Памяти моего школьного друга
Н. Н. Береды

В. А. Подчукаев, д-р техн. наук, проф., sstu85@yandex.ru,
Саратовская государственная юридическая академия,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Квантово-волновой дуализм описания динамических систем¹

Рассматривается введенное автором пространство возможных состояний динамической системы, описываемое скалярным полем в виде гиперболы со смещенным центром. Показано, что это поле квантовано выколотыми точками центра смещения, что в дополнение к известным квантованию по времени и по уровню является новым приемом квантования на основе введенного автором понятия кванта движения. Квант движения определен как интервал знакопостоянства знакопеременных компонент ротора векторного поля от одной выколотой точки до другой. Доказано, что пространство возможных состояний является пульсирующей гиперсферической волной переменной кривизны, координаты центра которой представляют собой алгебраическую сумму скалярных волн кручения по ветви равнобочной гиперболы и обратных им скалярных волн экспоненциального движения к точкам смены знака. Доказательство основано на предложенной процедуре отображения фазового пространства на евклидову плоскость.

Ключевые слова: скалярное поле, выколотая точка, центр смещения, квант движения, прямое движение, обратное движение, гиперпространство состояний, отображение пространства, гиперсфера, псевдосфера

Введение

Объектом исследований в статье в рамках теории автоматического управления является корпускулярно-волновой дуализм (квантово-волновой дуализм) или принцип, согласно которому любой физический объект может быть описан как с использованием математического аппарата, основанного на волновых уравнениях, так и с помощью формализма, основанного на представлении об объекте как о частице или как о системе частиц.

В современной теории автоматического управления превалирует второй способ представления об объекте, в то время как волновое описание практически не используется.

Поясним сказанное на примере свободного движения стационарной линейной системы 3-го порядка в форме Фробениуса, коэффициенты нижней строки которой имеют вид $[-\alpha_3, -\alpha_2, -\alpha_1]$, где $\alpha_i > 0, i = \overline{1, 3}$, — коэффициенты характеристического уравнения. Этим уравнением описывается физический объект, в механике классифицируемый как тело-точка с массой, занимающей нулевой объем.

Вторым способом описания этого же объекта является описание с помощью конструкций теории поля, в роли которых выступают кинематические конструкции У. К. Клиффорда (дивергенция div и ротор rot) и градиент Д. К. Максвелла grad .

С использованием обозначений $p_{ij} (i, j = \overline{1, 3})$ для элементов матрицы Фробениуса P эти конструкции в рассматриваемом примере имеют вид:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-08-00181а.

1) индикатор наличия или отсутствия внутренних источников ($\text{div} > 0$) или стоков ($\text{div} < 0$) кинетической энергии движения (здесь Sp обозначает след матрицы)

$$\text{div} P = \text{Sp} P(x, t) = p_{11} + p_{22} + p_{33} = -\alpha_1;$$

2) индикатор спинорного движения (индикатор вращения)

$$\begin{aligned} \text{rot} P &= \text{col}[p_{32} - p_{23}; p_{13} - p_{31}; p_{21} - p_{12}] = \\ &= \text{col}[-\alpha_2 - 1; \alpha_3; -1]; \end{aligned}$$

3) индикатор знака и величины производных от компонент вектора состояний

$$\text{grad} P = \text{diag} P = \text{col}[0, 0, -\alpha_1].$$

Таким образом, на языке теории поля даже простейшая задача модального управления является задачей управления угловыми скоростями ротора векторного поля $\text{rot} P = 2\text{col}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, а вовсе не показателями точности и качества управления, как это справедливо для второй трактовки физического объекта.

Цель статьи состоит в наполнении принципа квантово-волнового дуализма описания движения динамических систем волновым содержанием.

При этом из трех математических парадигм:

1) парадигма И. Ньютона: дано уравнение, найти решение;

2) парадигма Пуанкаре—Ляпунова: дано уравнение, найти свойства решений, не решая само уравнение;

3) парадигма Андронова—Понтрягина: не дано уравнение. При самых общих предположениях о правых частях уравнения описать свойства его решений, — использована последняя парадигма для решения следующей задачи.

Постановка задачи

Дано: единственное решение (обозначим его $x(t, t_0, x_0, F) \in R^n$) некоего векторного уравнения (описывающего динамическую систему), проходящее через точку (t_0, x_0) векторного поля пространства состояний $R^n \times [0, \infty)$, не являющуюся состоянием равновесия. Здесь F — заданный на полуоси $[t_0, \infty)$ ограниченный ненулевой вектор внешних воздействий; t_0 — заданный начальный момент времени; x_0 — заданный вектор начальных состояний.

Другими словами, задано тождество, определяющее понятие единственного решения

$$\dot{x}(t, t_0, x_0, F) \equiv f[x(t, t_0, x_0, F), t, F], \quad (1)$$

где $f[x(t, t_0, x_0, F), t, F]$ — правая часть уравнения, порождающего это решение.

Требуется найти волновое описание решения.

Историческая справка. Поставленная задача в известной мере перекликается с понятием полной интегрируемости, использованным в XIX веке такими математиками и механиками, как Якоби, Пуассон, Лиувиль, Лагранж и другие, а позднее В. И. Арнольдом и другими авторами. Но в их постановках задачи ставились применительно к четномерному фазовому пространству, принятому в классической литературе по механике, базирующейся на канонических уравнениях первого порядка гамильтоновой механики, описывающих движение динамических систем с помощью n обобщенных координат и n обобщенных импульсов, в сумме дающих размерность $2n$. Сформулированная же выше задача никаких ограничений на размерность фазового пространства не накладывает, что и предполагает парадигма Андронова—Понтрягина.

Вспомогательные сведения

Поставленная задача решена в работах [1, 2], где доказано, что в общем случае всякое векторное поле пространства состояний $R^n \times [0, \infty)$ в фазовом пространстве R^n (или пространстве решений) порождает скалярное поле в виде гиперболы со смещенным центром, которой принадлежит изображающая точка всякого решения уравнения (1):

$$x^T(t, t_0, x_0, F)x(t, t_0, x_0, F) + 2G^T[x(t, t_0, x_0, F), x_0]x(t, t_0, x_0, F) = x_0^T x_0, \quad (2)$$

где $G[x(t, t_0, x_0, F), x_0] \in R^n$ — обозначение вектора центра смещения гиперболы (2), движение которого подчинено алгебраическим уравнениям

$$G_i[x(t, t_0, x_0, F), x_0] = -\frac{1}{2} \operatorname{col} \left[x_i(t, t_0, x_0, F) - \frac{x_{0,i}^2}{x_i(t, t_0, x_0, F)} \right], \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Исключением из общего случая является случай кососимметрической матрицы Якоби в векторно-матричном представлении динамической сис-

темы, когда в выражении (2) отсутствует второе слагаемое [3, с. 100].

Отметим, что впервые формула (2) была приведена в работе [4], где описываемое ею пространство названо пространством возможных состояний динамической системы (в теоретической физике для этого используется термин "горизонт событий"). Размерность пространства возможных состояний будет определена ниже.

Уравнение (3) описывает сложное движение всех компонент вектора центра смещения в плоскостях (G_i, x_i) , оси которых x_i ($i = \overline{1, n}$) образуют фазовое пространство R^n . Таким образом, формализма только двух пространств (пространства состояний и фазового пространства) недостаточно для полного описания всех движений векторного и скалярного полей, поскольку для описания движения изображающей точки вектора центра смещения необходимо введение в рассмотрение третьего (дополнительного) пространства с взаимно ортогональными осями G_i ($i = \overline{1, n}$).

Определение 1. Будем называть пространство движений центра смещения гиперболы (2) гиперпространством состояний вектора центра смещения.

Обозначение этого пространства будет приведено ниже.

Квантово-волновой дуализм описания скалярных полей динамических систем

В отличие от пространства состояний $R^n \times [0, \infty)$, где движение совершает изображающая точка решения динамической системы (в дальнейшем это движение будем называть прямым), в пространстве решений (или фазовом пространстве R^n) движение совершает изображающая точка не только решения, но и центра смещения скалярного поля, имеющего вид гиперболы со смещенным центром.

Движение вектора $G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]$ можно описать полученной из соотношения (3) формулой скалярной волны:

$$G_i = \frac{[x_{0,i} - x_i(t, t_0, x_0, F)][x_{0,i} + x_i(t, t_0, x_0, F)]}{2x_i(t, t_0, x_0, F)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

которую можно трактовать как уравнение ранее не описанной равнобочной гиперболы с переменным (числитель) коэффициентом и как новое определение геометрического места точек равнобочной гиперболы на полуоси $[0, x_i]$.

Особенностью движения (4) является тот факт, что точкам смены знака компонентами вектора состояний прямого движения (иначе особым или нулевым точкам векторного поля) соответствуют бесконечно большие разрывы второго рода в знаменателе (4), которые названы выколотыми точками, означающими скачкообразный переход (иначе — квантовый скачок после прохождения выколотой точки) соответствующей изображающей точки

Рис. 1. Равнобочная гипербола на плоскости (G_i, x_i)

компоненты вектора центра смещения на другую ветвь равнобочной гиперболы (рис. 1).

Тем самым, скалярное поле (2) оказывается квантованным выколотыми точками вектора центра смещения, что позволяет в дополнение к известным в теории автоматического управления квантованию по времени и по уровню ввести понятие квантования движения выколотыми точками центра смещения.

Определение 2. Квантом движения (или неделимой порцией движения) назовем интервал знакопостоянства знакопеременной компоненты ротора векторного поля, заканчивающийся выколотой точкой соответствующей компоненты вектора центра смещения, порожденной особой точкой вектора состояний.

В отличие от фотона (или кванта света в теоретической физике) квант движения охватывает весь диапазон угловых скоростей.

Полученную для него формулу (4) можно рассматривать как новое решение "задачи трех тел" или трех изображающих точек, расположенных на одной прямой, относительно которых по ветви равнобочной гиперболы движется изображающая точка компоненты вектора центра смещения. Этими точками являются:

1) изображающая точка $x_{0,i}$ начального состояния векторного поля;

2) изображающая точка $x_i(t, t_0, x_0, F)$ прямого движения векторного поля;

3) особая точка $x_i(t, t_0, x_0, F) = 0$ векторного поля.

Сказанное облечем в форму леммы.

Лемма. На интервале кванта движения (4) возвратно-поступательное движение изображающей точки компоненты вектора состояний относительно особой точки $x_i(t, t_0, x_0, F) \rightarrow 0$ для соответствующей компоненты вектора центра смещения преобразуется в кручение центра смещения по ветви равнобочной гиперболы путем:

1) мультипликации (умножения) в числителе (4) двух противоположно направленных движений изображающей точки прямого движения относительно точки $x_{0,i}$ начального состояния;

2) обратно пропорционального движения в знаменателе (4) изображающей точки прямого движения $x_i(t, t_0, x_0, F)$.

Отличие гиперпространства состояний от классического пространства состояний состоит в том, что роль времени в нем выполняет упорядоченная последовательность номеров квантов движения. Последовательность прохождения выколотых точек образует натуральный ряд чисел N номеров квантов движения, что позволяет квантованное выколотыми точками гиперпространство состояний вектора центра смещения обозначить как $R^n \times [N]$.

Квантовый механизм порождения гиперсферических волн

Если представить гиперсферу (2) в виде центральной гиперсферы переменного радиуса

$$\begin{aligned} x_0^T x_0 + G^T[x(t, t_0, x_0, F), x_0]G[x(t, t_0, x_0, F), x_0] &= \\ &= \{x(t, t_0, x_0, F) + G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\}^T \times \\ &\times \{x(t, t_0, x_0, F) + G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\}, \quad (2^*) \end{aligned}$$

то на языке квадратов евклидовых норм векторов (2*) можно записать в виде теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника:

$$\begin{aligned} \|x_0\|^2 + \|G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\|^2 &\equiv \\ &\equiv \|x(t, t_0, x_0, F) + G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\|^2, \quad (2^{**}) \end{aligned}$$

где $\|x_0\|^2 = \text{const}$, $\|G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\|^2 \equiv \text{var}$ — квадраты катетов, $\|x(t, t_0, x_0, F) + G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\|^2 = \text{var}$ — квадрат гипотенузы.

Треугольник Пифагора можно вписать в окружность радиуса, равного половине гипотенузы.

Тем самым, на интервале кванта движения скалярного поля тождество (2**) описывает проекцию на евклидову плоскость пульсирующей гиперсферы переменного радиуса (2*) (или гиперсферическую волну). Радиус кривизны этой волны равен половине гипотенузы треугольника Пифагора, а сама кривизна χ_1 вычисляется по формуле

$$\chi_1 = \frac{2}{\sqrt{\|x(t, t_0, x_0, F) + G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\|^2}}. \quad (5)$$

В выколотых точках переменная кривизна $\chi_1 = 0$ в силу бесконечно большого радиуса в знаменателе (5), чем объясняются пульсации гиперсферической волны.

Определение 3. Процедуру перехода от вида (2*) к виду (2**) назовем отображением пространства возможных состояний $\{R^n + R^n \times [N]\}$ на евклидову плоскость E^2 .

Отметим, что в отличие от понятия полной интегрируемости (см. "Историческую справку" настоящей статьи) пространство возможных состояний нечетномерно и имеет размерность $(2n + 1)$.

Аналогии с дифференциальной геометрией

Субъектами волнового описания скалярного поля (2) являются гиперсфера (первое слагаемое левой части (2)) и смещенный центр — сомножитель билинейного произведения во втором слагаемом (2). Движения изображающих точек решения и центра смещения обоих субъектов являются спинорными (вращательными). Инструментом описания обоих вращений является ротор векторного поля, квантованный выколотыми точками центра смещения. Представим его в виде $\text{rot} f = 2\text{col}[\omega_1, k(t), \dots, \omega_n, k(t)]$, $k \in N$, где $\omega_i, k(t)$, $i = \overline{1, n}$, — угловые скорости k -го кванта движения.

Двойственность использования угловых скоростей ротора для описания обоих вращений заключена в различной трактовке этих вращений с позиций дифференциальной геометрии, а именно:

1) для гиперсферы (2), которой принадлежит изображающая точка решения, — это траектория вращения с постоянной кривизной, радиус кривизны которой определяется вектором начальных состояний

$$\bar{\chi}_1 = 1/\sqrt{\chi_0^T x_0} = \text{const}; \quad (6)$$

2) для изображающей точки центра смещения — это траектория кручения центра смещения χ_2 , представляемая формулой (4) и рис. 1.

В свете изложенного справедливо утверждение.

Утверждение. *Пространство возможных состояний $\{R^n + R^n \times [N]\}$, описываемое скалярным полем (2) в виде гиперсферы со смещенным центром, представляет собой пульсирующую гиперсферу переменной кривизны (5), квантованную точками смены знака компонентами ротора векторного поля.*

Эта волна порождена скалярными волнами кривизны переходных процессов прямого движения изображающей точки вектора состояний $x(t, t_0, x_0, F \in R^n \times [0, \infty)$ и кручения (4) траекторий обратного движения вектора центра смещения в гиперпространстве $G[x(t, t_0, x_0, F), x_0] \in R^n \times [N]$.

Замечание. Если каждую плоскость (G_i, x_i) на рис. 1 гиперпространства вектора центра смещения повернуть на 360° относительно оси G_i и x_i соответственно, то для каждого i ($i = \overline{1, n}$) результатом обоих вращений будут две крестообразные псевдосферы, вписанные в окружность (2^{**}), визуализацией которых является рис. 2 (см. вторую сторону обложки).

Тем самым, пространство возможных состояний на каждом кванте движения представляет собой колесо с крестообразной ступицей в виде двух перекрещивающихся псевдосфер геометрии Лобачевского.

Градиент как инструмент описания экспоненциальных и гиперболических движений в гиперпространстве

Градиент каждой производной от соответствующей компоненты вектора состояний ставит ей во

взаимно однозначное соответствие следующее уравнение свободного движения по этой компоненте:

$$dx_i/dt = p_{ii}(x, t)x_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_i(t_0) = x_{i0},$$

которое в случае $p_{ii} = \text{const}$ имеет решение $x_i(t, t_0, x_{i0}) = \exp(p_{ii}t)x_{i0}$, в случае $p_{ii} = p_{ii}(t) = \text{var}$ — решение

$$x_i(t, t_0, x_{i0}) = [\exp \int_{t_0}^t p_{ii}(\tau) d\tau] x_{i0}, \quad \text{а в нелинейном случае } p_{ii}[x(t, t_0, x_0, F), t] \text{ — решение } x_i(t, t_0, x_{i0}) = [\exp \int_{t_0}^t \{p_{ii}[x(\tau, t_0, x_0, F), \tau]\} d\tau] x_{i0}.$$

Эти экспоненты для стационарных и нестационарных линейных (а в отдельных случаях и нелинейных) динамических систем позволяют аналитически записать интеграл Коши и, если этот интеграл является табличным, получить аналитическое решение (см., например, [5]).

Полученные таким образом аналитические решения можно использовать в формуле (4), тем более, что гиперболы первого и третьего квадрантов на рис. 1 представляют собой кривые, описывающие сразу две функции $G_i(x_i)$ и $x_i(G_i)$. Так, при движении по гиперболе первого квадранта сверху вниз кривая этого квадранта описывает монотонно убывающую экспоненту (для отрицательных показателей), т. е. функцию $x_i(G_i)$ при $G_i \rightarrow 0$, а при движении снизу вверх — гиперболу, т. е. функцию $G_i(x_i)$ при $x_i \rightarrow 0$.

Обе описанные выше функции являются функциями пространственных переменных x_i и G_i , что можно использовать при конструировании решений уравнений в частных производных, которые, как известно, имеют неединственное решение и, как следствие, отвечают условию некорректно поставленных по Ж. Адамару связанных с ними задач.

Обсуждение результатов

Совместное рассмотрение движений в векторных и скалярных полях позволяет избавиться от ряда заблуждений, среди которых на первом месте стоит гравитация.

Ее принято отождествлять с искривлением пространства. В отношении сил гравитации А. Эйнштейн высказал предположение, что гравитация есть геометрическое свойство пространства—времени [6—8].

С поправкой на то, что гипотеза А. Эйнштейна справедлива не в пространстве—времени (как в теоретической физике называется пространство состояний), а в пространстве возможных состояний $\{R^n + R^n \times [N]\}$, описываемом скалярным полем в виде гиперсферы со смещенным центром, настоящая статья и формула (5) доказывают справедливость его гипотезы.

Без возможности наделения скалярных полей известными физическими свойствами результаты статьи можно было бы расценивать как очередной математический экзерсис типа поля Хиггса или волн де Бройля, если бы не угловые скорости, описываемые ротором векторного поля.

С частотой f_i угловая скорость связана формулой $\omega_i(t) = 2\pi f_i(t)$. На интервале кванта движения частоту легко вычислить. В интервале 20 Гц...20 кГц скалярные поля описывают звук, а в интервале 385...780 ТГц — цвет. Между ними лежат диапазоны радиочастот и СВЧ. Так что известный частотный диапазон позволяет идентифицировать скалярное поле в соответствии с физическим характером описываемого им движения.

В условиях, когда тактовая частота процессора современного компьютера не превышает нескольких ГГц, рассчитывать на то, что с их помощью можно смоделировать скалярные поля, выходящие за этот диапазон, не приходится. Поэтому требуется математический аппарат переменных угловых скоростей и переменной частоты.

Такой аппарат хорошо известен. Это аппарат частотных передаточных функций нестационарных линейных систем [9]. Применение этого аппарата в SISO-варианте для одномерных компонент вектора состояний и вектора центра смещения позволяет выполнить более глубокий анализ квантово-волнового описания скалярных полей.

Список литературы

1. Подчукаев В. А. Математическая модель динамического хаоса // Изв. Саратов. ун-та, Нов. Сер. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. С. 27—31.
2. Podchukaev V. A., Peredelskii G. I., Filonovich A. V. The geometric properties of free motion the dynamical systems in phase space // Proc. of 12th Internat. Conf. on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). Novosibirsk, October 2—4, 2014. Vol. 1. P. 35—40.
3. Подчукаев В. А. Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.
4. Подчукаев В. А. К задаче определения области возможных состояний нестационарной линейной системы // Автоматика и телемеханика. 1976. № 7. С. 187—189.
5. Подчукаев В. А. Теория автоматического управления (аналитические методы). М.: Физматлит, 2005. 392 с.
6. Will C. M. Living Rev. Relat. 9, 3 (2006). URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>; gr-qc/0510072.
7. Dicke R. H. New Research on Old Gravitation // Science. 1959. Vol. 129, Iss. 3349. P. 621—624.
8. Подчукаев В. А. Анализ скалярных полей динамических систем // Известия ВУЗов. Приборостроение. 2016. Т. 59. № 1. С. 5—24.
9. Александров А. Г., Подчукаев В. А. Численный метод определения передаточных функций систем с переменными параметрами // Известия ВУЗов. Приборостроение. 1976. № 7. С. 37—42.

Quantum-Wave Dualism for Description of the Dynamic Systems

V. A. Podchukayev, sstu85@yandex.ru✉,

Institute of Problems of the Precise Mechanics and Control of RAS, Saratov,
410028, Russian Federation, Saratov State Law Academy, Saratov, 410056, Russian Federation

Corresponding author: Podchukayev Vladimir A., D. Sc., Professor, Chief Researcher,
Institute of Problems of the Precise Mechanics and Control of RAS, Saratov, 410028, Russian Federation,
Saratov State Law Academy, Saratov, 410056, Russian Federation, e-mail: sstu85@yandex.ru

Received on February 26, 2016

Accepted on March 14, 2016

On the basis of the new formulation of the problem of three bodies were obtained: 1) a new definition of the locus of the points of an equilateral hyperbola; 2) a new "dynamic formula of the golden section" to the representative point of a scalar field displacement of the center; 3) a new interpretation of the deleted point as the point preceding the transition to another branch of the rectangular hyperbola. It is shown that the author introduced the space of possible states of a dynamical system described by a scalar field as a hypersphere with a displaced center — quantized punctures offset center. That is in addition to the known quantization of time and the level of quantization is proposed a new method based on the quantization introduced by the author of the concept of the quantum motion, which is in contrast to the "photon" of theoretical physics is filled with rigorous mathematical content. Thus, the overall dimension of the state space and the space of possible states is $(3n + 2)$. It is proved that the curvature of the space of possible states (phase space + hyperspace displacement of the center), as predicted by Einstein, is a geometric property of the scalar field. The space of possible states is a pulsating wave hyperspherical variable curvature center coordinates which are the algebraic sum of scalar waves of torsion on the branch of an equilateral hyperbola and scalar waves exponential motion. The proof is based on the quantum analogue of the Pythagorean theorem.

Keywords: scalar field, deleted point, center of displacement, quantum motion, direct motion, retrograde motion, hyperspace conditions, display space, hypersphere, pseudosphere

Acknowledgement: This work was supported by RFBR, project № 15-08-00181a.

For citation:

Podchukayev V. A. Quantum-Wave Dualism for Description of the Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 7, pp. 453—457.

DOI: 10.17587/mau.17.453-457

Reference

1. Podchukaev V. A. *Matematicheskaya model' dinamicheskogo haosa* (Mathematical model of dynamic chaos), *Izvestiya Saratovskogo universiteta, Nov. Ser. T. 12. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2012, iss. 4, pp. 27—31 (in Russian).
2. Podchukaev V. A., Peredelskii G. I., Filonovich A. V. The geometric properties of free motion the dynamical systems in phase space, *12th International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE) — 34006 Proceedings "APEIE-2014"*, vol. 1, Novosibirsk, October 2—4, 2014, pp. 35—40.

3. Podchukaev V. A. *Analiticheskie metody teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Analytical methods of control theory), Moscow, Fizmatlit, 2002, 256 p. (in Russian).
4. Podchukaev V. A. On determination of the region of feasible states for a nonstationary linear system, *Autom. Remote Control*, **37**: 7 (1976), 1134—1136.
5. Podchukaev V. A. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya (analiticheskie metody)* (The theory of automatic control (analytical methods)), Moscow, Fizmatlit, 2005, 392 p. (in Russian).
6. Will C. M. Living Rev. Relat. 9 3 (2006), available at: <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>; gr-qc/0510072.
7. Dicke R. H. New Research on Old Gravitation, *Science*, 1959, vol. 129, iss. 3349, pp. 621—624.
8. Podchukaev V. A. *Analiz skaljarnykh polej dinamicheskikh sistem* (Analysis of scalar fields of dynamical systems), *Izvestiya vuzov. Priboroostroenie*, 2016, vol. 59, no. 1, pp. 5—24 (in Russian).
9. Aleksandrov A. G., Podchukaev V. A. *Chislennyj metod opredeleniya peredatochnykh funktsij sistem s peremennymi parametrami* (A numerical method for determination of the transfer functions of systems with variable parameters), *Izvestiya vuzov. Priboroostroenie*, 1976, no. 7, pp. 37—42 (in Russian).