко А. Ю. Синтез и моделирование схемы Костаса // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2012. № 2. С. 122.
15. Шахтарин Б. И., Сидоркина Ю. А., Кульков И. А. Моделирование гибридной системы фазовой и тактовой синхронизации ФМ-сигналов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 123.
16. Simon M. K., Lindsey W. C. Optimum Performance of Costas Receivers Containing Soft Bandpass Limiters // IEEE Trans. on Comm. 1977. V. 25. N. 8. P. 822.
17. Ziemer R. E. Perturbation analysis of the effect of CW interference in Costas Loop // Rec. Nat. Telecommun. Conf. Houston, TX. Dec. 4—6, 1972. P. 20—G1.
18. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.

Cumulant Analysis of the Costas Loop with Additive Effects of the Harmonic Interference and Broadband Noise

K. A. Neusypin¹, V. V. Sizykh², vsizykh@yandex.ru,

B. I. Shakhtarin¹, shakhtarin@mail.ru✉, V. A. Shevtsev², vshevtsev@inbox.ru

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation,

² Moscow Technological University (MIREA), Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Shakhtarin Boris I.**,

Bauman Moscow State University, Moscow, 105005, Russian Federation

E-mail: shakhtarin@mail.ru

Received on May 25, 2016

Accepted on June 01, 2016

Questions of analysis of the statistical characteristics of the radioautomatic systems, in particular, the phase-locked loops (PLL), refer to the classical problems of the statistical communication theory. The Costas loop was proposed by John Costas in the middle of the previous century, but despite this it has been studied insufficiently. Currently, this radioautomatic system finds wide application in the telecommunication devices, global positioning systems (GPS, GLONASS), medical implants, and mobile communication systems. In contrast to the classic approaches PLL Costas loop simultaneously solves the problem of recovery of the suppressed carrier and demodulation of the input signal. This article presents Markov mathematical model of the Costas loop in the form of the stochastic differential equations with the additive effects of harmonic interference and white Gaussian noise, which takes into account the impact of the loop arm low-pass filters on the data modulation. The statistical properties of the loop phase error in the linear approximation are considered. The cumulant analysis of the Costas loop in the Gaussian approximation is offered. These results can be used for the engineering analysis of the noise immunity of the system in the presence of harmonic interference and Gaussian noise, which is typical for communication and navigation systems in difficult noise conditions caused by the industrial broadband and narrowband interferences. The resulting model and the considered linear and Gaussian approximation can also be used for the spectral analysis of the phase noise of the system.

Keywords: phase locked loop, Costas loop, quadrature loop, carrier recovery, phase error, linearization, cumulant analysis

For citation:

Neusypin K. A., Sizykh V. V., Shakhtarin B. I., Shevtsev V. A. Cumulant Analysis of the Costas Loop with Additive Effects of the Harmonic Interference and Broadband Noise, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 621–632.

DOI: 10.17587/mau.17.621-632

References

1. Kazakov I. E., Dostupov B. G. *Statisticheskay dinamika nelineinikh avtomaticheskikh system* (Statistical dynamics of nonlinear automatic systems), Moscow, Fizmatgiz, 1962 (in Russian).
2. Dashevsky M. L. *Priblizhennii analiz tochnosti nestacionarnih nelineinikh system metodom semiinvariantov* (Approximate analysis of unstable nonlinear system accuracy by method of semi-invariants), *Avtomatica i Telemekhanika*, 1967, no. 11 (in Russian).
3. Shalfeev V. D. *Ispolzovanie kumulintnogo analiza dlya issledovaniy SFS, Systemi fazovoi sinhronizatsii* (System of phase synchronization), Moscow, Radio i svayz, 1982 (in Russian).
4. Shakhtarin B. I. *Statisticheskay dinamika system sinhronizatsii* (Statistical dynamics of synchronization systems), Moscow, Radio i svayz, 1998 (in Russian).
5. Costas J. P. Synchronous communications, *Proc. IRE*, 1956, vol. 44, no. 12, pp. 1713.
6. Taylor D. Introduction to "Synchronous Communications", A Classic Paper by J. P. Costas, *IEEE Proc.*, 2002, vol. 90, no. 8, pp. 1459.
7. Sklar B. *Cifrovaya svyaz. Teoreticheskie osnovy i prakticheskoe primeneniye* (Digital communication. Fundamentals and Applications), Moscow, Viliams, 2003 (in Russian).
8. Tsui J. B. Y. *Fundamentals of Global Positioning System receivers software approach*, N. Y., Wiley, 2000.
9. Gardner F. M. *Phase lock techniques*, N. Y., Wiley, 2005.
10. Simon M. K., Smith J. G. Offset Quadrature Communications with Decision-Feedback Carrier Synchronization, *IEEE Trans. on Comm.*, 1974, vol. 22, no. 10, pp. 1576–1584.
11. Lindsey V. *Systemi synkhronizatsii v svyazi i upravlenii* (Synchronization systems in communication and), Moscow, Sov. radio, 1978 (in Russian).
12. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. *Differentsialnoye uravneniye chemi Costatsa* (Differential equations of Costas loop), *Doklady Akademii Nauk*, 2012, vol. 446, no. 2, pp. 149 (in Russian).
13. Shakhtarin B. I. *Dinamicheskie harakteristiki fazovoi avtopodstroiki chastoti pri nalichii garmonicheskoi pomehi* (Analysis of phase locked loop in the presence of harmonic interference), *Radiotekhnika i Elektronika*, 2012, vol. 57, no. 6, pp. 649 (in Russian).
14. Shakhtarin B. I., Fomenko A. U. *Sintez i modelirovaniye shemi Costasa* (Synthesis and Simulation of Costas Loop), *Vestnik MGTU im. Baymana. Ser. Priborostroeniye*, 2012, no. 2, pp. 122 (in Russian).
15. Shakhtarin B. I., Sidorkina Y. A., Kulkov I. A. *Modelirovaniye gibridnoi sistemi fazvoi i taktovoi synkhronizatsii Fm-signalov* (Simulation of hybrid system phase and clock synchronization PM-signals), *Vestnik MGTU im. Baymana. Ser. Priborostroeniye*, 2014, no. 4, pp. 123 (in Russian).
16. Simon M. K., Lindsey W. C. Optimum Performance of Costas Receivers Containing Soft Bandpass Limiters, *IEEE Trans. on Comm.*, 1977, vol. 25, no. 8, pp. 822.
17. Ziemer R. E. Perturbation analysis of the effect of CW interference in Costas Loop, *Rec. Nat. Telecommun. Conf. Houston, TX*, Dec. 4–6, 1972, pp. 20–G1.
18. Pugachev V. S., Sinityn I. N. *Stokhasticheskie differentsialnye sistemi* (Stochastic differential systems), Moscow, Nauka, 1985 (in Russian).