

М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., dp940@mail.ru,
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

Об одной задаче оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата

Рассматривается задача оптимального управления пространственной переориентацией космического аппарата (КА) из произвольного начального в заданное конечное угловое положение, когда минимизируемый функционал объединяет время и интегральную величину модуля кинетического момента, затраченные на разворот КА. С использованием необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума и метода кватернионов для решения задач управления движением получено аналитическое решение поставленной задачи. Решение задачи оптимального управления основано на кватернионном дифференциальном уравнении, связывающем вектор кинетического момента КА с кватернионом ориентации связанной системы координат. Представлены формализованные уравнения и даны расчетные выражения для построения оптимальной программы управления. Установлена (в явном виде) зависимость управляющих переменных от фазовых координат. С использованием условия трансверсальности как необходимого условия оптимальности определено оптимальное значение ключевого параметра оптимальных функций. Для динамически симметричного твердого тела задача пространственной переориентации решается до конца: получены как явные функции времени зависимости для оптимального закона изменения кинетического момента КА. Приводятся результаты математического моделирования движения КА при оптимальном управлении, которые демонстрируют практическую реализуемость разработанного алгоритма управления пространственной ориентацией.

Ключевые слова: космический аппарат, ориентация, оптимальное управление, управляющая функция, условия трансверсальности

Проблеме управляемых вращений твердого тела посвящено достаточно много работ [1—10]. Наиболее детально задача оптимального управления угловым движением космического аппарата (КА) решена лишь для двух частных случаев — плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции [2, 3] и пространственного вращения сферически симметричного тела [1, 4]. Вопросы создания эффективных режимов и алгоритмов управления ориентацией КА остаются актуальными и сегодня. Например, КА дистанционного зондирования Земли, мониторинга, а также астрофизические и другие научные КА требуют периодической смены ориентации для наведения научных приборов и целевой аппаратуры на интересующие участки земной поверхности или область небесной сферы. Задача оптимального разворота формулировалась неоднократно, при этом большинство существующих решений соответствуют вращению вокруг неподвижной оси [1, 5—7]. И хотя принципы оптимизации и алгоритмы управления различны (в том числе использующие прогнозирующие модели [5, 6]), результирующее управление приводит к развороту вокруг оси Эйлера. В то же время разворот в плоскости наименьшего угла разворота во многих практических случаях не является оптимальным, как бы точно он не исполнялся.

Ниже исследуется задача управления ориентацией КА, когда управляющей функцией является

вектор кинетического момента КА (как твердого тела). Такие задачи представляют не только теоретический, но и практический интерес в связи с широким распространением систем управления пространственной ориентацией КА, использующих управляющие силовые гироскопы (или двигатели-маховики) [3]. Для построения такого типа систем необходимо знание оптимальных в том или ином смысле программных законов изменения кинетического момента КА, позволяющих эффективно исполнять режим переориентации.

Уравнения движения и постановка задачи управления

Под пространственной переориентацией понимают перевод связанных осей КА из одного известного углового положения в другое известное (обычно заданное) угловое положение за конечное время T . Для описания пространственного движения КА используем формализм кватернионов (параметров Родрига — Гамильтона). Движение связанного базиса E (связанной системы координат), образованного главными центральными осями инерции КА, относительно опорного базиса I будем задавать кватернионом Λ [1]. Угловое положение начальной и конечной ориентации КА относительно опорного базиса I определяется кватернионами Λ_H и Λ_K соответственно. Для определенности базис I считается

инерциальным, и имеют место следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1 L_1/J_1 - \lambda_2 L_2/J_2 - \lambda_3 L_3/J_3; \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0 L_1/J_1 + \lambda_2 L_3/J_3 - \lambda_3 L_2/J_2; \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0 L_2/J_2 + \lambda_3 L_1/J_1 - \lambda_1 L_3/J_3; \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0 L_3/J_3 + \lambda_1 L_2/J_2 - \lambda_2 L_1/J_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где L_i ($i = \overline{1, 3}$) — проекции вектора $\mathbf{L}$ кинетического момента КА на оси связанного базиса $\mathbf{E}$; J_i — главные центральные моменты инерции КА; λ_j ($j = \overline{0, 3}$) — компоненты кватерниона Λ , причем $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Кватернион Λ , задающий текущую ориентацию КА, принят нормированным [1] для удобства ($\|\Lambda\| = 1$). Зададим граничные условия маневра пространственного разворота:

$$\Lambda(0) = \Lambda_H; \quad (2)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_K, \quad (3)$$

где T — время окончания процесса переориентации.

Кватернионы Λ_H и Λ_K , задающие ориентацию КА в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию $\|\Lambda_H\| = \|\Lambda_K\| = 1$ (предполагается, что $\Lambda_K \neq \pm \Lambda_H$). Эффективность управления будем оценивать интегральным функционалом качества

$$G = \int_0^T (a_1 + a_2 |\mathbf{L}|) dt, \quad (4)$$

где $a_1, a_2 > 0$ — постоянные коэффициенты.

Задачу управления сформулируем следующим образом: необходимо перевести КА из положения (2) в положение (3) в соответствии с уравнениями (1) с минимальным значением функционала (4); при этом время разворота T не фиксировано (оно также подлежит оптимизации и определяется одновременно со значением G). При определении оптимального по критерию (4) закона движения считается, что $\mathbf{L}(t)$ — кусочно-непрерывная функция времени.

Данная задача достаточно актуальна (в том числе для КА, оборудованных силовыми гироскопами — гироскопами или двигателями-маховиками). Задачи оптимального управления ориентацией КА с использованием комбинированных критериев оптимальности исследовались и раньше [4, 8]. Но в отличие от известных работ исследуемая в статье задача оптимального управления разворотом решена применительно к произвольному КА (т.е. когда для формы эллипсоида инерции КА ограничения отсутствуют).

Решение задачи оптимального управления

Значение функционала оптимальности (4) в явном виде не зависит от момента $\mathbf{M}$ управляющих сил (выражение (4) не содержит составляющих M_j). Поэтому управляющими переменными принимаем компоненты кинетического момента L_i . Наличие фазового ограничения $\|\Lambda\| = 1$ несущественно, так как оно всегда выполняется (при любых движениях КА вокруг центра масс). Переменные λ_j (как компоненты кватерниона Λ) обладают характерным свойством — в силу уравнений (1) норма $\|\Lambda\|$ кватерниона Λ есть величина постоянная: $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{const}$. В начальный момент времени $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_H\| = 1$, поэтому $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$.

Будем решать поставленную задачу, используя принцип максимума Л. С. Понтрягина [11]. Введем сопряженные переменные ψ_j ($j = \overline{0, 3}$), соответствующие компонентам кватерниона λ_j . Функция Гамильтона H имеет вид:

$$\begin{aligned} H &= -0,5\psi_0(\lambda_1 L_1/J_1 + \lambda_2 L_2/J_2 + \lambda_3 L_3/J_3) + \\ &+ 0,5\psi_1(\lambda_0 L_1/J_1 + \lambda_2 L_3/J_3 - \lambda_3 L_2/J_2) + \\ &+ 0,5\psi_2(\lambda_0 L_2/J_2 + \lambda_3 L_1/J_1 - \lambda_1 L_3/J_3) + \\ &+ 0,5\psi_3(\lambda_0 L_3/J_3 + \lambda_1 L_2/J_2 - \lambda_2 L_1/J_1) - a_1 - a_2 |\mathbf{L}|. \end{aligned}$$

Уравнения для сопряженных функций ψ_j имеют следующий вид [11]:

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \quad (j = \overline{0, 3}).$$

Запишем сопряженную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= -0,5(\psi_1 L_1/J_1 + \psi_2 L_2/J_2 + \psi_3 L_3/J_3); \\ \dot{\psi}_1 &= 0,5(\psi_0 L_1/J_1 + \psi_2 L_3/J_3 - \psi_3 L_2/J_2); \\ \dot{\psi}_2 &= 0,5(\psi_0 L_2/J_2 + \psi_3 L_1/J_1 - \psi_1 L_3/J_3); \\ \dot{\psi}_3 &= 0,5(\psi_0 L_3/J_3 + \psi_1 L_2/J_2 - \psi_2 L_1/J_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Функция Гамильтона H составлена без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ для фазовых переменных, так как предполагается $\|\Lambda(0)\| = 1$. Сгруппировав в выражении для H слагаемые, содержащие фазовые переменные λ_j , и выделив в них в явном виде множители при управляющих переменных L_i , получим

$$H = L_1 r_1/J_1 + L_2 r_2/J_2 + L_3 r_3/J_3 - a_1 - a_2 |\mathbf{L}|,$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,5(\lambda_0 \psi_1 + \lambda_3 \psi_2 - \lambda_1 \psi_0 - \lambda_2 \psi_3); \\ r_2 &= 0,5(\lambda_0 \psi_2 + \lambda_1 \psi_3 - \lambda_2 \psi_0 - \lambda_3 \psi_1); \\ r_3 &= 0,5(\lambda_0 \psi_3 + \lambda_2 \psi_1 - \lambda_3 \psi_0 - \lambda_1 \psi_2). \end{aligned}$$

Полагаем, что r_1, r_2, r_3 есть проекции некоторого вектора $\mathbf{r}$ на оси связанного базиса $\mathbf{E}$. Система (5) идентична системе (1). Поэтому совокупность переменных $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ обладает свойствами ква-

тернионов. Принимаем, что сопряженные переменные $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ являются компонентами кватерниона Ψ , у которого ψ_0 — скалярная часть; ψ_1, ψ_2, ψ_3 — компоненты векторной части. Тогда введенный выше вектор $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$ запишем в кватернионной форме:

$$\mathbf{r} = 0,5\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi).$$

Так как уравнения (1) для кватерниона Λ и уравнения (5) для кватерниона Ψ являются кинематическими уравнениями для одного и того же кинетического момента $\mathbf{L}$, то оптимальные функции $\Psi(t)$ и $\Lambda(t)$ отличаются на постоянный кватернионный множитель ($\Psi(t)$ и $\Lambda(t)$ подчиняются правилу $\Psi \circ \tilde{\Lambda} = \text{const} = C_E$).

Для того чтобы $\mathbf{r}(t) \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\text{vect} C_E \neq 0$. В противном случае $\mathbf{r} \equiv 0$, и решение задачи теряет смысл. Поэтому при нахождении оптимального управления считается, что функции ψ_j не пропорциональны переменным λ_j , и рассматривается только вариант $\mathbf{r} \neq 0$. Дифференцируя по времени выражения для r_i ($i = \overline{1, 3}$) с учетом уравнений (1), (5) для функций λ_j и ψ_j ($j = \overline{0, 3}$), получим дифференциальные уравнения для компонент r_i вектора $\mathbf{r}$ (как функций времени). Оптимальное изменение вектора $\mathbf{r}$ определяется решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= L_3 r_2 / J_3 - L_2 r_3 / J_2; \quad \dot{r}_2 = L_1 r_3 / J_1 - L_3 r_1 / J_3; \\ \dot{r}_3 &= L_2 r_1 / J_2 - L_1 r_2 / J_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Имея в виду зависимости $L_i = J_i \omega_i$, где ω_i ($i = \overline{1, 3}$) — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса $\mathbf{E}$, перепишем уравнения (6) в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7)$$

(символ $\times$ обозначает операцию векторного произведения векторов).

Полученное дифференциальное уравнение (7) для вектора $\mathbf{r}$ отражает его вращение с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$ относительно связанного базиса $\mathbf{E}$. В свою очередь, сам связанный базис $\mathbf{E}$ совершает угловое движение относительно опорного базиса $\mathbf{I}$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В результате вектор $\mathbf{r}$ оказывается неподвижным относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$ (в соответствии с теоремой сложения скоростей). Как следствие, $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$.

Задача определения оптимального управления сводится к решению системы уравнений углового движения КА (1) и уравнений (6) при условии, что само управление выбрано из требования максимизации гамильтониана. Система уравнений (6) заменяет сопряженную систему уравнений (5). Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (6) определяется начальным Λ_n и ко-

нечным Λ_k положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda,$$

где $\mathbf{c}_E = \Lambda_n \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_n = \text{const}$, причем $\mathbf{c}_E = 0,5\text{vect} C_E = 0,5\text{vect}(\Psi \circ \tilde{\Lambda})$, а составляющие вектора $\mathbf{c}_E$ — проекции вектора $\mathbf{r}$ на оси инерциального базиса $\mathbf{I}$. Система (6) совместно с требованием максимальной гамильтониана H являются необходимыми условиями оптимальности. Условия максимума функции H определяют искомое решение $\mathbf{L}(t)$; граничные условия по положению $\Lambda(0)$ и $\Lambda(T)$ определяют решения $\Lambda(t)$ и $\mathbf{r}(t)$.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении значения $\mathbf{r}(0)$ (или кватерниона $\Psi(0)$), при котором решение системы дифференциальных уравнений (1), (6) с одновременной максимизацией в каждый момент времени функции Гамильтона H удовлетворяет условиям разворота (2), (3).

Оптимальные сопряженные переменные должны удовлетворять условиям трансверсальности. Так как решаемая задача управления движением КА — это задача оптимального управления с закрепленными левым и правым концами траектории $\Lambda(t)$, то условия трансверсальности, которые присутствуют при решении задач оптимального управления с фиксированным временем T , выполняются автоматически. Поясним это. Представим граничное условие (2) в форме равенств $\lambda_j(0) - \lambda_{j_n} = 0$ для всех $j = \overline{0, 3}$; условия трансверсальности для сопряженных переменных ψ_j на момент времени $t = 0$ имеют вид [12]: $\psi_j(0) = w_j, j = \overline{0, 3}$, где w_0, w_1, w_2, w_3 — некоторые числа, одновременно не равные нулю. Очевидно, что для оптимального решения эти условия удовлетворяются (в противном случае сопряженные функции $\psi_j(t) \equiv 0$ в силу уравнений (5), и решение задачи оптимального управления теряет смысл). Записав граничное условие (3) в форме $\lambda_j(T) - \lambda_{j_k} = 0$ ($j = \overline{0, 3}$), получим аналогичные условия трансверсальности для сопряженных переменных ψ_j на момент времени $t = T$: $\psi_j(T) = z_j, j = \overline{0, 3}$, где хотя бы одно из чисел z_j отлично от нуля. Сопряженные функции $\psi_j(t)$ являются решением системы (5), поэтому $\|\Psi\| = \psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = \text{const}$ (это легко доказать). Поскольку $\|\Psi(0)\| \neq 0$, то $\|\Psi(T)\| \neq 0$; а значит, вышеуказанные условия трансверсальности для оптимальных функций $\psi_j(t)$ будут выполнены. Так как в рассматриваемой задаче оптимального управления время окончания маневра T не фиксировано, то необходимо выполнение еще одного условия трансверсальности [12]: $H(T) = 0$ (если граничное условие (3) для правого конца представ-

вить в виде $\Phi_j = 0, j = \overline{0, 3}$, где $\Phi_j = \lambda_j(T) - \lambda_{j_k}$, то $\partial\Phi_j/\partial T \equiv 0$ для всех j).

Для построения управляющей функции $\mathbf{L}(t)$ (оптимальной программы управления) и оптимального сопряженного вектора $\mathbf{r}$ введем вектор $\mathbf{l}$ такой, что $|\mathbf{l}| = 1$ и $\mathbf{L} = K\mathbf{l}$, где $K > 0$ — скалярная функция времени. Для новых переменных K и l_i ($i = \overline{1, 3}$) функция Гамильтона H запишется в следующем виде:

$$H = hK - a_1,$$

где $h = l_1 r_1/J_1 + l_2 r_2/J_2 + l_3 r_3/J_3 - a_2$.

Необходимое условие оптимальности заключается в максимальности функции Гамильтона H . Произведение hK максимально, если максимальны каждый из множителей h и K (естественно, при этом величины h и K являются неотрицательными). Нетрудно видеть, что сумма h максимальна, если

$$l_i = \frac{r_i}{J_i \sqrt{r_1^2/J_1^2 + r_2^2/J_2^2 + r_3^2/J_3^2}}, i = \overline{1, 3}.$$

Поскольку оптимальные управляющие функции L_i не зависят от $|\mathbf{r}|$, удобнее перейти к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Обозначим $r_0 = |\mathbf{r}|$. В силу того, что $|\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$, для проекций p_i орта $\mathbf{p}$ на оси связанного базиса $\mathbf{E}$ справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= L_3 p_2/J_3 - L_2 p_3/J_2, \dot{p}_2 = L_1 p_3/J_1 - L_3 p_1/J_3, \\ \dot{p}_3 &= L_2 p_1/J_2 - L_1 p_2/J_1. \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем будем использовать компоненты p_i вектора $\mathbf{p}$; переменные $r_i = r_0 p_i$, где r_0 — константа, которую необходимо определить в процессе оптимизации. Необходимое условие оптимальности запишем в виде

$$L_i = b p_i/J_i, \quad (9)$$

где $b > 0$ — скалярная величина. Кинетический момент $\mathbf{L}$ и величина b связаны соотношением

$$\mathbf{L}^2 = b^2(p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2).$$

Покажем, что при соблюдении равенств (9) для всех t ($0 \leq t \leq T$) имеет место равенство:

$$p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2 = \text{const}.$$

Для этого достаточно продифференцировать по времени левую часть указанного равенства с учетом свойств движения вектора $\mathbf{p}$. Используя соотношения (8) для производных компонент p_i векто-

ра $\mathbf{p}$, а затем формулы (9), для компонент L_i кинетического момента $\mathbf{L}$, получим

$$\begin{aligned} p_1 \dot{p}_1/J_1^2 + p_2 \dot{p}_2/J_2^2 + p_3 \dot{p}_3/J_3^2 &= \\ &= p_1(p_2 L_3/J_3 - p_3 L_2/J_2)/J_1^2 + \\ &+ p_2(p_3 L_1/J_1 - p_1 L_3/J_3)/J_2^2 + \\ &+ p_3(p_1 L_2/J_2 - p_2 L_1/J_1)/J_3^2 = \\ &= p_3 L_1 p_2/J_3^2 J_1 - p_1 p_3 L_2/J_1^2 J_2 + p_1 L_2 p_3/J_1^2 J_2 - \\ &- p_2 p_1 L_3/J_2^2 J_3 + p_2 L_3 p_1/J_2^2 J_3 - p_3 p_2 L_1/J_3^2 J_1 \equiv 0 \end{aligned}$$

так как $(L_1 p_2/J_2) p_3/J_1 J_2 = p_1 p_3 L_2/J_1^2 J_2$, $(L_2 p_3/J_3) p_1/J_2 J_3 =$
 $= p_1 p_2 L_3/J_2^2 J_3$, $(L_3 p_1/J_1) p_2/J_1 J_3 = p_2 p_3 L_1/J_3^2 J_1$ (равенства $L_1 p_2/J_2 = L_2 p_1/J_1$, $L_2 p_3/J_3 = L_3 p_2/J_2$, $L_1 p_3/J_3 = L_3 p_1/J_1$ являются следствием соотношений (9)). Значит $h = \text{const}$ независимо от изменения величины b .

Если $a_1 = 0$, то из-за наличия условия трансверсальности $H(T) = 0$ оптимальное управление должно обеспечить максимум $h \equiv 0$ при произвольном изменении величины K , тождественно не равной нулю, чтобы можно было выполнить граничное условие (3) (в случае $a_1 = 0$ максимум функции H , а следовательно, и значение минимизируемого функционала (4) не зависят от функции $K(t)$).

Если $a_1 \neq 0$, то функция H есть линейная возрастающая функция величины K (соответствующим выбором оптимального значения $|\mathbf{r}|$ всегда можно добиться, чтобы $h > 0$). Очевидно, что если вектор $\mathbf{L}$ не ограничить, то максимум функции H будет при $K \rightarrow \infty$ (при этом время T станет бесконечно малым). Но мгновенных разворотов не бывает. Обычно кинетический момент $\mathbf{L}$ ограничивают сферой, т.е. требованием

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \leq L_0^2, \quad (10)$$

где $L_0 > 0$ — максимально допустимый модуль кинетического момента (ограничение в форме (10) достаточно актуально для КА, управляемых инерционными исполнительными органами [9]).

В случае $a_1 \neq 0$ и $|\mathbf{L}| \leq L_0$ максимум функции H будет достигнут при $|\mathbf{L}| = L_0$ и в случае, если $h \rightarrow \max$ (при наличии ограничения (10) оптимальный модуль кинетического момента K не зависит от l_i). Поэтому оптимальные функции L_i определяются зависимостями

$$L_i = \frac{L_0 p_i}{J_i \sqrt{p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2}}, i = \overline{1, 3}. \quad (11)$$

Задача определения оптимального управления свелась к решению системы уравнений углового движения КА (1) и уравнений (8) при условии, что управление $\mathbf{L}$ выбрано в соответствии с (11). Сфор-

мулированная задача управления (1)–(4) решается до конца. Условия максимума функции H определили оптимальное решение $\mathbf{L}(t)$. На всем интервале движения $0 < t < T$ КА вращается с постоянным по модулю кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = \text{const}$, поэтому во время оптимального разворота величина $b = \text{const}$. Уравнения (1) и (8) совместно с соотношениями (9) образуют замкнутую систему уравнений. Для получения функциональной зависимости управляющих функций $L_i(t)$ от фазовых координат необходимо решить уравнения (8), которые для закона (9) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= b \frac{J_2^2 - J_3^2}{J_2^2 J_3^2} p_2 p_3; \quad \dot{p}_2 = b \frac{J_3^2 - J_1^2}{J_1^2 J_3^2} p_1 p_3; \\ \dot{p}_3 &= b \frac{J_1^2 - J_2^2}{J_1^2 J_2^2} p_1 p_2,\end{aligned}\quad (12)$$

где $b = L_0 / \sqrt{p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2} = \text{const}$. Траектория движения вектора $\mathbf{p}$ в связанной системе координат определяется системой двух уравнений:

$$\begin{aligned}p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1 \\ \text{и } (p_1/J_1)^2 + (p_2/J_2)^2 + (p_3/J_3)^2 &= \text{const} = C^2,\end{aligned}$$

где $C = \sqrt{(p_{10}/J_1)^2 + (p_{20}/J_2)^2 + (p_{30}/J_3)^2}$; p_{10}, p_{20}, p_{30} — компоненты вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Траектория, по которой передвигается конец вектора $\mathbf{p}$ при вращении КА в процессе маневра переориентации, представляет собой линию пересечения единичной сферы с эллипсоидом, имеющим полуоси размера $J_1 C, J_2 C, J_3 C$ по осям OX, OY, OZ соответственно. Размер эллипсоида определяется требованием прохождения линии пересечения через векторы $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны между собой посредством граничных условий $\Lambda(0) = \Lambda_H$ и $\Lambda(T) = \Lambda_K$:

$$\Lambda_K \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_K = \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H \quad (13)$$

или $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_p \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_p$, где $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K$ — кватернион разворота. Значение параметра C зависит от вектора $\mathbf{p}(0)$, который, в свою очередь, определяется граничными значениями $\Lambda(0), \Lambda(T)$ и моментами инерции КА J_1, J_2, J_3 . Определение вектора $\mathbf{p}(0)$ — самостоятельная и достаточно непростая задача.

Так как время T не фиксировано, то необходимым условием оптимальности является требование $H(T) = 0$, из которого следует, что $h = a_1/|\mathbf{L}| > 0$ (далее всюду считается, что $a_1 \neq 0$). Исходя из этого условия выбирается оптимальное значение r_0 . При оп-

тимальном движении (в смысле минимума (4)) функция H постоянна и равна

$$H = L_0(r_0 \sqrt{p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2} - a_2) - a_1 = \text{const}.$$

Решив уравнение

$$r_0 \sqrt{p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2} - a_2 = a_1/L_0,$$

получим $r_0 = (a_1/L_0 + a_2)/C$ — оптимальное значение характеристики $r_0 = |\mathbf{r}|$.

Таким образом, задача построения оптимального управления $\mathbf{L}(t)$ заключается, главным образом, в нахождении такого значения вектора $\mathbf{p}(0)$, при котором в результате движения КА в соответствии с уравнениями (1), (8), (9) и $\Lambda(0) = \Lambda_H$ выполняется равенство $\Lambda(T) = \Lambda_K$. Общее решение приведенной системы уравнений определить практически невозможно. Трудность заключается в определении граничных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны выражением (13).

Режим движения КА в соответствии с условиями (8), (11) таков, что в интервале времени $0 < t < T$ КА вращается с постоянным модулем кинетического момента. Искомое решение $\mathbf{L}(t)$ во время оптимального разворота обладает следующими свойствами (интегралами движения):

$$\begin{aligned}L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 &= \text{const}; \\ J_1^2 L_1^2 + J_2^2 L_2^2 + J_3^2 L_3^2 &= \text{const}.\end{aligned}\quad (14)$$

Задача оптимального управления (1)–(4) с учетом ограничения (10) будет решена, если мы найдем решение системы уравнений (1), (8), (11), удовлетворяющее граничным условиям (2), (3). Оптимальный кинетический момент $\mathbf{L}$ связан с кватернионом ориентации Λ равенством

$$\mathbf{L} = \mathcal{J}^{-1} L_0 \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda / C, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_p &= \text{const} = \Lambda_H \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_H; \\ C &= \sqrt{p_{10}^2/J_1^2 + p_{20}^2/J_2^2 + p_{30}^2/J_3^2}\end{aligned}$$

(напомним $p_{i0} = p_i(0)$); $\mathcal{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — тензор инерции КА. Ключевой искомой характеристикой является значение вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$. Уравнения для управляющих функций L_i формализуются так:

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= L_2 L_3 (J_2^2 - J_3^2) / J_1 J_2 J_3; \\ \dot{L}_2 &= L_1 L_3 (J_3^2 - J_1^2) / J_1 J_2 J_3; \\ \dot{L}_3 &= L_1 L_2 (J_1^2 - J_2^2) / J_1 J_2 J_3.\end{aligned}\quad (16)$$

Поскольку управлением считается вектор $\mathbf{L}$ кинетического момента КА, то поставленную задачу оптимального управления (кинематическую задачу разворота) можно считать решенной — уравнения (1), (8) и (9) с учетом граничных условий (2), (3) полностью определяют искомое решение $\mathbf{L}(t)$.

Нетрудно показать, что для вращений твердого тела, удовлетворяющих зависимостям (9), в которых $b > 0$ — скалярная величина, а функции p_i являются решением системы (8) с удовлетворением условия (13), значение интеграла

$$S = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt$$

не зависит от длительности разворота T и равно

$$\int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = K_c t_{\text{пр}},$$

где $t_{\text{пр}}$ — прогнозируемое время достижения положения Λ_K (т.е. когда выполнится равенство $\Lambda = \Lambda_K$) при вращении твердого тела с кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = K_c$ из положения $\Lambda(0) = \Lambda_H$ в соответствии со свойствами (14) и уравнениями (1). Характеристика S определяется только условиями разворота Λ_H, Λ_K и инерционными характеристиками КА J_1, J_2, J_3 .

Так как при оптимальном управлении (в смысле минимума (4)) разворот КА (как твердого тела) происходит с постоянным модулем кинетического момента $|\mathbf{L}| = \text{const} = L_0$, то $G = S(a_1/L_0 + a_2)$, где $S = K_c t_{\text{пр}}$. Значение показателя (4) и время разворота T связаны соотношением $G = T(a_1 + a_2 L_0)$. Время оптимального разворота равно $T_{\text{опт}} = K_c t_{\text{пр}}/L_0$. Для вращений, которые обеспечивают минимум интеграла (4), время разворота T минимально (если $a_1 \neq 0$).

Если $a_1 = 0$, то величина $|\mathbf{L}|$ — любая (модуль кинетического момента КА может изменяться произвольным образом, не меняя при этом значение функционала (4), если удовлетворяются соотношения (9) с учетом уравнений (8) для переменных p_i).

Построение оптимальной программы пространственного разворота

Задача построения оптимального управления сводится к нахождению закона изменения вектора $\mathbf{p}(t)$, при котором в результате движения КА согласно уравнениям (1), (8), (9) с начальным условием (2) было выполнено граничное условие (3). Вектор $\mathbf{p}(0)$ зависит от параметров разворота Λ_p и моментов инерции КА J_1, J_2, J_3 . Для произвольных значений $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ решение поставленной задачи пространственного разворота КА найти достаточно сложно. Система уравнений (1), (8), (9) имеет аналитическое решение в элементарных функциях только для динамически симметричного и динами-

чески сферического тел (для произвольного КА решение системы уравнений (1), (8), (9) находится только численными методами, например, методом последовательных приближений).

Для сферически симметричного КА (когда $J_1 = J_2 = J_3$) решение задачи (1)–(4) значительно упрощается. В этом случае уравнения (12) принимают вид $\dot{p}_i = 0$ ($i = \overline{1, 3}$), откуда оптимальным является вектор $\mathbf{p} = \text{const} = \mathbf{p}_0$. Кинематические уравнения (1) также приводятся к более простой форме $2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}/J_1$. Учитывая условия оптимальности (11), которые будут выглядеть как $\mathbf{L} = L_0 \mathbf{p}_0$, приходим к выводу, что для КА, у которого $J_1 = J_2 = J_3$, оптимальным разворотом (в смысле минимума (4) с учетом (10)) является вращение вокруг оси Эйлера в направлении наименьшего угла поворота из положения Λ_H в положение Λ_K , причем оптимальный вектор $\mathbf{p}$ совпадает с ортом положительного направления оси Эйлера. Решение задачи (1)–(4), (10) имеет следующий вид:

$$p_i = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2};$$

$$L_i = L_0 v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = L_0 p_{i0},$$

где v_0, v_1, v_2, v_3 — компоненты кватерниона разворота $\Lambda_p = \Lambda_H \circ \Lambda_K$.

Для динамически симметричного КА (когда, например, $J_2 = J_3$) задача оптимального управления также решается до конца. В этом частном случае решение системы (8), (11) находится в форме регулярной прецессии, для которой справедливо соотношение

$$\Lambda_K = \Lambda_H \circ \mathbf{e}^{\mathbf{p}_0 \beta / 2} \circ \mathbf{e}^{\mathbf{e}_1 \alpha / 2}, \quad (17)$$

где $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$; $\mathbf{e}_1$ — орт продольной оси КА; α — угол поворота КА вокруг своей продольной оси; β — угол поворота КА вокруг вектора $\mathbf{p}$. При этом считается, что $|\alpha| \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$.

Из (12) и (16) имеем: $p_1 = \text{const}$ и $L_1 = \text{const}$. Решение $\mathbf{p}(t)$ будет следующим:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa,$$

$$p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa,$$

а программные значения управляющих функций L_i ($i = \overline{1, 3}$) равны

$$L_1 = L_{10} = J_1(\dot{\alpha} + \dot{\beta} p_{10}) = \text{const};$$

$$L_2 = J_2 \dot{\beta} p_2, \quad L_3 = J_3 \dot{\beta} p_3 \quad \text{или}$$

$$L_1 = J_1(\dot{\alpha} + \dot{\beta} \cos \vartheta), \quad L_2 = J_2 \dot{\beta} \sin \vartheta \sin(\dot{\alpha} t + \sigma_0);$$

$$L_3 = J_2 \dot{\beta} \sin \vartheta \cos(\dot{\alpha} t + \sigma_0),$$

где $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$, $\kappa = \dot{\alpha} t$ ($\dot{\alpha} = \text{const}$ — скорость собственного вращения); ϑ — угол отклонения продоль-

ной оси КА от вектора $\mathbf{p}$; $\sigma_0 = \arctg(p_{20}/p_{30})$; $\dot{\beta}$ — угловая скорость прецессии (вокруг вектора $\mathbf{p}$). Угловые скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ равны

$$\dot{\alpha} = \alpha/T, \quad \dot{\beta} = \beta/T \text{ (так как } |\mathbf{L}| = \text{const,} \\ \text{а значит, } \dot{\alpha} = \text{const и } \dot{\beta} = \text{const).}$$

Оптимизация в этом частном случае сводится к нахождению таких значений ϑ , α , β и $\mathbf{p}_0$, удовлетворяющих условиям разворота (2), (3), чтобы (4) было минимальным. Когда КА совершает регулярную прецессию, интеграл S равен

$$S = T \sqrt{J_1^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta} \cos \vartheta)^2 + J_2^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \vartheta} = \\ = \sqrt{J_1^2 (\alpha + \beta \cos \vartheta)^2 + J_2^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Поэтому оптимальные углы α , β , ϑ должны удовлетворять (17) и условию

$$J_1^2 (\alpha + \beta \cos \vartheta)^2 + J_2^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta \rightarrow \min.$$

Таким образом, кинематическая задача разворота КА (как твердого тела) полностью решена. Оптимальное управление угловым положением КА реализуется по способу, рассмотренному в работе [10]. Оптимальные значения углов α , β , ϑ , удовлетворяющие заданным граничным значениям Λ_H и Λ_K , определяются устройством [13].

Подведем некоторые итоги. Главный вывод — независимо от значений коэффициентов a_1 , a_2 оптимальное движение КА подчиняется уравнениям (9), в которых $b > 0$ — скалярная функция времени, а p_i — решение системы уравнений (8) с удовлетворением условия (13). Коэффициент a_2 никак не влияет на оптимальное управление $\mathbf{L}(t)$. Ключевым в результирующем решении $\mathbf{L}(t)$ оказывается значение коэффициента a_1 . Если $a_1 \neq 0$, то оптимальным является разворот с постоянным модулем кинетического момента за минимальное время. Оптимальное управление формализуется зависимостью (15), в которой $\mathbf{c}_p$ и C — постоянные параметры закона управления, определяемые значениями Λ_H , Λ_K и моментами инерции J_1 , J_2 , J_3 . Если $a_1 = 0$, то оптимальным является любое вращение КА, которое удовлетворяет уравнениям (8), (9) независимо от модуля кинетического момента (т. е. в случае $a_1 = 0$ модуль кинетического момента может изменяться произвольным образом, но не тождественно равным нулю).

В случае $\omega(0) = \omega(T) = 0$ и $a_1 \neq 0$ близкое к оптимальному движение состоит из кратковременного сообщения КА расчетной угловой скорости (номинального кинетического момента), вращения КА с постоянным по модулю кинетическим моментом и кратковременного (импульсного) гашения угловой скорости до нуля. Для оптимального разворота КА интеграл G и время разворота T связаны линейной

зависимостью, а модуль кинетического момента $|\mathbf{L}|$ во время вращения КА соотносится с временем разворота T уравнением $|\mathbf{L}|T = \text{const}$.

Результаты математического моделирования

Рассмотрим разворот КА на 150° из начального положения Λ_H , когда оси КА совпадают с осями опорного базиса $\mathbf{I}$, в заданное конечное положение Λ_K , элементы которого равны: $\lambda_0 = 0,2598202$; $\lambda_1 = 0,6834345$; $\lambda_2 = 0,5913393$; $\lambda_3 = 0,3401890$. Пусть $L_0 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, а $a_1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $a_2 = 0,2$. Считалось, что $J_1 = 1760 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $J_2 = 6320 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $J_3 = 6010 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. После решения краевой задачи принципа максимума были получены $\mathbf{p}_0 = \{0,107354; -0,031616; 0,993718\}$ и $\mathbf{c}_p = \mathbf{p}_0$ (так как $\Lambda_H = 1$). Оптимальное значение $r_0 = (a_1/L_0 + a_2)/\sqrt{p_{10}^2/J_1^2 + p_{20}^2/J_2^2 + p_{30}^2/J_3^2} = 1248 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2)$.

Результаты математического моделирования процесса разворота при оптимальном управлении представлены на рис. 1—3. Оптимальный разворот

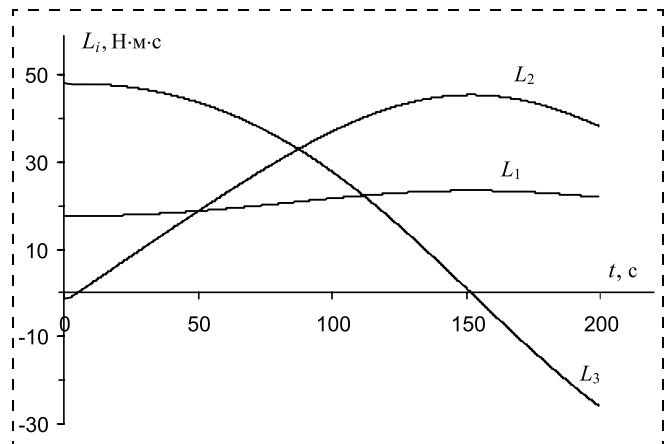


Рис. 1

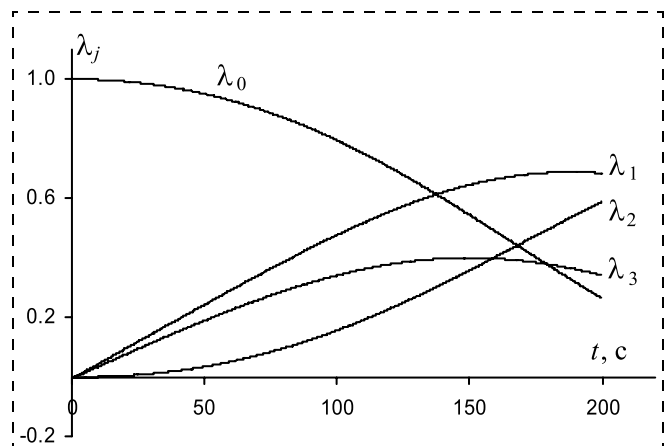


Рис. 2

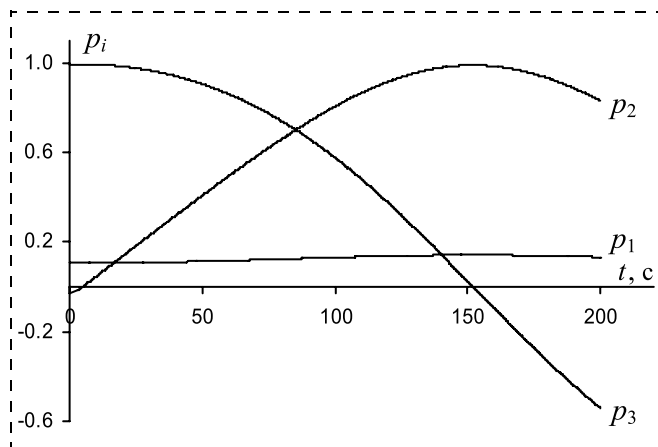


Рис. 3

КА происходит с максимально допустимым кинетическим моментом, время разворота составило $T = 200$ с. На рис. 1 изображены графики изменения управляющих функций $L_1(t)$, $L_2(t)$, $L_3(t)$ по времени; на рис. 2 отображены графики изменения компонент кватерниона $\Lambda(t)$ текущей ориентации. На рис. 3 приведена динамика изменения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ вектора $\mathbf{p}$ во времени (характер изменения компонент r_1 , r_2 , r_3 сопряженного вектора $\mathbf{g}$ имеет такой же качественный вид). Необходимо отметить, что переменные $L_1(t)$ и $p_1(t)$, соответствующие продольной оси КА, — знакопостоянные функции времени (это свойство наблюдается при любых сочетаниях граничных значений Λ_n и Λ_k).

Заключение

В статье рассмотрена и решена задача оптимального разворота КА из произвольного начального в требуемое конечное угловое положение, в которой функционал качества есть линейная комбинация двух показателей: времени и интегральной величины модуля кинетического момента (как вектора управляющего воздействия), затраченных на разворот КА, которые умножены на свои весовые коэффициенты. В отличие от известных работ в нашей задаче управляющей функцией является кинетический момент КА. В принятой нами математической модели кватернион ориентации КА и вектор кинетического момента связаны посредством постоянного тензора инерции, в силу чего рассматриваемая задача управления переориентацией приобретает динамическую окраску, а ее решение меняется кардинально (по сравнению с известным решением [1], где управлением является угловая скорость).

Оптимальная программа разворота и величина (4) целиком зависят от коэффициента a_1 . В случае

$a_1 \neq 0$, при наличии ограничения (10), свойства оптимального по критерию (4) разворота совпадают со свойствами того же разворота за минимальное время. Если $a_1 = 0$, то оптимальный разворот происходит согласно уравнениям (8), (9) с произвольным изменением величины $|\mathbf{L}|$ (интеграл (4) не зависит от модуля кинетического момента). Коэффициент a_2 не влияет на оптимальное управление. Хотя исследуемая задача оптимального управления решена в кинематической постановке, полученное решение полезно как отправная точка для изучения более точных постановок задачи управления, а в сочетании с методом обратных задач динамики управляемых систем [14] оно позволяет создать эффективные законы управления ориентацией, учитывающие динамику КА.

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.
3. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974.
4. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Особые режимы управления в задаче оптимального разворота сферически симметричного космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6.
5. Зубов Н. Е. Оптимальное управление терминальной переориентацией КА на основе алгоритма с прогнозирующей моделью // Космические исследования. 1991. Т. 29. Вып. 3.
6. Ваньков А. И. Адаптивное робастное управление угловым движением КА с использованием прогнозирующих моделей // Космические исследования. 1994. Т. 32. Вып. 4–5.
7. Велищанский М. А., Крищенко А. П., Ткачев С. Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 5.
8. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2.
9. Левский М. В. Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 3.
10. Левский М. В. Способ управления разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2093433 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1997. № 29.
11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
12. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
13. Левский М. В. Система определения параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2103736 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1998. № 3.
14. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988.

Concerning a Special Problem of the Optimal Control of Spacecraft's Terminal Orientation

M. V. Levskii, dp940@mail.ru✉,

Maximov Research Institute of Space Systems, Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow Region, 141091, Russian Federation

Corresponding author: Levskii Mikhail V., Ph.D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems, Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow Region, 141091, Russian Federation e-mail: dp940@mail.ru

Received on January 20, 2016

Accepted on February 04, 2016

The topic of the article is a problem of optimal control of a spacecraft reorientation from an arbitrary initial attitude to a prescribed angular attitude. The case is studied, when the minimized functional combines the time and the integral value of the modulus of the angular momentum for the spacecraft reorientation. Using the necessary conditions of optimality in the form of Pontryagin's maximum principle and the quaternion method for the spacecraft motion control, an analytical solution to this problem was obtained. Solution to the optimal control problem is based on the quaternion equation connecting the angular momentum vector and the orientation quaternion of the body coordinate system. Formal equations were derived and expressions for construction of the optimal control program were given. The dependence of the control variables from the phase coordinates was found (in an explicit form). Using the transversality condition as the necessary condition of optimality, optimum value of key parameter of optimum functions is determined. For a dynamically symmetric solid body, the problem of the spatial reorientation was completely solved — the optimal law of variation of the spacecraft angular momentum (as an explicit function of time) was obtained in an analytical form. The results of the mathematical simulation of the spacecraft motion under the optimal control are presented and demonstrate practical usefulness of the proposed algorithm for the spacecraft attitude control.

Keywords: spacecraft, attitude, optimal control, control function, transversality conditions

For citation:

Levskii M. V. Concerning a Special Problem of the Optimal Control of Spacecraft's Terminal Orientation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 7, pp. 483—491.

DOI: 10.17587/mau.17.483-491

References

1. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (The use of quaternions in problems of orientation of a rigid body), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
2. Krasovskii A. A. *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya polyetom i ih analiticheskoe konstruirovaniye* (Flight automatic control systems and their analytical design), Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).
3. Raushenbakh B. V., Tokar' E. N. *Upravlenie orientatsiei kosmicheskikh apparatov* (Spacecraft attitude control), Moscow, Nauka, 1974 (in Russian).
4. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. *Osobyie rezhimy upravleniya v zadache optimal'nogo razvorota sfericheskii simmetrichnogo kosmicheskogo apparata* (Special control modes in an optimal rotation of a spherically symmetric spacecraft), *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*. 2009. no. 6 (in Russian).
5. Zubov N. E. *Optimal'noe upravlenie terminal'noi pereorientatsiei KA na osnove algoritma s prognoziruyushchei model'yu* (Optimal control of the spacecraft re-orientation of the terminal based on the algorithm model predictive), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1991, vol. 29, iss. 3, p. 340 (in Russian).
6. Van'kov A. I. *Adaptivnoe robustnoe upravlenie uglovym dvizheniem KA s ispol'zovaniem prognoziruyushchikh modelei* (Adaptive robust control angular motion of the spacecraft using predictive models), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1994. vol. 32, iss. 4—5 (in Russian).
7. Velishchanskii M. A., Krishchenko A. P., Tkachev S. B. *Sintez algoritmov pereorientatsii kosmicheskogo apparata na osnove kontseptsii*

obratnoi zadachi dinamiki (Synthesis algorithms reorientation of the spacecraft based on the concept of inverse dynamics problem), *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*. 2003. no. 5 (in Russian).

8. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. *Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota osesimmetrichnogo kosmicheskogo apparata s ograniченным i impul'snym upravleniem pri proizvol'nykh granichnykh usloviyakh* (The solution of the optimal rotation axially symmetric spacecraft with limited impulse control, and for arbitrary boundary conditions), *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*. 2007. no. 2 (in Russian).

9. Levskii M. V. *Osobennosti upravleniya orientatsiei kosmicheskogo apparata, oborudovannogo inertsiionnymi ispolnitel'nymi organami* (Features of Attitude Control of a Spacecraft, Equipped with Inertial Actuators), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 3, pp. 188—195 (in Russian).

10. Levskii M. V. *Sposob upravleniya razvorotom kosmicheskogo apparata. Patent na izobretenie RF № 2093433* (A method for controlling spacecraft reversal. The patent for the invention of the Russian Federation № 2093433), *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i patenty"*, 1997, no. 29 (in Russian).

11. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* (The mathematical theory of optimal processes), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

12. Moiseev N. N. *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* (Numerical methods in optimal systems theory), Moscow, Nauka, 1971 (in Russian).

13. Levskii M. V. *Sistema opredeleniya parametrov regul'yarnoi pretsessii tverdogo tela. Patent na izobretenie RF № 2103736* (The system of determining the parameters of a regular solid-state precession. The patent for the invention of the Russian Federation № 2103736), *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i patenty"*, 1998, no. 3 (in Russian).

14. Krut'ko P. D. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyayemykh sistem. Nelineinye modeli* (Inverse problems of controlled systems dynamics: nonlinear models), Moscow, Nauka, 1988 (in Russian).