УДК 521.1, 629 DOI: 10.17587/mau.17.567-575

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц., ChelnokovYuN@gmail.com,
Ю. Н. Челноков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. лаб., ChelnokovYuN@gmail.com,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1

С использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) и принципа максимума Понтрягина изучается задача оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. В первой части статьи приводится обзор работ по дифференциальным уравнениям ориентации орбиты космического аппарата и изучаемой проблеме оптимальной переориентации орбиты КА в инерциальной системе координат посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты КА. Излагается теория решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА в нелинейной непрерывной постановке (с использованием ограниченной (малой) тяги).

Ключевые слова: *космический аппарат, ориентация орбиты, ограниченная (малая) и импульсная (большая) реактивные тяги, оптимальное управление, кватернион*

Введение

В работе с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) и принципа максимума Понтрягина изучается задача оптимальной переориентации орбиты КА с помощью реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Частным случаем этой задачи является хорошо известная и имеющая большое практическое значение задача коррекции угловых элементов орбиты КА, когда изменения угловых элементов орбиты в процессе управления имеют малые значения. Использование управления, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА, позволяет корректировать элементы орбиты КА, сохраняя форму и размеры орбиты КА неизменными. Это ценное свойство изучаемого процесса переориентации орбиты КА является полезным как при решении задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета, например, при управлении конфигурацией группировки спутников.

Комбинированный функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса реактивной тяги, затраченных на процесс управления (частные случаи этого функционала — случай быстродействия и случай минимизации характеристической скорости). Рассмотрены случаи оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги.

Излагается нелинейная теория решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной и импульсной постановках (с использованием ограниченной (малой) или импульсной (большой) тяги). Приводятся алгоритмы численного решения краевых задач оптимальной импульсной переориентации орбиты КА, использующие для описания ориентации орбиты КА кватернионный оскулирующий элемент ориентации орбиты, для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги.

Приводятся и анализируются примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной или импульсной реактивной тягой для различных значений весовых множителей в функционале качества процесса управления. В частности, приводятся примеры численного решения задач в случае минимизации характеристической скорости КА.

Отметим, что при решении задачи оптимальной переориентации орбиты КА в импульсной постановке в соответствии с известной методологией решения задач оптимальных импульсных перелетов КА нами используются кватернионные уравнения и соотношения, полученные в этой задаче с помощью принципа максимума Понтрягина в непрерывной постановке (для ограниченной (малой) тяги), и соответствующие предельные переходы в этих уравнениях. Поэтому в первой части нашей работы предварительно излагается известная кватернионная постановка задачи оптимальной переориентации орбиты КА посредством ограниченной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА, принадлежащая авторам работы, приводятся основные уравнения и соотношения, полученные при решении этой задачи с помощью дифференциальных уравнений, содержащих кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА, и принципа максимума Понтрягина.

В первой части нашей работы приводится также обзор работ по дифференциальным уравнениям ориентации орбиты космического аппарата и изучаемой проблеме оптимальной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты.

Во второй части работы излагается новая теория решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с помощью импульсной (большой) реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Приводятся структура и алгоритмы решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА в импульсной постановке, а также приводятся и анализируются примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной (малой) или импульсной (большой) реактивной тяги.

Дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА и задача оптимальной переориентации орбиты КА

Будем считать, что вектор ускорения $\mathbf{u}^*$ от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости оскулирующей орбиты, т.е. ортогонально радиус-вектору $\mathbf{r}$ и вектору $\mathbf{v}$ скорости центра масс КА (коллинеарно вектору $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ момента скорости центра масс КА). Тогда дифференциальные уравнения движения центра масс КА в ньютоновском гравитационном поле, описывающие изменение размеров и формы мгновенной орбиты КА, интегрируются, давая уравнение конического сечения. Поэтому управляемое движение центра масс КА в этом случае описывается дифференциальными уравнениями, описывающими изменение мгновенной ориентации орбиты КА или используемой (например, орбитальной) вращающейся системы координат, в которой записываются исходные уравнения движения центра масс КА, и дифференциальным уравнением для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите.

Орбита КА в процессе такого управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления $\mathbf{u}^*$ как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА будем рассматривать в инерциальной системе координат X — геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3$ (X) с началом в центре O притяжения Земли. Ось OX_3 этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси OX_1 и OX_2 лежат в плоскости экватора Земли, ось OX_1 направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось OX_2 дополняет систему до правой тройки векторов.

Введем также в рассмотрение систему координат ξ, связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы координат находится в центре O (или в перицентре орбиты), ось ξ_1 направлена вдоль радиуса-вектора перицентра орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора $\mathbf{c}$ момента скорости центра масс КА относительно центра O, а ось ξ_2 образует правую тройку с осями ξ_1 и ξ_3. Ориентация системы координат ξ в инерциальной системе координат X характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и традиционно задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты [1, 2]: долготой восходящего узла Ω_u, наклоном орбиты I и угловым расстоянием перицентра от узла ω_π.

Дифференциальные уравнения, описывающие мгновенную ориентацию орбиты КА в инерциальной системе координат в угловых элементах орбиты в рассматриваемом случае ортогональности вектора реактивной тяги плоскости оскулирующей орбиты КА, имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned}
&d\Omega_u/dt = (r/c)u^*\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{cosec} I,\\
&dI/dt = (r/c)u^*\cos(\omega_\pi + \varphi),\\
&d\omega_\pi/dt = -(r/c)u^*\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{ctg} I,\\
&d\varphi/dt = c/r^2,\ r = p^*/(1 + e\cos\varphi),\ c = \mathrm{const},
\end{aligned} \qquad (1)$$

где φ — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); $r = |\mathbf{r}|$ — модуль радиус-вектора центра масс КА; p^* и e — параметр и эксцентриситет орбиты; $c = |\mathbf{c}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v}$ центра масс КА); u^* — проекция вектора ускорения $\mathbf{u}^*$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости оскулирующей орбиты КА).

Задача переориентации орбиты КА в угловых переменных формулируется следующим образом: требуется построить управление u^*, переводящее орбиту, изменение ориентации которой описывается уравнениями (1), из заданного начального положения

$$\Omega_u = \Omega_u(t_0) = \Omega_u^0,\ I = I(t_0) = I^0,$$
$$\omega_\pi = \omega_\pi(t_0) = \omega_\pi^0,\ I^0 \neq 0,\ \pi$$

в требуемое конечное положение

$$\Omega_u = \Omega_u(t_1) = \Omega_u^*,\ I = I(t_1) = I^*,$$
$$\omega_\pi = \omega_\pi(t_1) = \omega_\pi^*,\ I^* \neq 0,\ \pi.$$

При этом должен минимизироваться выбранный функционал качества процесса переориентации орбиты КА.

Частный случай этой задачи рассматривался в работах Ю. М. Копнина [3], В. Н. Лебедева [4], М. З. Борщевского, М. В. Иословича [5], Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [6], Д. Е. Охоцимского, Ю. Г. Сихарулидзе [7].

В работе В. Н. Лебедева [4] изучался поворот плоскости околоземной круговой орбиты с помощью тяги, нормальной к мгновенной плоскости орбиты, с использованием усредненных уравнений в угловых элементах орбиты.

В работе Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [6] исследовался поворот плоскости круговой орбиты спутника поперечной тягой (тягой, направленной перпендикулярно к мгновенной плоскости орбиты, называемой также в работе [6] "бинормальной тягой"). Для описания движения использованы уравнения (1), записанные в безразмерных переменных и имеющие в наших обозначениях вид (за безразмерными переменными сохранены прежние обозначения размерных переменных)

$$d\Omega_u/dt = u^*\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{cosec}I,$$

$$dI/dt = u^*\cos(\omega_\pi + \varphi),$$

$$d(\omega_\pi + \varphi)/dt = 1 - u^*\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{ctg}I.$$

Задача рассматривалась в предположении, что начальная орбита спутника лежит в плоскости экватора и что требуемый наклон орбиты является малым (поэтому в дальнейшем полагалось $\sin I \approx I$, $\cos I \approx 1$).

В работе Д. Е. Охоцимского, Ю. Г. Сихарулидзе [7] рассматривалась задача поворота плоскости оскулирующей орбиты КА с помощью "бинормальной силы", создающей "бинормальное ускорение", с использованием уравнений для угловых оскулирующих элементов (1). Рассмотрение ограничивается случаем круговой орбиты, который, по словам авторов этой работы, был исследован в работах Ю. М. Копнина [3] и М. З. Борщевского, М. В. Иословича [5]. Анализируется оптимальный в смысле минимизации характеристической скорости поворот плоскости круговой орбиты на угол наклонения орбиты ΔI за неограниченное время. Показывается, что для малых углов поворота ΔI одноимпульсный поворот плоскости орбиты, выполняемый на линии узлов, энергетически эквивалентен повороту плоскости орбиты с помощью "бинормального импульса скорости". Отметим, однако, что поворот орбиты на угол ΔI рассматривается в работе [7] в приближенной постановке с использованием лишь второго уравнения системы (1) для наклонения орбиты.

В статье С. А. Ишкова и В. А. Романенко [8] рассматривается вековое изменение угловых элементов орбиты Ω_u, I, ω_π под действием реактивного ускорения, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА. Эта задача называется в статье задачей коррекции элементов орбиты Ω_u, I, ω_π "бинормальным реактивным ускорением". Предполагается, что КА оснащен электрореактивным двигателем с нерегулируемой тягой, работающим без выключения.

Используемые в статье [8] исходные уравнения движения КА имеют вид уравнений в угловых элементах (1). Для решения задачи авторы статьи переходят в этих уравнениях к новой независимой переменной (истинной аномалии φ) по формуле $dt = (r^2/c)d\varphi$. Полученные уравнения, дополненные уравнением для характеристической скорости v_{ch}, принимают вид [8]

$$d\Omega_u/d\varphi = u^*(p^{*2}/\mu)(1 + e\cos\varphi)^{-3}\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{cosec}I,$$

$$dI/d\varphi = u^*(p^{*2}/\mu)(1 + e\cos\varphi)^{-3}\cos(\omega_\pi + \varphi),$$

$$d\omega_\pi/d\varphi = -u^*(p^{*2}/\mu)(1 + e\cos\varphi)^{-3}\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{ctg}I,$$

$$dv_{ch}/d\varphi = |u^*|(p^{*2}/\mu)^{1/2}(1 + e\cos\varphi)^{-2},$$

где μ — постоянная Гаусса.

Граничные условия маневра коррекции записываются в виде

$$t = t_0 = t(\varphi_0) = 0,\ \Omega_u = \Omega_{u0},$$

$$I = I_0,\ \omega_\pi = \omega_{\pi 0},\ v_{ch} = 0;$$

$$t = t_1 = t(\varphi_1),\ \Omega_u = \Omega_{u1},$$

$$I = I_1,\ \omega_\pi = \omega_{\pi 1},\ v_{ch} = v_{ch1} \to \min.$$

Задача решается с помощью принципа максимума и усреднения уравнений. Из усредненных уравнений получен ряд аналитических соотношений для определения затрат характеристической скорости в частных случаях коррекции одного или двух элементов орбиты (наклона орбиты, долготы восходящего узла) при условии малости изменения наклона орбиты и долготы восходящего узла. По словам авторов статьи [8] уравнения задачи оптимизации в полном объеме не приведены и не проанализированы из-за большой громоздкости уравнений для сопряженных переменных.

Таким образом, решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты, с помощью уравнений (1) в угловых элементах орбиты в строгой нелинейной постановке достаточно сложно в силу нелинейности этих уравнений, наличия в них особых точек $I = 0, \pi$, а также в силу громоздкости уравнений для сопряженных переменных. Поэтому для решения этой задачи оптимальной переориентации орбиты КА вместо угловых элементов орбиты целесообразно использовать [9—16] параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона).

Дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера имеют вид [9—16]

$$2d\Lambda_0/dt = -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2;\ 2d\Lambda_1/dt = \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3;$$

$$2d\Lambda_2/dt = \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3;\ 2d\Lambda_3/dt = \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2; \quad (2)$$

$$d\varphi/dt = c/r^2,\ r = p^*/(1 + e\cos\varphi),\ c = \text{const}; \quad (3)$$

$$\Omega_1 = (r/c)u^*\cos\varphi,\ \Omega_2 = (r/c)u^*\sin\varphi,$$

где Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА (системы координат ξ) в инерциальной системе координат X; Ω_1, Ω_2, $\Omega_3 = 0$ — проекции вектора $\mathbf{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси $O\xi_i$.

Параметры Эйлера Λ_j связаны с угловыми элементами орбиты соотношениями

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= \cos(I/2)\cos((\Omega_u + \omega_\pi)/2), \\
\Lambda_1 &= \sin(I/2)\cos((\Omega_u - \omega_\pi)/2), \\
\Lambda_2 &= \sin(I/2)\sin((\Omega_u - \omega_\pi)/2), \\
\Lambda_3 &= \cos(I/2)\sin((\Omega_u + \omega_\pi)/2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (2) в кватернионной записи принимают вид [9—16]

$$2d\mathbf{\Lambda}/dt = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi,$$
$$\mathbf{\Omega}_\xi = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 = (r/c)u^*(\cos\varphi\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\mathbf{i}_2), \tag{5}$$

где $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3$ — кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $\mathbf{\Omega}_\xi$ — отображение вектора $\mathbf{\Omega}$ на базис ξ (вектор $\mathbf{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты направлен вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс КА и определяется формулой: $\mathbf{\Omega} = (u^*/c)\ \mathbf{r}$); $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; $\circ$ — символ кватернионного умножения.

Отметим, что уравнения (2), (3) или (5), (3) — система пяти нелинейных стационарных дифференциальных уравнений первого порядка относительно параметров Эйлера Λ_j и истинной аномалии φ. Эти уравнения, в отличие от четырех нелинейных дифференциальных уравнений (1) ориентации орбиты в угловых элементах орбиты Ω_u, I, ω_π, не имеют особых точек $I = 0$, π, к тому же при переходе в них от времени t к новой независимой переменной φ в соответствии с дифференциальным соотношением $d\varphi = (c/r^2)dt$ мы получаем (при $u^* = u^*(\varphi)$) систему четырех линейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно параметров Эйлера Λ_j (в то время как дифференциальные уравнения в угловых элементах орбиты остаются существенно нелинейными).

Отметим также, что система уравнений (2), (3) может рассматриваться как нестационарная система дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно переменных Λ_j, так как последнее уравнение (3) в этой системе для истинной аномалии φ интегрируется в квадратурах независимо от других уравнений, в силу чего переменная φ может рассматриваться как известная функция времени t. При таком рассмотрении система уравнения (2) или (5) является (при $u^* = u^*(\varphi)$) линейной дифференциальной системой.

Указанные обстоятельства делают использование уравнений (2), (3) или (5), (3) для решения задач переориентации орбиты и коррекции угловых элементов орбиты более удобным и эффективным в сравнении с использованием уравнений в угловых оскулирующих элементах (1). Такое решение задачи переориентации орбиты КА в непрерывной постановке (с использованием ограниченной (малой) тяги) рассмотрено в работах [17—20]. В них в качестве функционала качества процесса переориентации орбиты КА рассмотрены комбинированный функционал, равный взвешенной сумме времени переориентации и интеграла от квадрата модуля управления, а также комбинированный функционал, равный взвешенной сумме времени переориентации и импульса управления (характеристической скорости) за время переориентации орбиты КА. Получены законы оптимального управления, удовлетворяющие необходимым условиям принципа максимума Понтрягина. Построены условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Сформулированы соответствующие кватернионные дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА с подвижным правым концом траектории, описываемые системами нелинейных (для первого функционала) или линейных (для второго функционала) нестационарных дифференциальных уравнений восьмого порядка, в которых роль независимой переменной играет истинная аномалия (при использовании вместо времени t в качестве независимой переменной истинной аномалии φ из рассмотрения исключается дифференциальное сопряженное уравнение, соответствующее истинной аномалии). Установлены первые интегралы дифференциальных уравнений краевых задач оптимизации, в том числе их кватернионный первый интеграл, существующий для любого (не только оптимального) управления. Отметим, что кватернионное сопряженное уравнение имеет форму кватернионного фазового уравнения (5), что делает дифференциальные уравнения краевых задач компактными и удобными для численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА. В этих работах также приведены примеры численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывных постановках (с использованием ограниченной (малой) тяги), выявлены особенности и закономерности оптимальных траекторий и оптимальных управлений. Приведенные в работе [20] примеры содержат как варианты с минимизацией комбинированных функционалов качества, так и варианты с минимизацией времени (случай быстродействия) или характеристической скорости в отдельности.

Отметим, что исследованию задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке (с использованием двигателя малой тяги) и с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат посвящены работы [13, 14, 21—23]. Использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат более удобно при аналитическом исследовании задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке, так как оно в случае круговой орбиты и постоянного управления является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, в то время как кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА в этом случае является линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Однако использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА имеет преимущество при численном решении задачи оптимальной переориентации орбиты КА, поскольку кватернион ориентации орбиты КА является оскулирующим (медленно изменяющимся) элементом орбиты. Кватернион ориентации орбитальной системы координат таким свойством не обладает, так как является быстро меняющейся переменной.

Кватернионная постановка непрерывной задачи оптимальной переориентации орбиты КА

Ориентация орбиты и движение КА под действием тяги, ортогональной к плоскости орбиты, определяется системой дифференциальных уравнений (3), (5):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \ \frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{r}{c}u^*\mathbf{\Lambda} \circ (\mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi), \quad (6)$$

где по-прежнему u^* — отнесенная к единице массы КА проекция вектора реактивной тяги на ортогональное к орбите направление, которая является управляющим параметром, удовлетворяющим ограничению

$$|u^*| \leqslant u_m^*. \quad (7)$$

В начальный момент времени $t = 0$ ориентация орбиты и положение КА на ней определяются соотношениями

$$\varphi = \varphi_0, \ \mathbf{\Lambda} = \Lambda_0. \quad (8)$$

Ориентация орбиты в конечный момент времени, который заранее не задается, определяется соотношением

$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_k. \quad (9)$$

Качество процесса управления переориентацией орбиты КА определяется функционалом, представляющим собой свертку двух критериев (времени и суммарного импульса тяги) с весовыми множителями α_1, α_2^*:

$$J^* = \int_0^{t_k}(\alpha_1 + \alpha_2^*|u^*|)dt, \ \alpha_1 \geqslant 0, \ \alpha_2^* \geqslant 0. \quad (10)$$

Требуется найти оптимальное управление тягой $u^* = u^*(t)$, удовлетворяющее ограничению (7), которое переводит управляемую систему (6) из начального состояния (8) на многообразие (9) и сообщает функционалу (10) минимальное значение.

Отметим, что при решении задачи оптимальной переориентации орбиты КА в импульсной постановке в соответствии с известной методологией решения задач оптимальных импульсных перелетов КА [24] нами используются кватернионные уравнения и соотношения, полученные в этой задаче с помощью принципа максимума Понтрягина в непрерывной постановке (для ограниченной (малой) тяги), и соответствующие предельные переходы в этих уравнениях. Поэтому в нашей работе предварительно излагаются известная кватернионная постановка задачи оптимальной переориентации орбиты КА посредством ограниченной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА, и основные уравнения и соотношения, полученные при решении этой задачи с помощью дифференциальных уравнений (6), содержащих второе кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА (см. также работы [17—20]).

Безразмерные переменные

Для перехода к безразмерным переменным вводятся масштаб длины $R = p^*$, масштаб силы тяги, отнесенной к массе КА, c^2/R^3; масштаб времени и функционала R^2/c. Безразмерные величины ρ, τ, u, α_2, J связаны с соответствующими размерными величинами r, t, u^*, α_2^*, J^* соотношениями

$$r = R\rho, \ t = \frac{R^2}{c}\tau, \ u^* = \frac{c^2}{R^3}u, \ \alpha_2^* = \frac{R^3}{c^2}\alpha_2, \ J^* = \frac{R^2}{c}J. \quad (11)$$

В безразмерных переменных движение управляемой системы (6) описывается системой уравнений

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = (1 + e\cos\varphi)^2,$$
$$\frac{d\mathbf{\Lambda}}{d\tau} = \frac{u}{2(1 + e\cos\varphi)}\mathbf{\Lambda} \circ (\mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi). \quad (12)$$

На управляющий параметр u согласно (7) и (11) налагается ограничение

$$|u| \leqslant u_m = \frac{u_m^* R^3}{c^2}. \quad (13)$$

Начальное состояние управляемой системы (12) при $\tau = 0$ определяется соотношениями

$$\varphi = \varphi_0, \ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0, \quad (14)$$

а конечное многообразие в пространстве $\varphi \times \mathbf{\Lambda}$, на котором управляемая система (12) должна находиться в конечный незаданный момент времени $\tau = \tau_k$, описывается соотношением

$$\mathrm{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Lambda}_k) = 0, \quad (15)$$

в котором верхняя волна означает сопряженный кватернион, а vect $(\cdots)$ — векторная часть кватерниона, заключенного в круглые скобки.

Четыре компоненты Λ_j кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ удовлетворяют условию нормировки $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$, поэтому краевое кватернионное условие (9), эквивалентное четырем скалярным, заменено на условие (15), эквивалентное трем скалярным. Такая замена повышает эффективность численного решения задачи.

Качество процесса управления, которое в размерных переменных определялось функционалом (10), принимающим минимальное значение для оптимального процесса, в безразмерных переменных определяется значением функционала

$$J = \int_0^{\tau_k} (\alpha_1 + \alpha_2|u|)d\tau. \quad (16)$$

В безразмерных переменных поставленную выше задачу оптимального управления можно сформулировать так: требуется найти оптимальное управление $u = u(\tau)$, удовлетворяющее ограничению (13), которое за незаданный промежуток времени $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_k$ переводит управляемую систему (12) из начального состояния (14) на многообразие (15) и сообщает функционалу (16) минимальное значение.

Решение непрерывной задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина

Функция Гамильтона—Понтрягина H для рассматриваемой задачи оптимального управления определяется по формуле

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2|u|) + \chi(1 + e\cos\varphi)^2 + \\ + \frac{u}{2(1 + e\cos\varphi)}(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda} \circ (\mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi)), \quad (17)$$

где сопряженная скалярная переменная χ, соответствующая скалярной фазовой переменной φ, и сопряженная кватернионная переменная $\mathbf{M}$, соответствующая кватернионной фазовой переменной $\mathbf{\Lambda}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\chi}{d\tau} = 2e\chi(1 + e\cos\varphi)\sin\varphi + \\ + \frac{u}{2(1 + e\cos\varphi)^2}(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda} \circ (\mathbf{i}_1\sin\varphi - \mathbf{i}_2(e + \cos\varphi))), \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\tau} = \frac{u}{2(1 + e\cos\varphi)}\mathbf{M} \circ (\mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi). \quad (19)$$

Здесь и далее $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{scal}((a_0 - \mathbf{a}_v) \circ \mathbf{b})) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, где a_j и b_j — компоненты кватернионов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (a_0 и $\mathbf{a}_v$ — скалярная и векторная части кватерниона $\mathbf{a}$).

Введем новую кватернионную переменную

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{M}, \quad (20)$$

имеющую компоненты

$$N_0 = \Lambda_0M_0 + \Lambda_1M_1 + \Lambda_2M_2 + \Lambda_3M_3;$$
$$N_1 = \Lambda_0M_1 - \Lambda_1M_0 - \Lambda_2M_3 + \Lambda_3M_2;$$
$$N_2 = \Lambda_0M_2 + \Lambda_1M_3 - \Lambda_2M_0 - \Lambda_3M_1;$$
$$N_3 = \Lambda_0M_3 - \Lambda_1M_2 + \Lambda_2M_1 - \Lambda_3M_0.$$

Функция H и уравнение (18), которому удовлетворяет сопряженная переменная χ, примут следующий вид:

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2|u|) + \chi(1 + e\cos\varphi)^2 + \\ + \frac{u}{2(1 + e\cos\varphi)}(N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi), \quad (21)$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = 2e\chi(1 + e\cos\varphi)\sin\varphi + \\ + \frac{u}{2(1 + e\cos\varphi)^2}(N_1\sin\varphi - N_2(e + \cos\varphi)). \quad (22)$$

Из условия максимума для функции H следует, что оптимальное управление определяется через фазовые и сопряженные переменные по формулам

$$u = u_m\mathrm{sign}(N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi),$$
$$\text{если } \frac{|N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi|}{2(1 + e\cos\varphi)} \geqslant \alpha_2,$$
$$u = 0, \text{ если } \frac{|N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi|}{2(1 + e\cos\varphi)} < \alpha_2. \quad (23)$$

Особый режим управления в настоящей работе не рассматривается.

Так как правый конец траектории в фазовом пространстве $\varphi \times \mathbf{\Lambda}$ является подвижным, то в конце движения, т.е. в момент $\tau = \tau_k$, должны выполняться условия трансверсальности [18—20]

$$\chi = 0, \quad (24)$$

$$(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}) = \mathrm{scal}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{M}) = N_0 = 0. \quad (25)$$

Кроме того, так как время окончания движения не задано, то функция H в конце движения должна удовлетворять условию

$$H_{opt}(\tau_k) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, принцип максимума Понтрягина сводит решение задачи о переориентации орбиты к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (12), (19), (22) десятого порядка, в которых оптимальное управление определяется соотношениями (23), с начальными условиями (14) при $\tau = 0$ и условиями (15), (24)—(26) в конце движения.

Из уравнений (12) и структуры оптимального управления (23) следует, что оптимальное управление состоит из активных этапов ($u = \pm u_m$), на которых орбита КА вращается с угловой скоростью, направленной вдоль радиус-вектора КА и равной

$$\frac{u_m}{1 + e\cos\varphi}\,\mathrm{sign}(N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi), \tag{27}$$

и пассивных этапов ($u = 0$), на которых орбита остается неподвижной. Последний этап оптимального управления согласно функционалу (16) может быть только активным.

Так как система уравнений (12) автономная, то согласно условию (26) для оптимального процесса функция Гамильтона—Понтрягина равна нулю во все время движения. Отсюда следует, что на пассивных этапах сопряженная переменная χ согласно (21) определяется по формуле

$$\chi = \frac{\alpha_1}{(1 + e\cos\varphi)^2}. \tag{28}$$

Соотношение (28) для переменной χ на пассивных этапах удовлетворяет уравнению (22). Система уравнений (12), (19) имеет кватернионный первый интеграл [18—20]

$$\mathbf{M} \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{C} = \mathrm{const}, \tag{29}$$

позволяющий перенести условие трансверсальности (25) с правого конца траектории на левый конец.

Используя соотношение (20) и уравнения (12), (19), можно показать, что компоненты N_1, N_2, N_3 кватерниона $\mathbf{N}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_1}{d\tau} = -\frac{u\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi}N_3,\quad \frac{dN_2}{d\tau} = \frac{u\cos\varphi}{1 + e\cos\varphi}N_3,$$

$$\frac{dN_3}{d\tau} = \frac{u}{1 + e\cos\varphi}(N_1\sin\varphi - N_2\cos\varphi). \tag{30}$$

Сопряженную кватернионную переменную $\mathbf{M}$ можно исключить, если вместо нее и кватернионного уравнения (19) в постановке краевой задачи оптимального управления использовать новые переменные N_k ($k = 1, 2, 3$), являющиеся компонентами векторной переменной $\mathbf{N}_v = N_1\mathbf{i}_1 + N_2\mathbf{i}_2 + N_3\mathbf{i}_3$ (т.е. компонентами векторной части кватерниона $\mathbf{N} = N_0 + \mathbf{N}_v$), и систему уравнений (30) для этих переменных. Действительно, скалярная составляющая N_0 кватерниона $\mathbf{N}$ является согласно (29) первым интегралом. В силу условия трансверсальности (25) эта составляющая равна нулю. В выражении для функции Гамильтона—Понтрягина (21), в законе управления (23) и в уравнении (22) для сопряженной переменной χ присутствуют лишь переменные N_1, N_2, которые вместе с переменной N_3 удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (30). Поэтому вместо кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{M}$ в постановке краевой задачи можно использовать векторную переменную $\mathbf{N}_v$, удовлетворяющую согласно (30) векторному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\mathbf{N}_v}{d\tau} = \frac{u}{1 + e\cos\varphi}[\mathbf{N}_v, \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi], \tag{31}$$

в котором $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

В результате решение поставленной задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (12), (22), (31) или (30) девятого порядка, в которых оптимальное управление определяется соотношениями (23), с начальными условиями (14) при $\tau = 0$ и условиями (15), (24), (26) в конце движения. Краевая задача оптимального управления решается нами с помощью комбинации метода Ньютона и метода градиентного спуска.

Результаты численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной тяги, ортогональной к плоскости орбиты, и их сравнение с численным решением задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием импульсной тяги представлены во второй части статьи.

Заключение

В первой части статьи приведен обзор работ по дифференциальным уравнениям ориентации орбиты космического аппарата и изучаемой проблеме оптимальной переориентации орбиты КА в инерциальной системе координат посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты КА. Изложена теория решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием принципа максимума Понтрягина и кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА в нелинейной непрерывной постановке (с использованием ограниченной (малой) тяги).

Частным случаем изучаемой задачи является хорошо известная и имеющая большое практическое значение задача коррекции угловых элементов орбиты КА. Использование указанного управления позволяет изменять элементы орбиты КА, сохраняя форму и размеры орбиты КА в процессе управления движением неизменными. Это ценное свойство изученного процесса переориентации орбиты КА является полезным как при решении задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета.

Список литературы

1. **Дубошин Г. Н.** Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.

2. **Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.** Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.

3. **Копнин Ю. М.** К задаче поворота плоскости орбиты спутника // Космические исследования. 1965. Т. 3, вып. 4.

4. **Лебедев В. Н.** Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.

5. **Борщевский М. З., Иослович М. В.** К задаче о повороте плоскости орбиты спутника при помощи реактивной тяги // Космические исследования. 1969. Т. 7, вып. 6.

6. **Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.** Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 702 с.

7. **Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.** Основы механики космического полета: Учеб. пособие. М.: Наука, 1990. 448 с.

8. **Ишков С. А., Романенко В. А.** Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1997. Т. 35. № 3. С. 287—296.

9. **Челноков Ю. Н.** Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 2 // Космические исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3—15.

10. **Chelnokov Yu. N.** Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. Vol. 31. No. 3, pp. 409—418.

11. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.

12. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 560 с.

13. **Челноков Ю. Н.** Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 897—914.

14. **Chelnokov Yu. N.** Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane, J. Appl. Math. Mech. 76 (6), 646—657 (2012).

15. **Челноков Ю. Н.** Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космические исследования. 2014. Т. 52. № 4. С. 322—336.

16. **Chelnokov Yu. N.** Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II // Cosmic Research, 2014, Vol. 52, No. 4, pp. 304—317.

17. **Ненахов С. В., Челноков Ю. Н.** Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления: Сб. тр. междунар. конф. М.: МАИ, 1998. С. 59—60.

18. **Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н.** Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 185—188.

19. **Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н.** Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Проблемы точной механики и управления: Сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002. С. 64—75.

20. **Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87—95.

21. **Челноков Ю. Н.** Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231—234.

22. **Челноков Ю. Н.** Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата: Кватернионный подход к решению задачи // Проблемы и перспективы прецезионной механики и управления в машиностроении: Материалы междунар. конф. / ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2006. С. 54—60.

23. **Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84—92.

24. **Ильин В. А., Кузмак Г. Е.** Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976. 741 с.

Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 1

Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov, ChelnokovYuN@gmail.com✉,
Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov National Research State University, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: **Chelnokov Yury N.,** D. Sc.,
Head of the Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control,
Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control,
Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS,
Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Received on March 29, 2016
Accepted on April 08, 2016

The paper presents the problem of the optimal reorientation of the spacecraft's orbit by a limited or pulse jet thrust, which is orthogonal to the plane of the osculating orbit, with the help of a quaternion differential equation of the spacecraft (SC) orbit orientation and the Pontryagin maximum principle. This kind of a jet thrust changes orientation of the spacecraft orbits while its shape and size are kept unchanged during the control process. The functional, which defines the quality of the control process, is a weighted convolution of two criteria: time and the total momentum of the jet thrust spent on the control process (special cases of this functional are the quick response problem and the problem of minimizing the characteristic velocity). In the first part of the article the authors present a review of the papers on the differential equations of the spacecraft orbit orientation and the problem of the optimal spacecraft orbit reorientation in the inertial coordinate system by a jet thrust, which is orthogonal to the plane of the osculating orbit of the spacecraft. The authors present the theory of solving the problem of the optimal reorientation of a spacecraft orbit using a quaternion differential equation of the spacecraft orbit orientation in the nonlinear continuous formulation (using a limited (small) thrust).

Keywords: *spacecraft, orbit orientation, limited (small) and impulse (large) jet thrust, optimal control, quaternion*

For citation:

Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 1, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 8, pp. 567—575.

DOI: 10.17587/mau.17.567-575

References

1. **Duboshin G. N.** *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* (Celestial mechanics. Main problems and methods), Moscow, Nauka, 1968, 799 p. (in Russian).

2. **Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebenikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A.** *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike* (Handbook on celestial mechanics and astrodynamics), Moscow, Nauka, 1976, 864 p. (in Russian).

3. **Kopnin Yu. M.** *K zadache povorota ploskosti orbity sputnik* (Handbook on celestial mechanics and astrodynamics), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1965, vol. 3, no. 4 (in Russian).

4. **Lebedev V. N.** *Raschet dvizheniia kosmicheskogo apparata s maloi tiagoi* (On the problem of the rotation of the satellite's orbital plane), Moscow, VC AN SSSR, 1968, 108 p. (in Russian).

5. **Borschevsky M. Z., Ioslovich M. V.** *K zadache o povorote ploskosti orbity sputnika pri pomoshchi reaktivnoi tiagi* (On the problem of the rotation of the satellite's orbital plane with the help of jet thrust), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1969, vol. 7, no. 6 (in Russian).

6. **Grodzovskii G. L., Ivanov Iu. N., Tokarev V. V.** *Mekhanika kosmicheskogo poleta. Problemy optimizatsii* (The mechanics of space flight. Optimization problems), Moscow, Nauka, 1975, 702 p. (in Russian).

7. **Okhotsimskii D. E., Sikharulidze Iu. G.** *Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta* (Basics of space flight mechanics), Moscow, Nauka, 1990. 448 p. (in Russian).

8. **Ishkov S. A., Romanenko V. A.** *Formirovanie i korrektsiia vysokoellipticheskoi orbity sputnika zemli s dvigatelem maloi tiagi* (Forming and correction of a high-elliptical orbit of an Earth satellite with low-thrust engine), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1997, vol. 35, no 3, pp. 287—296 (in Russian).

9. **Chelnokov Yu. N.** *Primenenie kvaternionov v teorii orbital'nogo dvizheniia iskusstvennogo sputnika. Ch. 2* (Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II), *Kosmicheskie Issledovaniya,* 1993, vol. 31, no. 3, pp. 3—15 (in Russian).

10. **Chelnokov Yu. N.** Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II, *Cosmic Research*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 409—418.

11. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* (Quaternion and bi-quaternion models and methods of solid state mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion), Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).

12. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniia dvizheniem* (Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control), Moscow, Fizmatlit, 2011, 560 p. (in Russian).

13. **Chelnokov Yu. N.** *Optimal'naia pereorientatsiia orbity kosmicheskogo apparata posredstvom reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity* (Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane), *Prikladnaia Matematika i Mekhanika*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 897—914 (in Russian).

14. **Chelnokov Yu. N.** Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 646—657.

15. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnaia reguliarizatsiia v nebesnoi mekhanike i astrodinamike i upravlenie traektornym dvizheniem. II* (Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II), *Kosmicheskie Issledovaniya,* 2014, vol. 52, no. 4, pp. 322—336 (in Russian).

16. **Chelnokov Yu. N.** Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II, *Cosmic Research*, 2014, vol. 52, no. 4, pp. 304—317.

17. **Nenakhov S. V., Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniia orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Quaternion solution of a task of an optimal control of spacecraft's orbit orientation), *Bortovye Integrirovannye Kompleksy i Sovremennye Problemy Upravleniia: Sb. tr. mezhdunar. konf.*, Moscow, MAI, 1998, pp. 59—60 (in Russian).

18. **Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of spacecraft's orbit's orientation), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.* Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2001, no. 3, pp. 185—188 (in Russian).

19. **Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of spacecraft's orbit's orientation), *Problemy Tochnoi Mekhaniki i Upravleniia: Sb. nauch. tr. IPTMU RAN*, Saratov, Publishing house of SGTU, 2002, pp. 64—75 (in Russian).

20. **Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Ob odnoi zadache optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata* (About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation), *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 87—95 (in Russian).

21. **Chelnokov Yu. N.** *Optimal'naia pereorientatsiia orbity kosmicheskogo apparata posredstvom reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity* (Optimal reorientation of spacecraft's orbit through thrust orthogonal to the plane of orbit), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.* Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2006, no. 8, pp. 231—234 (in Russian).

22. **Chelnokov Yu. N.** *Optimal'naia pereorientatsiia orbity kosmicheskogo apparata: Kvaternionnyi podkhod k resheniiu zadachi* (Optimal reorientation of spacecraft's orbit. Quaternion approach to solving the problem), *Problemy i perspektivy pretsezionnoi mekhaniki i upravleniia v mashinostroenii: Materialy mezhdunar. konf.*, IPTMU RAN, Saratov, Publishing house of SGTU, 2006, pp. 54—60 (in Russian).

23. **Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Reshenie zadachi optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata s ispol'zovaniem kvaternionnykh uravnenii orientatsii orbital'noi sistemy koordinat* (Solution of a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation using quaternion equations of orbital system of coordinates orientation), *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 1, part 1, pp. 84—92 (in Russian).

24. **Il'in V. A., Kuzmak G. E.** *Optimal'nye perelety kosmicheskikh apparatov s dvigateliami bol'shoi tiagi* (Optimal flights of spacecraft with high-thrust engines), Moscow, Nauka, 1976, 741 p. (in Russian).