(**Bobtsov A. A.** Synthesis of control law for stabilization of a nonlinear system based on measurements of output, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 3, pp. 363—368).

4. **Bobtsov A. A., Shavetov S. V.** *Upravlenie po vyhodu linejnym parametricheski neopredelennym objektom v uslovijah vozmushhajushhih vozdejstvij i neuchtennoj dinamiki* (Output control of linear parametrically uncertain plant under disturbances and unaccounted dynamics), *Nauchno-tehnicheskij vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2011, no. 1 (71), pp. 33—39.

5. **Tsykunov A. M.** *Algoritm robastnogo upravlenija nestacionarnym linejnym objektom s kompensaciej vozmushhenij* (An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation), *Izv. RAN. TiSU*, 2008, no. 4, pp. 33—40 (**Tsykunov A. M**. An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation, *Journal of Computer and Systems Sciences International,* 2008, vol. 47, no. 4, pp. 527—534).

6. **Tsykunov A. M.** *Algoritm robastnogo upravlenija linejnymi micheskimi objektami po vyhodu* (Algorithm for linear robust control of chemical facilities to overcome), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2010, no. 3, pp. 9—14.

7. **Lozier J. C.** A steady-state approach to the theory of saturable servo systems, *IRE Trans. on Automatic Control*, 1956, May, pp. 19—39.

8. **Kapasouris P., Athans M.** Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies, *American Control Conf. Boston,* 2004, pp. 1579—1584.

9. **Edwards C., Postlethwaite I**. Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes, *Automatica,* 1998, vol. 34, no. 2, pp. 199—210.

10. **Monopoli R.** Adaptive Control for Systems for Hard Saturation, *14th IEEE Conf. on Decision and Control. Houston*, TX, 1975, pp. 841—842.

11. **Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H.** Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 1672—1678.

12. **Schwager M., Annaswamy A. M.** Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains, *44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville*, Spain, 2005, pp. 783—788.

13. **Furtat I. B., Tsykunov A. M.** *Robastnoe upravlenie nestacionarnymi nelinejnymi strukturno neopredelennymi objektami* (Robust control of unsteady nonlinear structurally undefined objects), *Problemy Upravlenija,* 2008, no. 5, pp. 2—7.

14. **Furtat I. B., Tsykunov A. M.** *Adaptivnoe upravlenie objektami s neizvestnoj otnositel'noj stepen'ju* (Adaptive control of plants of unknown relative degree), *Avtomatika i Telemehanika*, 2010, no. 6, pp. 109—118. (**Furtat I. B., Tsykunov A. M.** Adaptive control of plants of unknown relative degree, *Automation and Remote Control,* 2010, vol. 71, no. 6, pp. 1076—1084.).

15. **Feuer A., Morse A. S.** Adaptive control of single-input, single-output linear systems, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 557—569.

16. **Narendra K. S., Valavani L. S.** Stable Adaptive Controller Design — Direct Control, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 570—583.

УДК 681.51 DOI: 10.17587/mau.17.587-598

А. Ж. Атамуратов, канд. техн. наук, вед. спец., goofydog@mail.ru,
ООО Пепсико Холдинг,
И. Е. Михайлов, д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр., mikh_igor@mail.ru,
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
Л. А. Муравей, д-р физ.-мат. наук, проф., l_muravey@mail.ru,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами[1]

Рассматривается классическая проблема моментов, возникающая в задачах управления упругими динамическими системами, моделируемыми уравнениями в частных производных четвертого порядка, гиперболическими по Петровскому. Задача управления заключается в нахождении минимального времени, за которое можно погасить колебания, возникающие в системах вследствие начальных возмущений. Доказывается существование минимального значения времени и оптимального управления на примере гашения колебаний балок и пластин, являющихся типичными элементами различных механических конструкций, таких как трубопроводы, антенны и несущие элементы космических платформ. При этом время гашения колебаний и оптимальное управление найдено в явном виде. Для получения приближенных решений введены так называемые точечные движущиеся демпферы и стационарные узкие демпферы, упрощающие разработку вычислительных алгоритмов на основе метода редукции и координатного спуска.

Ключевые слова: *гашение колебаний, тригонометрическая проблема моментов, ортогональные системы и базис Рисса, асимптотическая проблема моментов, стационарные и движущиеся демпферы, метод редукции, метод координатного спуска*

Введение

Методы гашения колебаний элементов сложных механических систем, таких как струны и мембраны, начали интенсивно развиваться в 70-х годах прошлого столетия. Наиболее значимой была работа Д. Лагнесса [1], в которой исследовалась возможность гашения поперечных колебаний струны $u(t, x)$, описываемых следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = g(t, x),\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 < t; \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = h_0(x),\ u_t|_{t=0} = h_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l; \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,\ 0 < t, \quad (1.3)$$

где начальные данные $h_0(x)$, $h_1(x)$ рассматриваются как начальные возмущения, а функция $g(t, x)$ — как

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00425).

функция управления. При этом предполагается, что потенциал $q(x)$ — непрерывная функция на $[0, l]$ (заметим, что условия закрепления струны на концах (1.3) можно заменить на более общие условия $\alpha_0 u + \beta_0 u_x|_{x=0} = \alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=l} = 0$ при некоторых ограничениях на коэффициенты α_i, β_i, $i = 0,1$). Решение задачи (1.1)—(1.3) рассматривается обобщенное (т. е. выполняется для интегрального тождества), и для него определен интеграл энергии

$$E(t) = \int_0^l [u_t^2(t, x) + a^2 u_x^2(t, x)]dx,$$

который при $g(t, x) \equiv 0$ тождественно равен

$$E(0) = \|h_0(x)\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0, l)} + \|h_1(x)\|^2_{L_2(0, l)},$$

где $L_2(0, l)$ — пространство измеримых на $(0, l)$ функций, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на промежутке $(0, l)$, а $\overset{0}{W}{}^1_2(0, l)$ — соболевское пространство функций $v(x)$ из $L_2(0, l)$, имеющих обобщенные производные $v'(x) \in L_2(0, l)$, и таких, что $v(0) = v(l) = 0$.

Постановка задачи

Задача управления заключается в возможности перевести систему (1.1)—(1.3) из начального состояния (1.2) в произвольное состояние

$$u|_{t=T} = \tilde{h}_0(x),\ u_t|_{t=T} = \tilde{h}_1(x).$$

Следуя Ж. Лионсу [2], данное свойство системы будем называть *строгой управляемостью*.

Задача гашения колебаний заключается в нахождении минимального времени $T > 0$ такого, что для любых начальных возмущений $h_0(x) \in \overset{0}{W}{}^1_2(0, l)$, $h_1(x) \in L_2(0, l)$ найдется оптимальная управляющая функция $g(t, x) \in L_2((0, T) \times (0, l))$, такая что

$$E(T) = 0, \tag{1.4}$$

или, что то же самое, в момент времени $t = T$ решение задачи (1.1)—(1.3) принимает следующие значения:

$$u|_{t=T} = 0,\ u_t|_{t=T} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{1.5}$$

Отметим, что для задачи Штурма—Лиувилля

$$-v_{xx} + q(x)v = \lambda v,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.6}$$

$$v(0) = v(l) = 0, \tag{1.7}$$

хорошо известны собственные значения, образующие монотонную последовательность $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ $\ldots < \lambda_n < \ldots$, а отвечающие им собственные функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$, ..., $v_n(x)$, ... образуют ортонормированный базис в $L_2(0, l)$. При этом

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n} = \frac{a\pi}{l}n + c_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \to \infty, \tag{1.8}$$

что позволяет разложить функции $u(t, x)$, $g(t, x)$, $h_0(x)$, $h_1(x)$ в ряды Фурье по системе $\{v_n(x)\}$.

Тригонометрическая проблема моментов

Выполнение условий (1.5) приводит нас к системе интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T g_n(t)\cos\omega_n t dt = b_n, \\ &\int_0^T g_n(t)\sin\omega_n t dt = -a_n\omega_n, \end{aligned}\right\} n = 1, 2, \ldots, \tag{1.9}$$

которую принято называть тригонометрической проблемой моментов. Здесь a_n, b_n, $g_n(t)$ — коэффициенты Фурье разложения функций $h_0(x)$, $h_1(x)$, $g(t, x)$ в ряды по ортонормированному базису $\{v_n(x)\}$.

Отметим, что фундаментальные результаты по исследованию разрешимости проблемы моментов для более сложных систем, чем тригонометрические, но конечномерных в $L_p(0, T)$, $1 \leqslant p < \infty$, были получены М. Крейном, Н. Ахиезером, И. Глазманом, М. Красносельским [3—6] и др.

Что касается случаев, рассматриваемых в данной работе, они отличаются тем, что тригонометрическая система бесконечномерная в $L_2(0, T)$, и при этом время T является неизвестной величиной. Основу исследований составляет установление асимптотики соответствующих значений ω_n, позволяющей использовать известные теоремы Н. Левинсона [7] и Р. Беллмана [8].

Продолжим исследование задачи Д. Лагнесса. Из асимптотики (1.8) вытекает существование положительного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\omega_n} = \frac{l}{a\pi}$. Полагая $\frac{l}{a\pi} = \frac{T}{2\pi}$, в силу теоремы Н. Левинсона [7] заключаем, что при

$$T = \frac{2l}{a} \tag{1.10}$$

тригонометрическая система $\{\sin\omega_n t, \cos\omega_n t\}$ образует базис Рисса в $L_2(0, T)$, следовательно, для нее существует биортогональная в $L_2(0, T)$ система функций $\{\varphi_n(t), \psi_n(t)\}$. Поэтому существует решение проблемы моментов (1.9) — оптимальное управление $w(t) \in L_2(0, T)$, такое что

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\omega_n\varphi_n(t) - b_n\psi_n(t)), \tag{1.11}$$

причем для него справедлива оценка

$$\|w(t)\|^2_{L_2(0, T)} \leqslant \text{const}(\|h_0(x)\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0, l)} + \|h_1(x)\|^2_{L_2(0, l)}. \tag{1.12}$$

Управление в подобласти

Д. Лагнессом также была решена задача гашения колебаний струны, если управление $g(t, x)$ сосредоточено в произвольной области $[\alpha, \beta]$, т. е. $g(t, x) \in L_2(0, T) \times [\alpha, \beta]$). Эта задача эквивалентна проблеме моментов

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T\int_\alpha^\beta g(t, x)\cos\omega_n t dxdt = -\beta_n, \\ &\int_0^T\int_\alpha^\beta g(t, x)\sin\omega_n t dxdt = \alpha_n\omega_n, \end{aligned}\right\} n = 1, 2, \dots . \quad (1.13)$$

В этом случае искомая функция

$$g(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 (\omega_n a_n \varphi_n(t) - b_n\psi_n(t)) v_n(x)\chi_{[\alpha, \beta]}(x), \quad (1.14)$$

где $\chi_{[\alpha, \beta]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\alpha, \beta]$, а $A_n^2 = \left(\int_\alpha^\beta v_n^2(x)(dx)\right)^{-1}$, причем $\inf_n \int_\alpha^\beta v_n^2(x)dx > 0$, так как $\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta v_n^2(x)dx = \beta - \alpha$ (что легко проверить интегрированием умноженного на v_n уравнения (1.6) для $\lambda = \lambda_n$ и $v = v_n$). Следовательно, справедлива аналогичная (1.12) оценка

$$\int_0^T\int_\alpha^\beta (g(t, x))^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{\beta - \alpha}(\|h_0(x)\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0, l)} + \|h_1(x)\|^2_{L_2(0, l)}). \quad (1.15)$$

Заметим, что из соотношения (1.15) не вытекает возможность использовать так называемый точечный демпфер, так как при $\beta - \alpha \to 0$ эта оценка $\to \infty$.

Результаты Д. Лагнесса имеют важное практическое значение для определения времени T гашения колебаний, однако весьма затруднительно построить приближенное оптимальное управление, так как приходится решать бесконечную систему интегральных уравнений для нахождения сопряженных функций и суммировать бесконечный ряд (1.14). Следовательно, для нахождения приближенных решений необходимо существенно сузить класс управляющих функций.

О классах управлений

Д. Рассел [9] предложил использовать только одну управляющую функцию, т. е. взять

$$g(t, x) = w(t)f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 < t, \quad (1.16)$$

где $f(x)$ — некоторая заданная функция. Однако, даже в случае управления колебаниями струн ($q \equiv 0$), когда λ_n и $v_n(x)$ имеют явный вид $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, для нахождения оптимального управления $w(t)$ мы снова имеем бесконечную проблему моментов:

$$\int_0^T \mathbf{e}^{i\frac{\pi a n t}{l}} w(t)dt = \frac{b_n - i\frac{\pi n}{l}}{f_n},\ n = 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

где

$$f_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx \neq 0. \quad (1.18)$$

Заметим, что $\mathbf{e}^{i\frac{\pi a n t}{l}} = \left(\mathbf{e}^{i\frac{\pi a t}{l}}\right)^n$, поэтому из предельного соотношения Н. Левинсона (1.10) получаем сразу $T = \frac{2l}{a}$, система $\left\{\left(\mathbf{e}^{i\frac{\pi a t}{l}}\right)^n\right\} = \left\{\left(\mathbf{e}^{i\frac{2\pi a t}{T}}\right)^n\right\}$ образует ортогональный базис в комплексном пространстве $L_2(0, T)$, и оптимальная функция управления $w(t)$ представляется в виде ряда

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{e}^{-i\frac{a\pi n t}{l}} \frac{b_n - i\frac{\pi n}{l}a_n}{f_n}. \quad (1.19)$$

Если $f(x) \in L_2(0, l)$, то $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$, откуда $|f_n| \to 0$, $n \to \infty$. Значит, ряд (1.19), вообще говоря, не сходится в $L_2(0, T)$. Если положить все $f_n = 1$, то получим, что

$$f(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \delta(x), \quad (1.20)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Точечный демпфер

Исследованию проблемы моментов для управления вида

$$g(t, x) = w(t)\delta(x - x_0),\ x_0 \in (0, l) \quad (1.21)$$

(так называемый точечный демпфер) посвящен ряд работ А. Бутковского [10, 11]. Из них вытекает, в частности, что для $f_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right)$ точки $x_0 = \frac{k}{n}l$, $k, n = 1, 2, \dots, k < n$, образуют множество точек неуправления системы (1.1)—(1.3), в этом случае возникают решения, соответствующие однородной системе в виде стоячих волн (энергия которых постоянна), и это множество $\left\{\frac{k}{n}l\right\}$ всюду плотно на промежутке $(0, l)$. Это затрудняет для остальных точек промежутка $(0, l)$, называемых точками управляемости, построение устойчивых алгоритмов численного (приближенного) решения задачи гашения колебаний. При этом принадлежность оптимального управления $w(t)$ пространству $L_2(0, T)$ требует значительной гладкости начальных возмущений.

Точечный движущийся демпфер

Заметим однако, что множество точек неуправляемости имеет лебегову меру нуль на промежутке $(0, l)$. Поэтому естественно рассматривать (Л. Муравей, [12—13]) управление в виде

$$g(t, x) = w(t)\delta(x - x_0 - s(t)) \qquad (1.22)$$

(так называемый точечный движущийся демпфер) в предположении ограниченной вариации производной функции $s(t)$ на отрезке $[0, T]$. Введение второй управляющей функции позволяет почти для всех $t \in [0, T]$ находиться в точках управляемости и, тем самым, избежать появления стоячих волн. Проблема моментов для простейшего демпфера типа

(1.22), $x_0 = 0$ и $s(t) = \left\{ \begin{matrix} bt, 0 \leqslant t \leqslant \frac{l}{b}; \\ \frac{2l}{b} - t, \frac{l}{b} \leqslant t \leqslant \frac{2l}{b}; \end{matrix} \right\}$, была исследована в работах Б. Билалова и Л. Муравья [14—15], где было доказано, что система

$$\left\{ \mathbf{e}^{i\frac{\pi ant}{l}} \sin\frac{\pi b_n t}{l} \right\} \qquad (1.23)$$

при $b > a$ образует базис Рисса в $L_2(0, T)$ на отрезке $[0, T]$, где $T = \frac{2l}{b}$. Чтобы пояснить этот результат, заметим, что

$$\mathbf{e}^{i\frac{\pi ant}{l}} \sin\frac{\pi b_n t}{l} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{i\frac{(a+b)\pi nt}{l}} - \mathbf{e}^{i\frac{(b-a)\pi nt}{l}}\right), \ t \in [0, T],$$

поэтому систему (1.23) можно заменить системой

$$\{(\varpi(t))^n\}, \ t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right],$$

где

$$\varpi(t) = \begin{cases} \mathbf{e}^{o(t)}, \ t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; \\ \mathbf{e}^{\delta(t)}, \ t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right], \end{cases}$$

$$\sigma(t) = i\frac{\pi}{l}(a + b)t, \ \delta(t) = i\frac{\pi}{l}(b - a)t, \ b > a. \qquad (1.24)$$

Следовательно, функция $\varpi(t)$ непрерывно возрастает на отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, и предельное условие Н. Левинсона принимает вид

$$\frac{\pi}{l}(a + b)\frac{T}{2} + \frac{\pi}{l}(b - a)\frac{T}{2} = 2\pi, \text{ откуда } T = \frac{2l}{b}. \qquad (1.25)$$

Значит, время гашения колебаний точечным движущимся демпфером, вообще говоря, меньше времени гашения колебаний методом Д. Лагнесса.

О численном решении задач гашения колебаний

Отметим, что использование точечного движущегося демпфера (1.22) при ограничениях $\alpha \leqslant x_0 + s(t) \leqslant \beta$, где $(\alpha, \beta) \in [0, l]$, а также метода характеристик решения задачи (1.1)—(1.3) позволило разработать эффективные численные методы гашения колебаний струны и прямоугольной мембраны (А. Махмудов, Л. Муравей [16]; С. Асланов, И. Михайлов, Л. Муравей [17]; А. Атамуратов [18]).

Пример 1. Рассмотрим задачу гашения колебаний струны при $a = 2$, заключающуюся в нахождении оптимальных управляющих функций $w(t)$, $s(t)$ и времени гашения колебаний T. Начальные возмущения $h_0(x)$, $h_1(x)$ представлены на рис. 1 и рис. 2.

На рис. 3 и рис. 4 изображены оптимальные управляющие функции $w(t)$ и $s(t)$ соответственно.

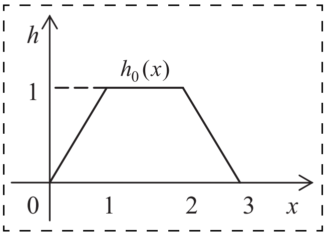

Рис. 1. Начальное возмущение $h_0(x)$

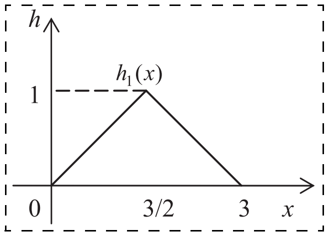

Рис. 2. Начальное возмущение $h_1(x)$

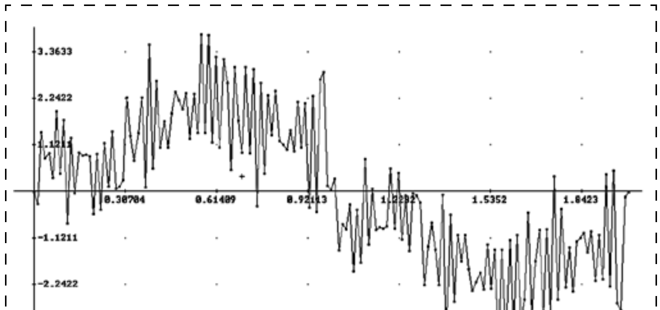

Рис. 3. Оптимальная управляющая функция $w(t)$

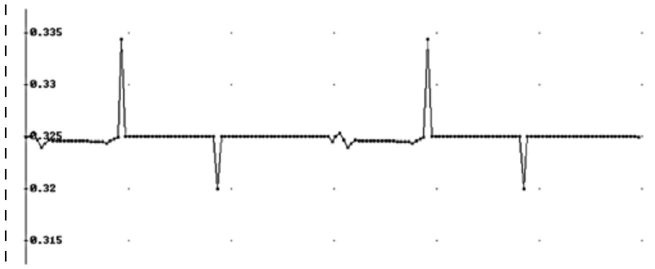

Рис. 4. Оптимальная управляющая функция $s(t)$

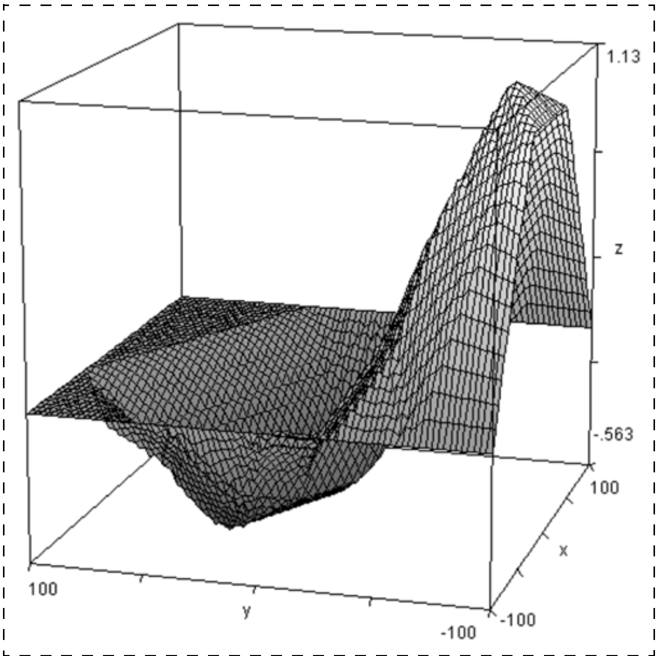

Рис. 5. Вид функции $u(t, x)$

На рис. 5 изображен вид функции $u(t, x)$ (ось t направлена справа налево). За время $T = 3$ происходит практически полное гашение колебаний.

Результаты работ [16—18] показали, что если $\beta - \alpha$ достаточно мало, то управление $w(t)\delta(x - x_0 - s(t))$ можно с большой точностью заменить управлением $w(t)\chi_{[\alpha,\, \beta]}(x)$ (так называемый узкий демпфер). Поэтому аналогичные демпферы будут использоваться в дальнейшем при исследовании задачи гашения колебаний балки и прямоугольной пластины.

Целью данной работы является исследование управляемости упругих систем, описываемых гиперболическими по Петровскому уравнениями четвертого порядка. Типичными объектами являются балки (трубопроводы, космические антенны) и пластины, являющиеся элементами многочисленных конструкций (космические платформы).

Гашение колебаний балки

Колебания балки описываются гиперболическим по Петровскому уравнением

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + g(t, x),\ (t, x) \in \Pi = \{0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}. \quad (2.1)$$

Начальные отклонение и скорость перемещения балки

$$u|_{t=0} = h_0(x),\ u_t|_{t=0} = h_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l \quad (2.2)$$

мы снова будем рассматривать как начальные возмущения. На концах балки наложим условия нежесткого закрепления

$$u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = u_{xx}|_{x=l} = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (2.3)$$

Будем искать управляющую функцию $g(t, x) \in L_2(\Pi)$, переводящую балку из состояния (2.2) в состояние

$$u|_{t=T} = 0,\ u_t|_{t=T} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (2.4)$$

за минимальное время T, предполагая что $h_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^2(\Pi)$, $h_1(x) \in L_2(\Pi)$.

Соответствующая системе (2.1)—(2.4) задача Штурма—Лиувиля

$$\begin{cases} -a^2 u_{xxxx} = \lambda v,\ x \in [0, l]; \\ v(0) = v_{xx}(0) = 0,\ v(l) = v_{xx}(l) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

имеет последовательность собственных чисел $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4$ и отвечающую ей ортонормированную последовательность собственных функций $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, $n = 1, 2, ...$ Аналогично изложенному выше получаем следующую проблему моментов:

$$\int_0^T g_n(t)\mathbf{e}^{ia\omega_n^2 t}dt = b_n - ia\omega_n^2 a_n,\ n = 1, 2, ..., \quad (2.6)$$

где a_n, b_n, $g_n(t)$ — коэффициенты Фурье функций $h_0(x)$, $h_1(x)$, $g(t, x)$ по ортонормированному в $L_2(0, l)$ базису $\{v_n(x)\}$, где $\omega_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi^2}{l^2}n^2$, $n = 1, 2, ...$

Система экспонент

$$\left\{\mathbf{e}^{ia\omega_n^2 t}\right\} = \left\{\left(\mathbf{e}^{ia\frac{\pi^2}{l^2}t}\right)^{n^2}\right\} \quad (2.7)$$

является ортогональной на отрезке $[0, T]$, если

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{l^2}{\pi^2 a},\ \text{т. е. } T = \frac{2l^2}{\pi a}. \quad (2.8)$$

Таким образом найдено, вообще говоря, не минимальное время гашения колебаний. Отвечающее ему управление

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{e}^{-ia\frac{2\pi n^2}{T}t}(b_n - i\omega_n^2 a_n) \quad (2.9)$$

в силу условий на начальные возмущения принадлежит $L_2(0, T)$.

Далее исследуем систему $\left\{\varphi_n(t) = \frac{\mathbf{e}^{ia\frac{\pi^2 n^2}{l^2}t}}{\sqrt{\tau}}\right\}$ на отрезке $[0, \tau]$, $\tau < T$. Ясно, что эта система не полна, однако является почти биортогональной по Р. Беллману [8], поскольку удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $$\int_0^\tau |\varphi_n(t)|^2 dt = 1; \tag{2.10}$$

2) если положить $$a_{mn} = \begin{cases} \int_0^\tau \varphi_m(t)\overline{\varphi}_n(t)dt, \ m \neq n, \\ 0, \ m = n, \end{cases} \tag{2.11}$$

то должно выполняться неравенство

$$\sum_{m \neq n} |a_{mn}|^2 < +\infty. \tag{2.12}$$

Первое условие (2.10) очевидно. Проверим второе условие (2.11). Имеем

$$\varphi_m(t)\overline{\varphi}_n(t) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[\cos\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)t\right) - i\sin\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)t\right)\right], \tag{2.13}$$

откуда

$$\int_0^\tau \varphi_m(t)\overline{\varphi}_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[\frac{l^2\sin\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)\tau\right)}{a\pi^2(m^2 - n^2)} - i\frac{l^2\left(\cos\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)\tau\right) - 1\right)}{a\pi^2(m^2 - n^2)}\right].$$

Значит, $n \neq m$ и

$$|a_{mn}| \leqslant \frac{l^2\sqrt{2}}{a\pi^2(m^2 - n^2)\tau}\sqrt{1 - \sin\frac{2a\pi^2(n^2 - m^2)}{l^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2l^2}{a\pi^2|m^2 - n^2|\tau} \tag{2.14}$$

и

$$\sum_{m \neq n} |a_{mn}|^2 \leqslant \frac{8l^4}{a^2\pi^4\tau^2}\sum_{m < n}\frac{1}{(m^2 + n^2)(n^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{32l^4}{a^2\pi^4\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2n^2} \leqslant \frac{32}{a^2\tau^2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4. \tag{2.15}$$

Заметим, что условия 1), 2) выполняются и при $\tau > T$. При выполнении условий 1) и 2) из работы Р. Беллмана [8] вытекают следующие неравенства:

1) если вещественнозначная функция $w(t) \in \widetilde{L}_2(0, \tau)$, где $\widetilde{L}_2(0, \tau)$ — замыкание системы $\{\varphi_n(t)\}$ в норме $L_2(0, \tau)$, и если $d_n = \int_0^\tau w(t)\overline{\varphi}_n(t)dt$, $m \neq n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \leqslant \int_0^\tau |w(t)|^2 dt\left[1 + \frac{32}{a^2\tau^2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\right]; \tag{2.16}$$

2) следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|d_n - \int_0^\tau w(t)\overline{\varphi}_n(t)dt\right|^2 \leqslant \frac{32}{a^2\tau^2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2. \tag{2.17}$$

В частности, из оценки (2.17) вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty}\left|d_n - \int_0^\tau w(t)\overline{\varphi}_n(t)dt\right| = 0, \tag{2.18}$$

т. е. проблему моментов (2.6) можно решить в $\widetilde{L}_2(0, \tau)$ только асимптотически.

Заметим, что коэффициент $\frac{32}{a^2\tau^2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 = \left(\frac{4T}{\pi\tau}\right)^2$ в неравенстве (2.17) показывает, что при уменьшении τ нахождение приближенного оптимального управления усложняется. Наоборот, при $\tau \gg T$ проблему моментов можно с требуемой точностью решить достаточно просто.

Численное решение задачи гашения колебаний балки

Для получения управляющей функции будем использовать численные методы. В качестве управляющей функции будем рассматривать движущийся точечный демпфер

$$g(t, x) = w(t)\delta(x - x_0 - s(t)), \tag{2.19}$$

где $w(t)$ и $s(t)$ — две искомые управляющие функции, δ — дельта-функция Дирака. Мы будем предполагать, что $w(t) \in L_2(0, T)$, а $s(t)$ — функция с ограниченной вариацией.

Уравнение (2.1) можно свести к системе двух уравнений второго порядка [20]

$$\begin{cases} u_t = av_{xx}; \\ v_t = -au_{xx} + f(t, x), \end{cases} \tag{2.20}$$

где

$$f(t, x) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{x}{al}w(t)(l - x_0 - s(t)), \ x < x_0 + s(t); \\ \frac{1}{a}(x - x_0 - s(t))w(t) - \frac{x}{al}(l - x_0 - s(t))w(t), x \geqslant x_0 + s(t). \end{cases}$$

Начальные и граничные условия перепишутся следующим образом:

$$u(0, x) = h_0(x),$$

$$v(0, x) = \frac{1}{a}\int_0^x\left[\int_0^\xi h_1(\eta)d\eta\right]d\xi - \frac{x}{al}\int_0^l\left[\int_0^\xi h_1(\eta)d\eta\right]d\xi, \quad (2.21)$$

$$u(t, 0) = 0,\ u(t, l) = 0,\ v(t, 0) = 0,$$

$$v(t, l) = \int_0^t f(t, l)dt + \frac{1}{a}\int_0^l\int_0^x h_1(y)dydx - \frac{1}{a}\int_0^l\int_0^\xi h_1(\eta)d\eta d\xi. \quad (2.22)$$

Построим конечно-разностную схему для приближенного решения системы (2.20). Разобьем рассматриваемую область на прямоугольные ячейки параллельными прямыми $x_m = mh_x$, $m = 0, ..., N_X$, $t_n = nh_t$, $n = 0, ..., N_T$, где $h_x = l/N_X$ и $h_t = T/N_T$. В результате этих операций мы можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{h_\tau} = \dfrac{a}{2}\left[\dfrac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \dfrac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h_x^2}\right]; \\ \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{h_\tau} = -\dfrac{a}{2}\left[\dfrac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \dfrac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h_x^2}\right] + \dfrac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Если сделать замену

$$y_m^n = \begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix},\ \alpha = \frac{2h_x^2}{ah_\tau},\ \beta = \frac{h_x^2}{a},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } V = \begin{pmatrix} -f_m^n - f_m^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

то систему (2.24) можно записать в векторной форме

$$y_{m-1}^{n+1} - [2E + \alpha B]y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} =$$

$$= -(y_{m-1}^n - [2E + \alpha B]y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V), \quad (2.25)$$

где E — единичная матрица. Положим $C = 2E + \alpha B$, $\tilde{C} = 2E - \alpha B$ и $F_m^n = y_{m-1}^n - \tilde{C}y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V$. Тогда наша система запишется следующим образом:

$$y_{m-1}^{n+1} - Cy_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = -F_m^n. \quad (2.26)$$

Заметим, что схема (2.26) является безусловно устойчивой.

Будем решать ее методом редукции. Для решения задачи гашения колебаний будем использовать метод координатного спуска. Аппроксимируем функции $w(t)$ и $s(t)$ кусочно-постоянными функциями: $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ положим $w(t) = w_i$, $s(t) = s_i$, где w_i, s_i — const, $i = \overline{0, N_{T-1}}$. Тогда интеграл энергии балки будет являться функцией переменных $w_0, w_1, ..., w_{N_T}, s_0, s_1, ..., s_{N_T}$

$$E(T) = L(w_0, w_1, ..., w_{N_T}, s_0, s_1, ..., s_{N_T}). \quad (27)$$

Оптимальные значения $w_0, w_1, ..., w_{N_T}, s_0, s_1, ..., s_{N_T}$, минимизирующие (2.27) с заданной точностью ε, и будут искомым решением задачи.

Пример 2. Начальные условия $h_0(x) = 0{,}25\sin(\pi x)$, $h_1(x) = 0$, $x_0 = 0{,}5$. Входные параметры $l = 1$, $a = 1$, $h_t = h_x/2$, в методе редукции зададим число $M = 5$, тогда $h_x = 0{,}0312$, $h_t = 0{,}0156$. Будем считать, что задача гашения колебаний решена, если $E(T) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}001$. Минимальное время, требуемое для гашения, равно $T = 0{,}141$. На рис. 6, 7 изображен процесс гашения первоначального возмущения балки: график значений функции $u(t, x)$ (рис. 6), и вид управляющей функции $w(t)$ (рис. 7). При этом можно положить $s(t) \equiv 0$.

Многочисленные расчеты показали, что гашение колебаний происходит за наименьшее время, если неподвижный точечный демпфер находится в точке максимума амплитуды начального возмущения (2.2), по сравнению со случаем, когда демпфер помещается в другую точку балки.

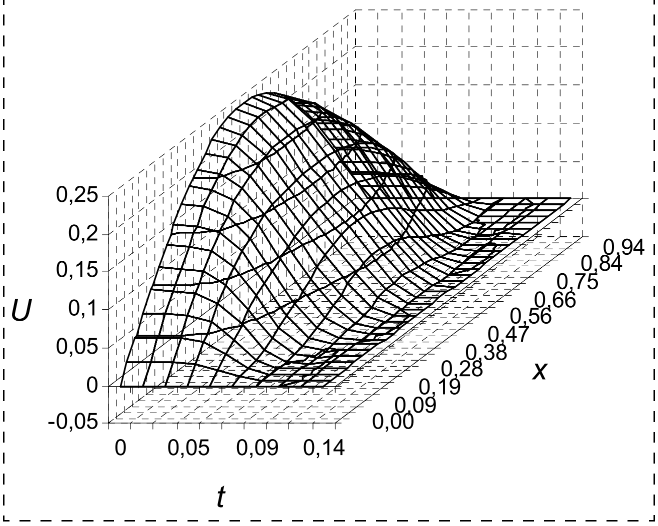

Рис. 6. Процесс гашения колебания

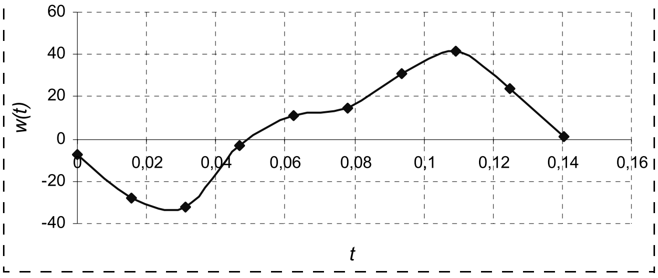

Рис. 7. Управляющая функция $w(t)$

Пример 3. Рассмотрим условия примера 2, но положим $x_0 = 0{,}687$. Условием гашения колебаний, как и прежде, будем полагать $E(T) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}001$. В этом случае минимальное время, требуемое для гашения, увеличилось до $T = 0{,}219$. На рис. 8, 9 изображен процесс гашения первоначального возмущения балки: график значений функции $u(t, x)$ (рис. 8), и вид управляющей функции $w(t)$ (рис. 9). При этом можно положить $s(t) \equiv 0$.

Выше уже говорилось, что если точечный стационарный демпфер (1.21) помещен на струне в точку x_0, которая является узлом стоячих волн решений однородного уравнения колебаний струны, то задача либо неразрешима, либо неустойчива. Этот факт также может иметь место и при гашении колебаний балки.

Пример 4. Пусть $h_0(x) = 0{,}1\sin(2\pi x)$, $h_1(x) = 0$, $x_0 = 0{,}5$, $s(t) \equiv 0$. Демпфер, установленный в точку $x_0 = 0{,}5$, не может погасить колебания балки, поскольку в самой точке $x_0 = 0{,}5$ колебаний не происходит, и функция управления принимает вид $w(t) \equiv 0$. Это наглядно видно на рис. 10.

Использование же движущегося точечного демпфера позволяет решить задачу.

Пример 5. Пусть $h_0(x) = 0{,}1\sin(2\pi x)$, $h_1(x) = 0$, $x_0 = 0{,}5$. Функция $s(t)$ задавалась по закону, изображенному на рис. 11. Время гашения для данных условий равнялось $T = 0{,}781$. Управляющая функция $w(t)$ представлена на рис. 12, а процесс гашения — на рис. 13.

Таким образом, задача гашения колебаний балки решается за конечное время.

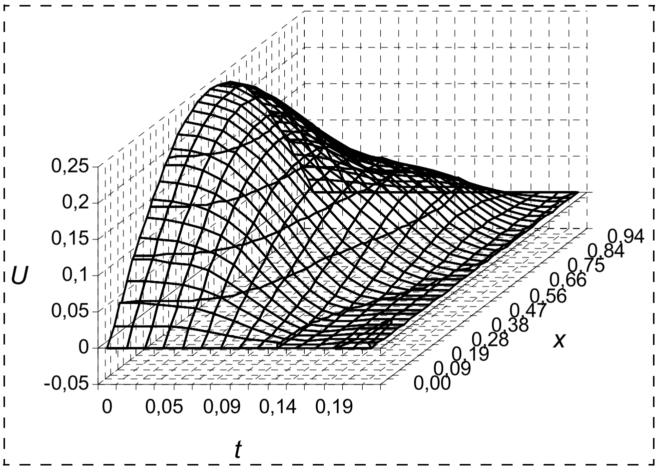

Рис. 8. Процесс гашения колебания

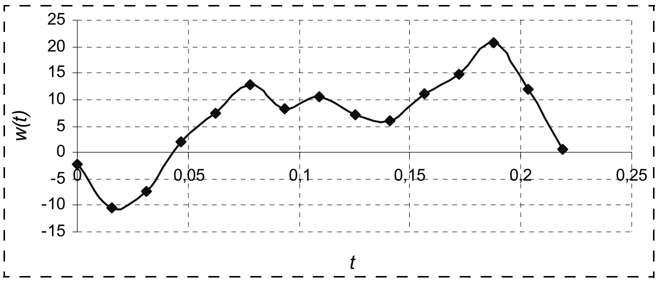

Рис. 9. Управляющая функция $w(t)$

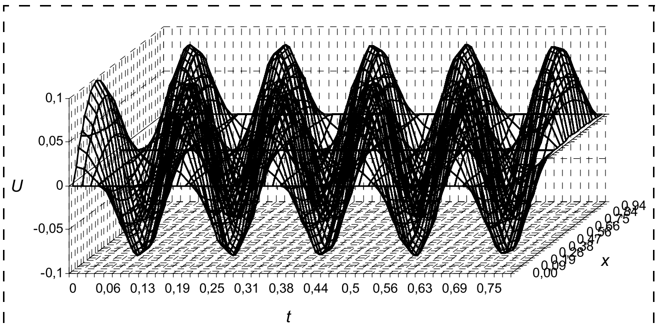

Рис. 10. Функция расположения точечного демпфера $s(t)$

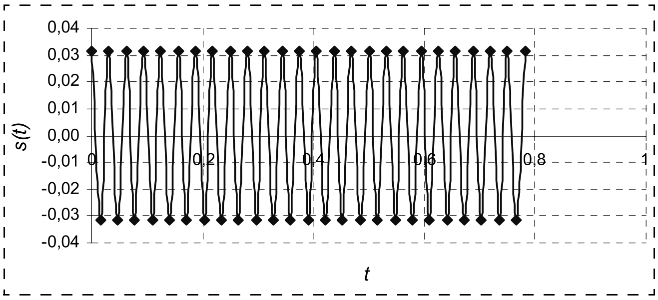

Рис. 11. Функция перемещения точечного демпфера $s(t)$

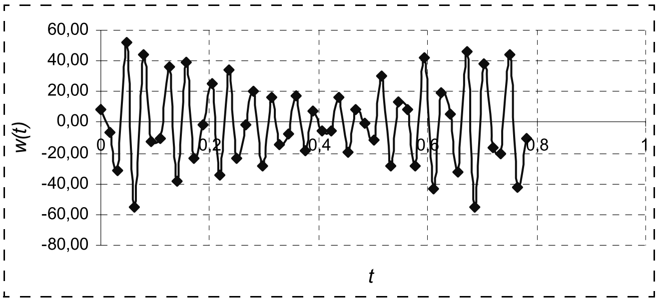

Рис. 12. Управляющая функция $w(t)$

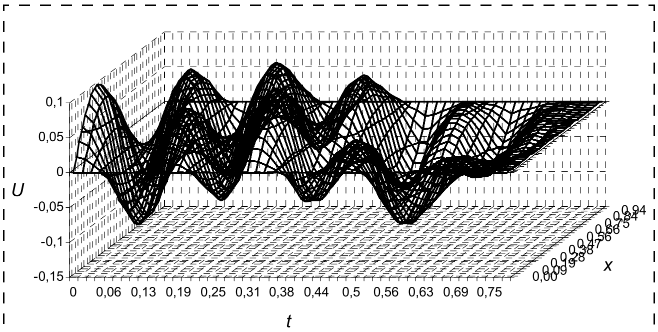

Рис. 13. Процесс гашения колебания

Гашение колебаний прямоугольной пластины

Малые поперечные колебания упругой изотропной пластины постоянной толщины h описываются уравнением Софи-Жармен

$$\rho u_{tt} = -D\Delta\Delta u + \widetilde{g}\,(t, x, y),\ 0 \leqslant t,\ (x, y) \in \Pi = \\ = \{0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2\},$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная жесткость пластинки; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; ρ — удельная плотность на единицу площади пластинки; t — время, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа. Считая ρ и D постоянными, исходное уравнение можно привести к виду (гиперболическому уравнению по Петровскому четвертого порядка)

$$u_{tt} = -a^2\Delta\Delta u + g(t, x, y),\ t \geqslant 0,\ (x, y) \in \Pi. \quad (3.1)$$

Начальные отклонение и скорость пластины от положения равновесия будем задавать как начальные условия и считать их нежелательными возмущениями

$$u(0, x, y) = h_0(x, y),\ u_t(0, x, y) = h_1(x, y),\ (x, y) \in \Pi. \quad (3.2)$$

На границе Γ пластины наложим условие шарнирного закрепления

$$u|_\Gamma = 0,\ \Delta u|_\Gamma = 0,\ t \geqslant 0. \quad (3.3)$$

Правую часть уравнения (3.1) $g(t, x, y)$ будем называть функцией управления. Как и ранее, нам удобно рассматривать обобщенное решение задачи (3.1)—(3.3) (в смысле интегрального тождества), которое существует и единственно в соболевском пространстве $W_2^{1,2}([0, T] \times \Pi)$, если предположить, что $h_0(x, y) \in \overset{0}{W}{}_2^2(\Pi)$, $h_1(x, y) \in L_2(\Pi)$ и $g(t, x, y) \in L_2([0, T] \times \Pi)$.

Заметим, что для обобщенного решения интеграл энергии $E(t)$ имеет вид

$$E(t) = \int_\Pi (u_t^2 + a^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2))dxdy, \quad (3.4)$$

причем для $g(t, x, y) \equiv 0$

$$E(t) = E(0) = \int_\Pi (h_1^2(x, y) + a^2(h_{0xx}^2(x, y) + \\ + 2h_{0xy}^2(x, y) + h_{0yy}^2(x, y)))dxdy = \\ = \|h_1\|^2_{L_2(\Pi)} + a^2\|h_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(\Pi)}.$$

Задача гашения колебаний прямоугольной пластины заключается в нахождении минимального значения $t = T$ такого, что при любых начальных возмущениях $h_0(x, y)$, $h_1(x, y)$ (из приведенных классов) найдется управляющая функция $g(t, x, y)$ (из описанного класса), что

$$E(T) = 0. \quad (3.5)$$

Отметим, что условие (3.5) эквивалентно условиям

$$u(T, x, y) = 0,\ u_t(T, x, y) = 0,\ (x, y) \in \Pi. \quad (3.6)$$

Чтобы получить проблему моментов, рассмотрим соответствующую задачу Штурма—Лиувилля

$$-\Delta^2 v = \lambda v,\ (x, y) \in \Pi, \quad (3.7)$$

$$v|_\Gamma = 0,\ \Delta v|_\Gamma = 0. \quad (3.8)$$

Нетрудно показать, что собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_{k,p} = \left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l_2}\right)^2\right)^2,\ k, p = 1, 2, ..., \quad (3.9)$$

а отвечающая им система собственных функций

$$v_{k,p}(x, y) = \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi p}{l_2}y\right), \\ k, p = 1, 2, ..., \quad (3.10)$$

образует ортонормированный базис в $L_2(0, \pi)$. Следовательно, разлагая функции $h_0(x, y)$, $h_1(x, y)$, $g(t, x, y)$ в ряды Фурье по этому базису $\{v_{k,p}(x, y)\}$, мы получим решение задачи (3.1)—(3.3) в виде ряда

$$u(t, x, y) = \\ = \sum_{k,p=1}\left(a_{k,p}\cos(a\sqrt{\lambda_{k,p}}\,t) + \frac{b_{k,p}}{a\sqrt{\lambda_{k,p}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{k,p}}\,t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{k,p}}}\int_0^t g_{k,p}(\tau)\sin[a\sqrt{\lambda_{k,p}}\,(t-\tau)]d\tau\right)v_{k,p}(x, y), \quad (3.11)$$

где $a_{k,p}$, $b_{k,p}$, $g_{k,p}(t)$ — коэффициенты Фурье функций $h_0(x, y)$, $h_1(x, y)$, $g(t, x, y)$ соответственно.

Из соотношения (3.11) стандартными преобразованиями с учетом условий (3.6) получим бесконечную систему интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных функций $g_{k,p}(t)$ — проблему моментов

$$\begin{cases} \int_0^T g_{k,p}(t)\cos(a\sqrt{\lambda_{k,p}}\,t)dt = b_{k,p}, \\ \int_0^T g_{k,p}(t)\sin(a\sqrt{\lambda_{k,p}}\,t)dt = -a\sqrt{\lambda_{k,p}}\,a_{k,p}, \end{cases} \quad (3.12) \\ k, p = 1, 2, ...$$

Заметим, что ее можно переписать в виде

$$\int_0^T g_{k,p}(t)\mathbf{e}^{ia\pi^2\omega_{k,p}t}dt = d_{k,p} = b_{k,p} - ia\pi^2\omega_{k,p}a_{k,p}, \quad (3.13)$$

где $\omega_{k,p} = \dfrac{k^2}{l_1^2} + \dfrac{p^2}{l_2^2}$, $k, p = 1, 2, ...$.

Исследование разрешимости проблемы моментов тесно связано с асимптотическими свойствами при достаточно больших значениях k, p соответствующей системы экспонент

$$\left\{\mathbf{e}^{ia\pi^2\omega_{k,p}t}\right\} \qquad (3.14)$$

в пространстве $L_2(0, T)$. Перенумеруем $\omega_{k,p}$ в порядке их неубывания с учетом возможной кратности. Тогда получим неубывающую последовательность чисел ω_n, $n = 1, 2, ...$, где номер n однозначно определяется некоторым номером $(k(n), p(n))$, т. е. $\omega_n = \omega_{k(n),\, p(n)}$. Найдем асимптотику чисел ω_n при больших значениях n. Для этого обозначим через $N(\rho)$, $\rho > 0$ число таких $\omega_{k,\,p}$ с учетом кратности, для которых

$$\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{p^2}{l_2^2} \leqslant \rho. \qquad (3.15)$$

Ясно, что $N(\rho)$ равно числу точек (k, p), удовлетворяющих неравенству (3.15), или площади фигуры $M_{\sqrt{\rho}}$, составленной из прямоугольников $\Pi_{k,\,p} = \{(x, y)\colon (k-1)l_1 \leqslant x \leqslant kl_1, (p-1)l_2 \leqslant y \leqslant pl_2\}$, или, что то же самое, умноженной на $1/l_1l_2$ площади фигуры, составленной из единичных квадратов $K_{k,\,p} = \{(x, y)\colon k - 1 \leqslant x \leqslant k, p - 1 \leqslant y \leqslant p\}$, удовлетворяющих неравенству

$$k^2 + p^2 \leqslant \rho. \qquad (3.16)$$

Откуда, очевидно, вытекает оценка

$$N(\rho) \leqslant \frac{\pi\rho}{4l_1l_2}. \qquad (3.17)$$

Пусть q_n — кратность числа ω_n, тогда

$$n + q_n - 1 = N(\omega_n). \qquad (3.18)$$

При этом кратность q_n можно оценить следующим образом:

$$q_n \leqslant \frac{\pi}{4l_1l_2}\omega_n - \frac{\pi}{4l_1l_2}\left(\sqrt{\omega_n} - \sqrt{l_1^2 + l_2^2}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{2l_1l_2}\sqrt{\omega_n}. \qquad (3.19)$$

Из выражений (3.13), (3.17)—(3.19) вытекает соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{a\pi^2\omega_n} = \frac{\pi l_1 l_2}{a\pi^3}. \qquad (3.20)$$

Следовательно, для системы экспонент $\left\{\mathbf{e}^{ia\pi^2\omega_n t}\right\}$ на отрезке $[0, T]$ справедлива теорема Н. Левинсона, если

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\pi l_1 l_2}{4a\pi^3}, \text{ т. е. } T = \frac{8l_1l_2}{a\pi^2}. \qquad (3.21)$$

Таким образом, на отрезке $[0, T]$ эти системы экспонент образуют базис Рисса в $L_2(0, T)$. Значит, решение проблемы моментов (3.13) в новой форме

$$\int_0^T g_n(t)\mathbf{e}^{ia\pi^2\omega_n t}dt = b_n - ia\pi^2\omega_n a_n, \qquad (3.22)$$

где $g_n = g_{k(n),\, p(n)}(t)$, $\omega_n = \omega_{k(n),\, p(n)}$, $a_n = a_{k(n),\, p(n)}$, $b_n = b_{k(n),\, p(n)}$, представляется в виде

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)(b_n - ia\pi^2\omega_n a_n), \quad (3.23)$$

где $\{\Psi_n(t)\}$ — система биортогональная системе $\left\{\mathbf{e}^{ia\pi^2\omega_n t}\right\}$ в $L_2(0, T)$.

Так же, как и в случае гашения колебаний струны, может быть решена задача гашения колебаний пластины, если управление сосредоточено в произвольном прямоугольнике $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset \Pi$.

Численное решение задачи гашения колебаний прямоугольной пластины

Для получения управляющей функции будем использовать численные методы. Уравнение (3.1) можно привести к системе двух уравнений

$$\begin{cases} u_{tt} = a\Delta v + g(t, x, y); \\ v = -a\Delta u. \end{cases} \qquad (3.24)$$

Начальные и граничные условия для функции v задаются соотношениями

$$v(0, x, y) = -a((h_0)_{xx} + (h_0)_{yy}, v|_\Gamma = 0. \qquad (3.25)$$

Для того чтобы численно решить систему (2.14), построим конечно-разностную схему для приближенного решения. Для этого разобьем рассматриваемую область на прямоугольные ячейки параллельными прямыми $x_m = mh_x$, $m = 0, ..., N_X$, $y_k = kh_y$, $k = 0, ..., N_Y$, $t_n = nh_t$, $n = 0, ..., N_T$, где $h_x = l/N_X$, $h_y = l/N_Y$ и $h_t = T/N_T$.

В результате этих операций мы можем записать следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{m,k}^{n+1} - 2u_{m,k}^{n} + u_{m,k}^{n-1}}{h_t^2} = a\left(\dfrac{v_{m+1,k}^{n} - 2v_{m,k}^{n} + v_{m-1,k}^{n}}{h^2} + \right. \\ \left. + \dfrac{v_{m,k+1}^{n} - 2v_{m,k}^{n} + v_{m,m-1}^{n}}{h^2}\right) + g_{k,m}^{n}; \\ v_{m,k}^{n} = -a\left(\dfrac{u_{m+k,j}^{n} - 2u_{m,k}^{n} + u_{m-1,k}^{n}}{h^2} + \right. \\ \left. + \dfrac{u_{m,k+1}^{n} - 2u_{m,k}^{n} + u_{m,k-1}^{n}}{h_x^2}\right). \end{cases} \qquad (3.26)$$

Схема устойчива по Нейману при условии

$$h_t \leqslant h_x^2 h_y^2/(2a(h_x^2 + h_y^2)). \qquad (3.27)$$

Для решения задачи гашения колебаний будем искать управляющую функцию в виде

$$g(t, x, y) = \\ = w(t)\begin{cases} 1, x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\ \&\ y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta); \\ 0, x \notin (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\ \&\ y \notin (y_0 - \beta, y_0 + \beta), \end{cases} \qquad (3.28)$$

где (x_0, y_0) — центр расположения демпфера на пластине, $w(t) \in L_2(0, T)$, $(\alpha, \beta) \times (\alpha, \beta) \subset \Pi$, и будем использовать метод координатного спуска. Аппроксимируем функцию $w(t)$ кусочно-постоянной функцией: $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ положим $w(t) = w_i$, где w_i — const, $i = \overline{0, N_{T-1}}$. Тогда интеграл энергии (2.4) будет являться функцией переменных $w_0, w_1, ..., w_{N_T}$:

$$E(t) = L(w_0, w_1, ..., w_{N_T}). \qquad (3.29)$$

Оптимальные значения $w_0, w_1, ..., w_{N_T}$, минимизирующие интеграл энергии $E(t)$ с заданной точностью ε, и будут являться искомым решением задачи.

Пример 6. Рассмотрим начальные условия $h_0(x, y) = 0{,}01\sin(\pi x/l_1)\sin(\pi y/l_2)$, $h_1(x, y) = 0$. Входные параметры $h_x = 0{,}1$, $h_y = 0{,}1$, $h_t = 3{,}5355 \cdot 10^{-7}$, $a = 1$, $l_1 = l_2 = 1$, $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5$, $\alpha = \beta = 0$. Условием гашения будем полагать выполнение неравенства $E(t) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}001$. Задача решается за время $T = 0{,}0668$. На рис. 14 изображен процесс гашения в сечении $y = 0{,}5$. При этом управляющая функция $w(t)$, с помощью которой удалось погасить колебания, имеет вид, изображенный на рис. 15.

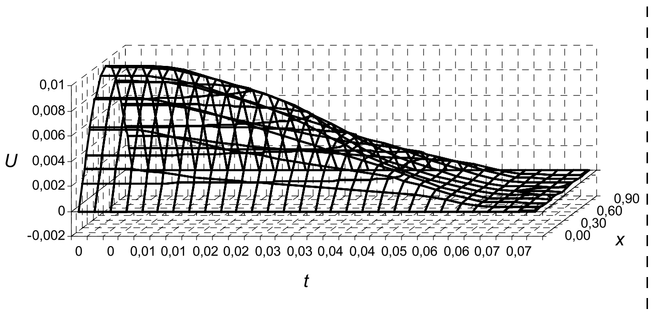

Рис. 14. Процесс колебания в сечении y = 0,5

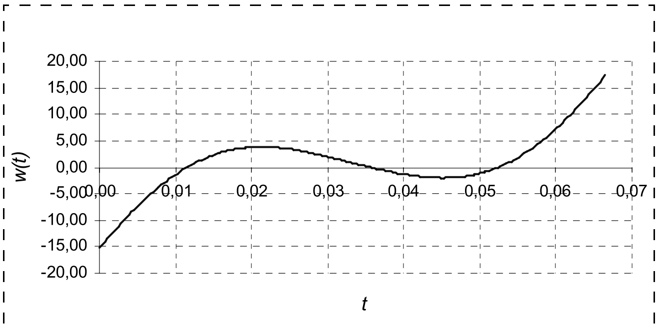

Рис. 15. Управляющая функция $w(t)$

Таким образом, задача гашения колебаний прямоугольной пластины решается за конечное время.

Список литературы

1. **Lagness J.** Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // SIAM Journ. Control and Optim. 1983. Vol. 1, N. 1. P. 68—85.

2. **Lions J. L.** Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system // SIAM Review. 1988. Vol. 30, N. 1. P. 1—68.

3. **Красносельский М. А., Крейн М. Г.** Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // УМН. 1947, 2:3 (19), С. 60—106.

4. **Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.** О некоторых вопросах теории моментов. ДнТВУ, 1938. 256 с.

5. **Ахиезер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, Физматлит, 1966. 544 с.

6. **Ахиезер Н. И.** Классическая проблема моментов. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 314 с.

7. **Levinson N.** Gap and density theorem // Amer. Math. Soc. Colog. Publ. 1940. Vol. 26.

8. **Bellman R**. Almost orthogonal series // Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50.

9. **Russel D.** Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations // SIAM Review. 1978. Vol. 20, N. 5. P. 639—739.

10. **Бутковский А. Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.

11. **Бутковский А. Г.** Приложение некоторых результатов теории чисел к проблеме финитного управления и управляемости в распределенных системах // ДАН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С. 309—311.

12. **Muravey L. A.** On the suppression on membrane oscillations // Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system", Moscow, 1990. P. 50—51.

13. **Muravey L. A.** Mathematical problems on the damp of vibration // Preprint of IFAC Conference "Identification and system parameter estimations". Budapest. 1991. Vol. 1. P. 746—747.

14. **Билалов Б. Т.** О базисности системы $\{e^{i\sigma nx}\sin nx\}$ и экспонент со сдвигом // ДАН РАН. 1995. Т. 345, № 2. С. 644—647.

15. **Билалов Б. Т., Муравей Л. А.** О гашении колебаний больших механических систем // Труды международного симпозиума Intels-96. С.-Петербург. Ч. II. 1996. С. 246—254.

16. **Makmudov A., Muravey L.** The problem of string vibrations damping // Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling, Fethiey, Turkey, 2001. P. 174—182.

17. **Асланов С. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А.** Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 7. С. 28—35.

18. **Атамуратов А. Ж.** О гашении колебаний прямоугольной мембраны // Вестник Тверского государственного университета. Серия Прикладная математика. 2013. № 2. С. 49—59.

The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems

A. G. Atamuratov, goofydog@mail.ru, Pepsico Holding LTD, Moscow, 125315, Russian Federation,
I. E. Mikhailov, mikh_igor@mail.ru✉, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, 119333, Russian Federation,
L. A. Muravey, l_muravey@mail.ru, Moscow Aviation Institute (State Research University), Moscow,121552, Russian Federation

Corresponding author: **Mikhailov Igor E.,** D. Sc., Professor, Leading Researcher, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, 119333, Russian Federation, e-mail: mikh_igor@mail.ru

Received on May 10, 2016
Accepted on May 30, 2016

Methods for damping for oscillations of elements of complex mechanical systems such as strings and membranes began to develop rapidly in the 70s of the last century. The most significant results were obtained by J.-L. Lions, D. Lagnesse, D. Russel, A. Butkovskiy, which dealt with cases of string oscillations (with various types of restraints at the borders) and circular membrane. In this paper we consider the control problem of elastic dynamic systems modeled by partial differential equations of the fourth order, hyperbolic by Petrovsky, which describe, in particular, oscillations in antennas and other elements of space platforms, pipelines, bridge openings. The control problem is to find the minimum time to damp oscillations arisen due to initial perturbation of the system. To solve this problem we derive trigonometric moment problem (infinite system of integral equations of first order for the time component of the control function). We prove the existence of the minimum time and optimal control in case of beams and plates. Wherein time for damping of oscillations and optimal control are given in explicit form. To obtain these results we study the asymptotic behavior of eigenvalues of the corresponding spectral problem by using the classic theorem of N. Levinson (on the basis of the Riesz exponential systems) and Bellman (of almost orthogonal trigonometric systems). Note that the classical solutions of the moment problem presented in the form of infinite series of functions and to obtain the elements of these series is a separate difficult problem. Therefore in order to find the approximate solution we consider the class of control functions such as point moving and slim dampers and build effective numerical methods. Given examples confirm that proposed numerical methods allow us to find solution of problem with sufficient accuracy.

Keywords: *damping of oscillations, trigonometric moment problem, orthogonal systems and Riesz basis, asymptotic moment problem, stationary and moving dampers, reduction method, coordinate descent method*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (№ 16-01-00425 project).

For citation:

Atamuratov A. G., Mikhailov I. E., Muravey L. A. The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 9, pp. 587—598.

DOI: 10.17587/mau.17.587-598

References

1. **Lagness J.** Control of wave process with distributed controls supported on a subregion, *SIAM Journ. Control and Optim*, 1983, vol. 1, no. 1, pp. 68—85.
2. **Lions J. L.** Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system, *SIAM Review*, 1988, vol. 30, no. 1, pp. 1—68.
3. **Krasnoselskiy M. A., Krein M. G.** *Osnovnie teoremi o rashirenii ermitovih operatorov i nekotorie ih primeneiya k teorii ortogonal'nih polinomov i problem momentov* (Fundamental theorems on the extension of Hermitian operators and their applications to the theory of orthogonal polynomials and the problem of moments), *UMN*, 1947, 2:3 (19), pp. 60—106 (in Russian).
4. **Ahiezer N. I., Krein M. G.** *O nekotorih voprosah teorii momentov* (On some questions of the theory of moments), *DnTVU*, 1938, 256 p. (in Russian).
5. **Ahiezer N. I., Glazman I. M.** *Teoriya lineinih operatorov v gilbertovom prostranstve* (The theory of linear operators in Hilbert space), Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1966, 544 p. (in Russian).
6. **Ahiezer N. I.** Klassicheskaya problema momentov, Moscow, Gos Izd fiziko-matematicheskoy literature, 1961, 314 p.
7. **Levinson N**. Gap and density theorem, *Amer. Math. Soc. Colog. Publ.*, 1940, vol. 26.
8. **Bellman R.** Almost orthogonal series, *Amer. Math. Soc.*, 1944, vol. 50.
9. **Russel D.** Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations, *SIAM Review*, 1978, vol. 20, no. 5, pp. 639—739.
10. **Butkovsky A. G.** *Metodi upravleniya sistemami s raspredelyonnimi parametrami* (The methods of controlling the system with distributed parameters), Moscow, Nauka, 1975, 568 p. (in Russian).
11. **Butkovsky A. G.** *Prilozhenie nekotorih rezul'tatov teorii chisel k probleme finitnogo upravleniya i upravlyaemosti v raspredelennih sistemah* (The application of some of the results of number theory to the problem of finite control and controllability of distributed systems), *DAN USSR*, 1976, vol. 227, no. 2, pp. 309—311 (in Russian).
12. **Muravey L. A.** On the suppression on membrane oscillations, *Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system"*, Moscow, 1990, pp. 50—51.
13. **Muravey L. A.** Mathematical problems on the damp of vibration, *Preprint of IFAC Conference "Identification and system parameter estimations"*. Budapest, 1991, vol. 1, pp. 746—747.
14. **Billalov B. T.** O bazisnosti sistemi $\{e^{i\sigma nx}\sin nx\}$ i eksponent so sdvigom (On the basis of the system $\{e^{i\sigma nx}\sin nx\}$ and exponents with a shift), *DAN RAN*, 1995, vol. 345, no. 2, pp. 644—647 (in Russian).
15. **Billalov B. T., Muravey L. A.** *O gashenii kolebanii bolshih mehanicheskih system* (On damping of vibrations of large mechanical systems), *Trudi mezhdunarodnogo simpoziuma Intels-96. St.-Petersburg,* P. II, 1996, pp. 246—254 (in Russian).
16. **Makmudov A., Muravey L.** The problem of string vibrations damping, *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling,* Fethiey, Turkey, 2001, pp. 174—182.
17. **Aslanov S. Zh., Mihailov I. E., Muravey L. A.** *Analiticheskie i chislennie metodi v zadache gasheniya kolebaniy struni tochechnim dempferom* (Analytical and numerical methods in the problem of damping of string vibration by point damper), *Mehatronika, Avtomatizaciya, Upravlenie,* 2006, no. 7, pp. 28—35 (in Russian).
18. **Atamuratov A. Zh.** *O gashenii kolebanii pryamougol'noi membrane* (On vibrations damping of rectangular membrane), *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Prikladnaya matematika,* 2013, no. 2, pp. 49—59 (in Russian).