References

1. **Kolesnikov A. A.** *Sinergeticheskaja teorija upravlenija* (Synergetic control theory), Moscow, Jenergoatomizdat, 1994, 344 p. (in Russian).
2. **Kolesnikov A. A.** *Sinergeticheskie metody upravlenija slozhnymi sistemami: teorija sistemnogo sinteza* (Complex systems synergetic control methods: system synthesis theory), Moscow, KomKniga, 2006, 240 p. (in Russian).
3. **Kolesnikov A. A., Veselov G. E., Popov A. N.** et al. *Sinergeticheskie metody upravlenija slozhnymi sistemami: Mehanicheskie i jelektromehanicheskie sistemy* (Complex systems synergetic control methods: mechanical and electromechanical systems), Moscow, KomKniga, 2006, 304 p. (in Russian).
4. **Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A., Veselov G. E.** *Novye tehnologii proektirovanija sovremennyh sistem upravlenija processami generirovanija jelektrojenergii* (New design technologies of modern process control systems for the electricity generating), Moscow, Publishing house "MEI", 2011, 280 p. (in Russian).
5. **Kolesnikov A. A.** *Novye nelinejnye metody upravlenija poletom* (New nonlinear methods of flight control), Moscow, Fizmatlit, 2013, 196 p. (in Russian).
6. **Ioannou P. A., Sun J.** Robust Adaptive Control, New York, Dover, 2012, 848 p.
7. **Isidori A.** Nonlinear control systems an introduction, Berlin, Springer-Verlag, 1989, 545 p.
8. **Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L.** *Nelinejnoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* (Complex dynamic systems nonlinear and adaptive control), St. Petersburg, Nauka, 2000, 549 p. (in Russian).
9. **Furtat I. B.** *Modificirovannyj algoritm obratnogo obhoda integratora* (Modified algorithm of robust integrator backsteping), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 10, pp. 2—7 (in Russian).
10. **Krstić M., Kanellakopoulos M., Kokotović P. V.** Adaptive nonlinear control without overparametrization, *Systems & Control Letters*, 1992, vol. 19, iss. 3, pp. 177—185.
11. **Polycarpou M. M., Ioannou P. A.** A robust adaptive nonlinear control design, *Automatica*, 1996, vol. 32, iss. 3, pp. 423—427.
12. **Li Y., Qiang S., Zhuang X., Kaynak O.** Robust and adaptive backstepping control for nonlinear systems using RBF neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, vol. 15, iss. 3, pp. 693—701.
13. **Bouabdallah S., Siegwart R.** Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro Quadrotor, Proc. of IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation, 18—22 April 2005, Spain, vol. 2005, pp. 2247—2252.
14. **Tong S., Liu C., Li Y.** Fuzzy-adaptive decentralized output-feedback control for large-scale nonlinear systems with dynamical uncertainties, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, vol. 18, iss. 5, pp. 845—861.
15. **Druzhinina M. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L.** *Metody adaptivnogo upravlenija nelinejnymi ob'ektami po vyhodu* (Adaptive control methods for nonlinear objects output control), *Avtomatika i Telemehanika*, 1996, no. 2, pp. 3—33 (in Russian).
16. **Kolesnikov A. A.** *Analiticheskij sintez nelinejnyh sistem, optimal'nyh otnositel'no linejnyh agregirovannyh peremennyh* (Analytical synthesis of nonlinear systems, which optimal regarding to nonlinear aggregate variables), *Izvestija Vuzov. Jelektromehanika*, 1985, no. 11, pp. 9—18 (in Russian).
17. **Kolesnikov A. A.** *Analiticheskoe konstruirovanie nelinejnyh agregirovannyh reguljatorov po zadannoj sovokupnosti invariantnyh mnogoobrazij. I. Skaljarnoe uravnenie* (Nonlinear aggregated regulators analytical design for a given set of invariant manifolds. I. Scalar control), *Izvestija Vuzov. Jelektromehanika*, 1987, no. 3, pp. 100—108 (in Russian).
18. **Kolesnikov A. A.** *Analiticheskoe konstruirovanie nelinejnyh agregirovannyh reguljatorov po zadannoj sovokupnosti invariantnyh mnogoobrazij. II. Vektornoe uravnenie* (Nonlinear aggregated regulators analytical design for a given set of invariant manifolds. II. Vector control), *Izvestija Vuzov. Jelektromehanika.* 1987, no. 5, pp. 5—17 (in Russian).
19. **Kolesnikov A. A.** Posledovatel'naja optimizacija nelinejnyh agregirovannyh system (Sequential optimization of nonlinear aggregated systems), Moscow, Jenergoatomizdat, 1987, 160 p. (in Russian).
20. **Byrnes C. I., Isidori A.** New results and examples in nonlinear feedback stabilization, Systems & Control Letters, 1989, iss. 12, pp. 437—442.
21. **Tsinias J.** Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization, Mat. Contr. Signals Syst., 1989, vol. 2, iss. 12, pp. 343—357.
22. **Kokotovic P. V., Sussman H. J.** A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, 1989, iss. 13, pp. 125—133.
23. **Kokotovic P. V., Arcak M.** Constructive Nonlinear Control: progress in the 90'S, *Prepr. 14th IFAC World Congress*, Beijing, China, 1999.
24. **Teel A. R.** Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls, *Systems & Control Letters*, 1992, iss. 18, pp. 165—171.

УДК 28.50 DOI: 10.17587/mau.17.445-452

В. В. Григорьев, д-р техн. наук, проф., grigvv@yandex.ru,
С. В. Быстров, канд. техн. наук, доц., sbystrov@mail.ru,
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий механики и оптики,
О. К. Мансурова, канд. техн. наук, доц., erke7@mail.ru,
Национальный минерально-сырьевой университет "Горный",
И. М. Першин, д-р техн. наук, проф., ivmp@yandex.ru,
Северо-Кавказсккий федеральный университет,
М. И. Першин, аспирант, Pershinmaksim1992@yandex.ru,
Южный федеральный университет

Качественное распределение мод в системах с распределенными параметрами*

Обсуждается разработка методики качественного распределения мод, определяющих показатели качества процессов в линейных системах с распределенными параметрами. Для использования частотных методов исследования линейных распределенных систем выполнена модификация критерия Найквиста, которая позволяет проводить анализ параметров областей расположения пространственных мод, связанных с показателями качества процессов.

Ключевые слова: *распределенные системы, пространственные моды, критерий Найквиста, качественное распределение*

*Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01) Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z).

Введение

Современные непрерывные технологические процессы большой мощности характеризуются сложными динамическими процессами, параметры которых изменяются не только во времени, но и в пространстве. В качестве примера могут служить гидролитосферные процессы, процессы, связанные с термической обработкой, диффузией и т. п. (в теории управления этот класс процессов назван объектами с распределенными параметрами) [1—5]. Математические модели таких процессов либо не известны, либо описываются уравнениями в частных производных. Основные подходы, используемые при анализе линейных объектов с распределенными параметрами [6—14], основаны на использовании теории дифференциальных уравнений в частных производных и частотных методов.

Без потери общности для линейных объектов с распределенными параметрами рассматривается задача применения качественной теории распределения мод [15—18] для синтеза систем управления. Отметим, что для данного класса объектов имеет место разложение их математических моделей на совокупность собственных вектор-функций операторов объектов, собственное движение которых описывается бесконечномерными дифференциальными уравнениями.

Методика синтеза распределенных регуляторов, использующая качественную теорию распределения мод, рассмотрена на примере построения замкнутой системы управления процессом распространения теплоты в пластинке конечных размеров.

Постановка задачи

Основные подходы, применяемые при анализе линейных объектов с распределенными параметрами, основаны на использовании теории дифференциальных уравнений в частных производных и частотных методов. Поставим задачу применения качественной теории для синтеза систем управления с распределенными параметрами.

Под качественным распределением мод понимается расположение мод в круге радиуса $r > 0$, с центром в точке $(\beta, j0)$, причем значение $\beta + r$ должно быть меньше нуля, т. е. данный круг должен лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, где параметр β определяет среднюю скорость сходимости процессов к положению равновесия, а параметр r — отклонения траекторий движения от их средних значений.

Основной результат

Рассмотрим применение качественной теории к синтезу распределенных систем управления. Как известно [1—3, 5], передаточные функции многих распределенных объектов по отдельным модам могут быть представлены в виде

$$W_\eta(s) = \frac{K_\eta}{T_\eta s + 1}\mathbf{e}^{-\tau_\eta s} \quad (\eta = 1, 2, ...), \qquad (1)$$

где s — оператор Лапласа; T_η, K_η, τ_η — параметры (постоянная времени, коэффициент усиления, запаздывание), определяемые с использованием результатов эксперимента.

Сведем поставленную задачу качественного расположения мод к классической задаче определения устойчивости, для чего введем конформное отображение левой полуплоскости комплексной плоскости в единичный круг с центром в начале координат вида [14—18]

$$s_0 = \frac{1+s}{1-s},$$

а затем применим еще одно конформное отображение, преобразующее единичный круг с центром в начале координат в круг произвольного радиуса r с центром в точке $(\beta, j0)$, посредством преобразования

$$s_1 = \frac{1+s}{1-s}r - \beta. \qquad (2)$$

Тогда характеристический полином замкнутой системы по данной моде $D(s_1) = A(s_1) - B(s_1)$ должен иметь все корни характеристического полинома относительно переменной s_1 в круге радиуса $r > 0$, с центром в точке $(\beta, j0)$, причем значение $\beta + r$ должно быть меньше нуля, т. е. все корни относительно переменной s_1 должны иметь отрицательные вещественные части. При этом вспомогательная передаточная функция (1) с учетом (2) примет вид

$$W_\eta(s_1) = \frac{D_\eta(s_1)}{D_{1,\eta}(s_1)}. \qquad (3)$$

Перейдем к частотным передаточным функциям, заменив оператор s_1 в передаточной функции (3) на

$$s_1 = \frac{1+j\omega}{1-j\omega}r - \beta = j\omega_1,$$

при этом

$$W_\eta(j\omega_1) = \frac{D_\eta(j\omega_1)}{D_{1,\eta}(j\omega_1)}. \qquad (4)$$

Согласно принципу приращения аргумента, если разомкнутый контур имеет l корней, лежащих вне круга радиуса $r > 0$, с центром в точке $(\beta, j0)$, причем значение $\beta + r$ должно быть меньше нуля, а остальные $n - l$ корней располагаются в данном круге, то приращение аргумента вспомогательной частотной передаточной функции (4) должно быть равно

$$f_1 = \frac{n\pi}{2} - \frac{(n-l)\pi}{2} + \frac{l\pi}{2} = l\pi,$$

где f_1 — приращение аргумента вспомогательной частотной передаточной функции. Переходя к амплитудно-фазочастотной характеристике разомкнутого контура, получаем, что приращение аргумента частотной передаточной функции разомкнутого контура (4) относительно точки комплексной плоскости $(-1, j0)$ должно быть равно

$$f_2 = l\pi,$$

где f_2 — приращение аргумента разомкнутого контура. Если разомкнутый контур качественно экспоненциально устойчив с параметрами β и r, то $l = 0$ и приращение аргумента $f_2 = 0$, т. е. амплитудно-фазочастотная характеристика модифицированной частотной передаточной функции разомкнутого каждого контура $W_\eta(s = j\omega_1)$ не должна охватывать точку (−1, j0) комплексной плоскости, при этом линейная система будет качественно экспоненциально устойчивой с параметрами β и r.

Сведем задачу установления факта качественного распределения мод к классической задаче определения устойчивости, для чего введем конформное отображение

$$s_1 = \frac{1+s}{1-s}r - \beta, \text{ или } s = \frac{s_1 - r + \beta}{r + s_1 + \beta}.$$

Полагая что $s = j\omega$; $s_1 = j\omega_1$ и преобразуя, получим

$$j\omega = j(2\omega_1 r/(\omega_1^2 + (r+\beta)^2)) +$$
$$+ (\omega_1^2 - (r^2 - \beta^2))/(\omega_1^2 + (r+\beta)^2)).$$

Характеристический полином по каждой пространственной моде замкнутой системы должен иметь все корни относительно переменной s_1 в левой полуплоскости. Другими словами, все корни должны иметь отрицательные значения вещественных частей, а корни исходного объекта (системы) при этом должны лежать в круге радиуса $r > 0$, с центром в точке (β, j0), причем значение $\beta + r$ должно быть меньше нуля (контур по каждой пространственной моде качественно экспоненциально устойчив с параметрами β и r). Таким образом, проведена модификация критерия Найквиста, позволяющего анализировать качественное расположение мод в замкнутой распределенной системе.

Примеры

Пример 1. Поясним процедуру определения коэффициента усиления регулятора для системы управления сосредоточенным объектом, передаточная функция которого задана в виде

$$W(s) = (1/(5s + 1))\exp(-0{,}06s).$$

Полагая s = $j\omega$ и преобразуя, получим

$$W(j\omega_1) =$$
$$= \frac{1}{5[j(2\omega_1 r/(\omega_1^2 + (r+\beta)^2)) + (\omega_1^2 - (r^2-\beta^2))/(\omega_1^2 + (r+\beta)^2)] + 1} \times$$
$$\times \exp[-0{,}06\{j(2\omega_1 r/(\omega_1^2 + (r+\beta)^2)) +$$
$$+ (\omega_1{}^2 - (r^2 - \beta^2))/(\omega_1^2 + (r+\beta)^2)\}].$$

С использованием данного соотношения построен модифицированный пространственный годограф, приведенный на рис. 1.

В соответствии с критерием устойчивости Найквиста [18, 19] определим статический коэффициент усиления регулятора $K = -1/(-0{,}05) = 20$ (рис. 2). Моделируя работу замкнутой системы, получены графики переходного процесса, приведенные на рис. 3.

Рассмотрим некоторые особенности систем с распределенными параметрами. При исследовании данных систем в работах [1—3, 5] введено по-

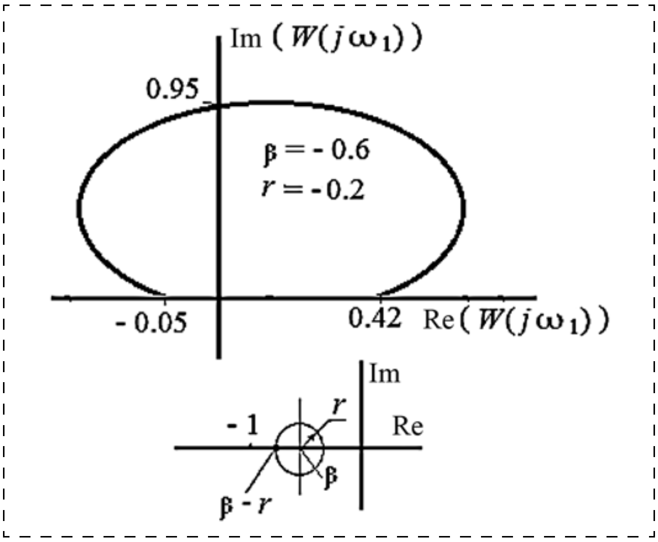

Рис. 1. Модифицированный годограф рассматриваемого объекта

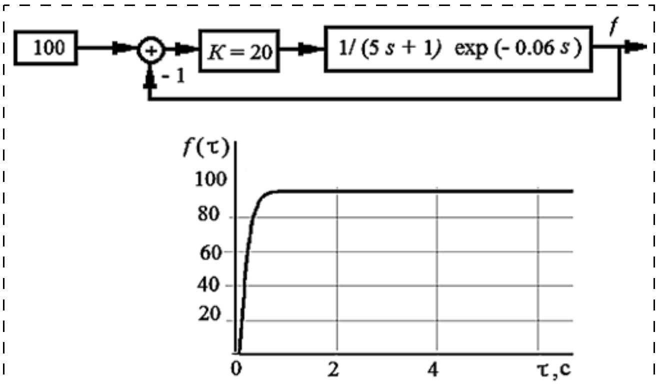

Рис. 2. Результаты моделирования замкнутой системы управления

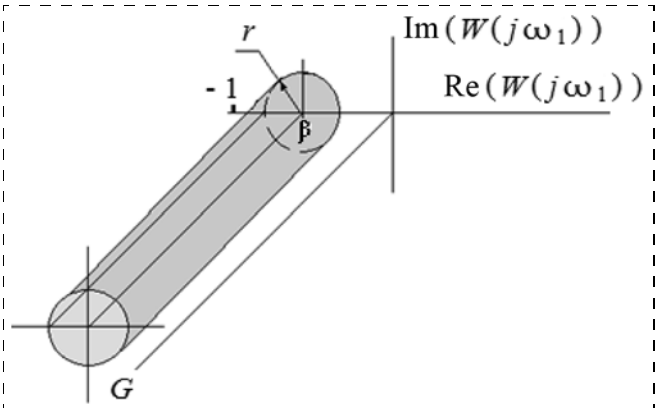

Рис. 3. Расположение цилиндра в комплексной области

нятие пространственных мод — собственных вектор-функций операторов объектов. Собственное движение таких пространственных мод описывается бесконечными дифференциальными уравнениями. Преобразование по Лапласу таких уравнений приводит к бесконечным полиномам (к бесконечному числу корней по каждой пространственной моде). При этом число собственных вектор-функций оператора объекта (пространственных мод) также бесконечно. Для описания динамических характеристик распределенного объекта управления в работах [1, 2, 5] введена обобщенная координата *G*. Она позволяет бесконечную совокупность годографов, описывающих динамические характеристики по каждой пространственной моде, свести к поверхности — пространственному годографу, с использованием которого разработана частотная процедура синтеза.

Будем теперь под качественным распределением мод для систем с распределенными параметрами понимать расположение мод в цилиндре радиуса $r > 0$, с центром в точке $(\beta, j0)$, причем значение $\beta + r$ должно быть меньше нуля, т. е. данный круг должен лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, где параметр β определяет среднюю скорость сходимости процессов к положению равновесия, а параметр r — отклонения траекторий движения от их средних значений (рис. 3), где G — обобщенная координата, с помощью которой учитывается бесконечная совокупность пространственных мод [1, 2].

Пример 2. Синтез распределенного регулятора для системы управления температурным полем многослойной пластинки (рис. 4).

Управляющим воздействием служит тепловой поток, распределенный по поверхности S_1, а функцией выхода — температурное поле $T_3(x, y, Z^*, \tau)$. Здесь и далее τ — время.

Поверхности S_2, S_4, S_6 теплоизолированы, а поверхности S_3, S_5 поддерживаются при постоянной температуре, равной нулю.

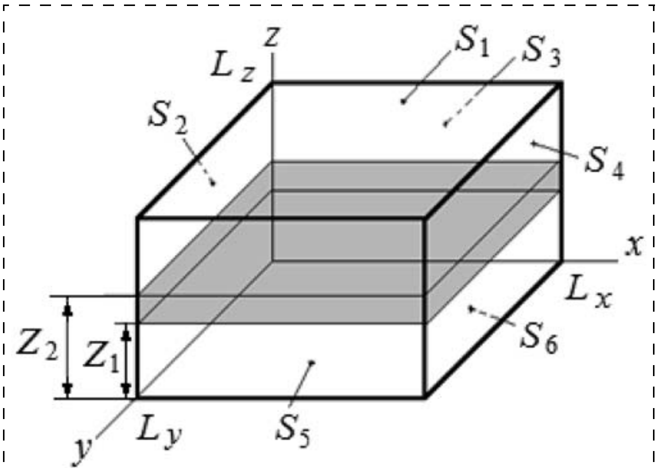

Рис. 4. Объект управления

Для оценки динамических характеристик сформируем математическую модель объекта управления.

$$\frac{\partial T_i(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a_i\left(\frac{\partial^2 T_i(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, z, \tau)}{\partial z^2}\right), \ i = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

$$0 < x < L_x, \ 0 < y < L_y, \ z_i < z < z_{i-1},$$
$$Z_0 = 0, \ Z_3 = L_z.$$

Граничные условия для поверхностей S_3 и S_5 имеют вид

$$T_i(x, L_y, z, \tau) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant L_x, \ z_i \leqslant z \leqslant z_{i-1}. \quad (6)$$

Граничные условия для поверхностей S_2 и S_4 имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_i(0, y, z, \tau)}{\partial x} = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant L_y, \ z_i \leqslant z \leqslant z_{i-1}; \\ &\frac{\partial T_i(L_x, y, z, \tau)}{\partial x} = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant L_y, \ z_i \leqslant z \leqslant z_{i-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Условия на границах раздела сред, отражающие равенство температур и тепловых потоков, выражаются соотношениями

$$T_1(x, y, Z_1, \tau) = T_2(x, y, Z_1, \tau);$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, y, Z_1, \tau)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, y, Z_1, \tau)}{\partial z},$$
$$0 \leqslant x \leqslant L_x, \ 0 \leqslant y \leqslant L_y; \quad (8)$$

$$T_2(x, y, Z_2, \tau) = T_3(x, y, Z_3, \tau);$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(x, y, Z_2, \tau)}{\partial z} = \lambda_3 \frac{\partial T_3(x, y, Z_2, \tau)}{\partial z},$$
$$0 \leqslant x \leqslant L_x, \ 0 \leqslant y \leqslant L_y. \quad (9)$$

Управляющее воздействие в виде теплового потока распределено по границе S_1:

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3(x, y, L_z, \tau)}{\partial z} = U(x, y, \tau), \ 0 \leqslant x \leqslant L_x, \ 0 \leqslant y \leqslant L_y. \quad (10)$$

Поверхность S_6 теплоизолирована:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, y, 0, \tau)}{\partial z} = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant L_x, \ 0 \leqslant y \leqslant L_y. \quad (11)$$

Здесь $T_i(x, y, z, \tau)$ — температурное поле i-й среды; $U(x, y, \tau)$ — управляющее воздействие; x, y, z — пространственные координаты; τ — время.

Ставится задача выбора такого управляющего воздействия (теплового потока распределенного по поверхности S_1), которое обеспечивает качественное распределение выбранных для управления пространственных мод.

Рассмотрим некоторые особенности систем с распределенными параметрами на примере синтеза регуляторов для системы управления температурным полем многослойной пластинки (рис. 4), математическая модель которой описывается уравнениями (5)—(11).

Геометрические параметры пластины представлены ниже:

L_X 0,5
L_Y 0,6
L_Z 0,4
z_1 0,166
z_2 0,207
Z^* 0,262

Теплофизические параметры заданы следующими значениями:

$$a_1 = a_3 = 0{,}000004;\ a_2 = 0{,}000019;$$
$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0{,}059;\ \lambda_2 = 20{,}11$$

(геометрические и теплофизические параметры заданы в системе СИ).

Рассматриваемый объект принадлежит к классу пространственно-инвариантных [1, 2]. В качестве собственных вектор-функций (пространственных мод) выберем функции вида

$$U_{\eta,\gamma}(x, y, \tau) = C_{\eta,\gamma}(\tau)\cos(\psi_\eta x)\sin(\psi_\gamma^* y);$$

$$\psi_\eta = \pi\eta/L_x;\ \psi_\gamma^* = \pi\gamma/L_y,\ \eta, \gamma = \overline{1,\infty}.$$

Вид собственных вектор функций оператора объекта обусловлен граничными условиями (8)—(9).

Определим реакцию объекта на выбранные моды входного воздействия:

$$U(x, y, \tau) = U_{\eta,\gamma}(x, y, \tau),\ \eta = \eta^*,\ \gamma = \gamma^*.$$

Реакция объекта на выбранную пространственную моду входного воздействия может быть представлена в виде

$$T_3(x, y, Z^*, \tau) = T_{\eta,\gamma}(x, y, Z^*, \tau) =$$
$$= H_{\eta,\gamma}(\tau)\cos(\psi_\eta x)\sin(\psi_\gamma^* y).$$

Преобразуя по Лапласу при нулевых начальных условиях функцию выхода и входное воздействие и взяв их отношение, получим передаточную функцию рассматриваемого объекта по выбранной пространственной моде. В рассматриваемом случае эта передаточная функция может быть записана в виде

$$W_{\eta,\gamma}(s) = H_{\eta,\gamma}(s)/C_{\eta,\gamma}(s).$$

Записывая передаточную функцию рассматриваемого объекта с использованием обобщенной координаты, получим

$$W(G, s) = H(G/s)/C(G, s),$$

$$G = (\psi_\eta)^2 + (\psi_\gamma^*)^2;\ \psi_\eta = \pi\eta/L_x;\ \psi_\gamma^* = \pi\gamma/L_y,\ \eta, \gamma = \overline{1,\infty}.$$

В рассматриваемом случае поставленная задача решалась численно. Для этого с использованием математической модели объекта была составлена численная модель и определена реакция объекта на выбранные пространственные моды входного воздействия (определена функция $H(G/\tau)$ для выбранных значений η и γ). Схема дискретизации объекта управления приведена на рис. 5.

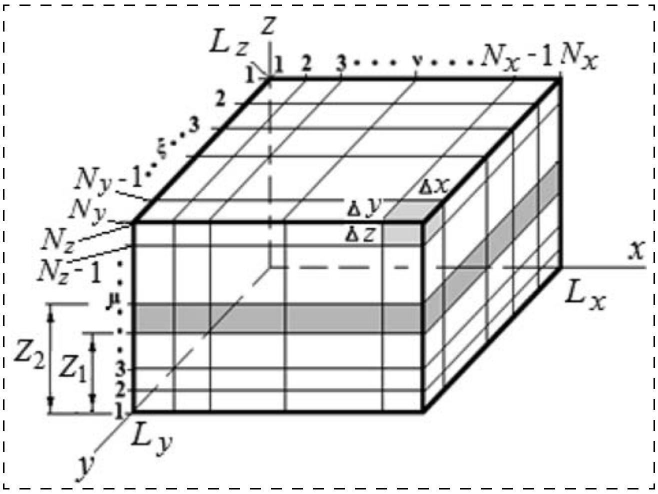

Рис. 5. Схема дискретизации

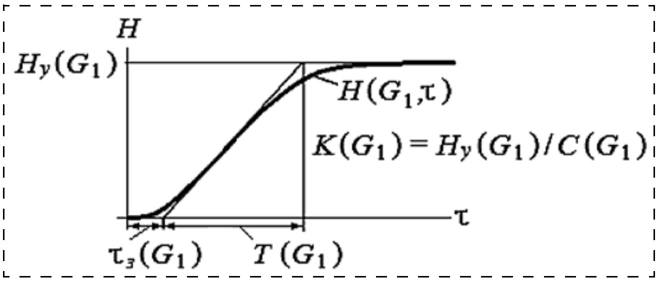

Рис. 6. График функции $H(G_1, \tau)$

При моделировании объекта управления были выбраны следующие значения переменных: $C(G) = 1000$; $N_x = 8$; $N_y = 8$; $N_z = 30$;

$\Delta x = L_x/(N_x - 1)$; $\Delta y = L_y/(N_y - 1)$; $\Delta z = L_z/(N_z - 1)$.

Как известно, в методике синтеза распределенных регуляторов используют динамические характеристики двух пространственных мод.

Положим, что в результате моделирования определены функции $H(G_1, \tau)$ и $H(G_3, \tau)$. График функции $H(G_1, \tau)$ приведен на рис. 6.

Аппроксимируем передаточную функцию по выбранным пространственным модам передаточной функцией вида

$$W(G, s) = \frac{k(G)}{T(G)s+1}\,\mathbf{e}^{-s\tau_3(G)}, \qquad (12)$$

где τ_3 — запаздывание.

В результате численного моделирования получены следующие значения параметров передаточной функции:

$$\eta = 1,\ \gamma = 1,\ G_1 = 66{,}87,\ K(G_1) = 0{,}28224,$$
$$T(G_1) = 2058{,}18858,\ \tau_3(G_1) = 449{,}3909;$$

$$\eta = 3,\ \gamma = 3,\ G_3 = 602{,}06,\ K(G_3) = 0{,}04322,$$
$$T(G_3) = 1120{,}09085,\ \tau_3(G_3) = 314{,}6384.$$

С использованием вычисленных параметров и соотношений (12) были построены годографы для выбранных пространственных мод (рис. 7, 8).

Модифицированный пространственный годограф объекта управления приведен на рис. 9.

Формулировка критерия устойчивости Найквиста для рассматриваемых систем приведена в работе [19]. Получено, что для устойчивости замкнутых систем достаточно, чтобы модифицированный пространственный годограф не охватывал линию: Re $= -1$, Im $= 0$, G.

В работах [1, 2] разработан специальный набор распределенных звеньев, из которых формируется структура распределенного регулятора. Используем рассмотренные звенья в процедуре синтеза. Передаточная функция пространственно-усилительного звена записывается в виде

$$W(x,\ y) = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} - \frac{1}{n_1}\nabla^2\right],\ 1 \leqslant n_1 < \infty.$$

Рассматриваемое звено с использованием обобщенной координаты G [1—5] может быть записано в виде

$$W(G) = E_1[(n_1 - 1)/n_1 + G/n_1],\ 1 \leqslant n_1 < \infty. \quad (13)$$

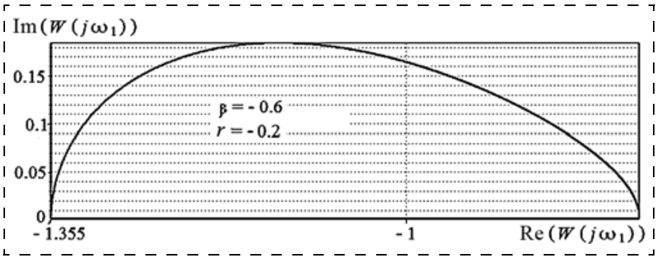

Рис. 7. Модифицированный годограф для G_1

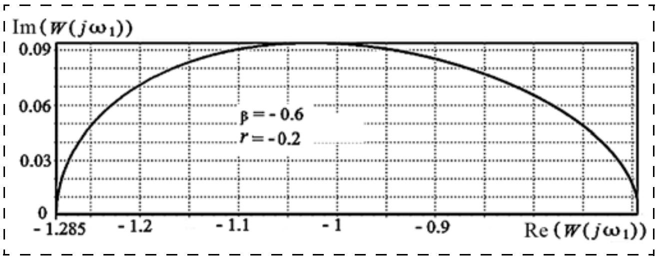

Рис. 8. Модифицированный годограф для G_3

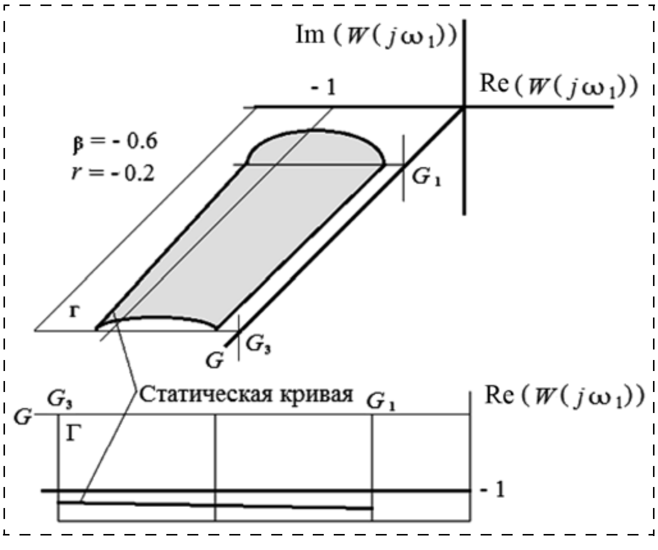

Рис. 9. Модифицированный пространственный годограф объекта управления

Рис. 10. Модифицированный годограф регулятора $W_{ПИ}$

Рассмотрим ***методику синтеза распределенного пропорционально-интегрального закона управления***. Эта методика использует методы синтеза регуляторов для сосредоточенных и распределенных систем управления и распадается на следующие этапы.

1. Синтезируем пропорционально-интегральный закон управления. В процессе синтеза пропорционально-интегрального закона управления по первой пространственной моде ($\eta = 1$, $\gamma = 1$, $G_1 = 66{,}87$, $K(G_1) = 0{,}28224$, $T(G_1) = 2058{,}18858$, $\tau_3(G_1) = 449{,}3909$) частотным методом сосредоточенных систем [19] получен регулятор, передаточная функция которого имеет вид

$$W_{ПИ} = K + 1/(Ts),$$

где $K = 3{,}889$, $T = 1168{,}70456$.

Модифицированный годограф рассматриваемого регулятора приведен на рис. 10.

2. Определяем параметры пространственно-усилительного звена.

2.1. Синтезируемый регулятор состоит из двух блоков — распределенного пространственно-усилительного звена и $W_{ПИ}$, параметры которого определены выше:

$$R = E_1\left[\frac{n_1 - 1}{n_1} - \frac{1}{n_1}\nabla^2\right](3{,}889 + 1/(1168{,}70456s)).$$

Вычислим желаемые коэффициенты усиления пространственно-усилительного звена ($\bar{M}_i$) по выбранным пространственным модам (G_1 и G_3). При этом воспользуемся годографами объекта управления для выбранных пространственных мод (см. рис. 7, 8), модифицированным годографом регулятора $W_{ПИ}$ (рис. 10) и критерием устойчивости Найквиста:

$$\bar{M}_1 = -1/(-1{,}3155 \cdot 3{,}8907) = 0{,}1897,$$

$$\bar{M}_3 = -1/(-1{,}285 \cdot 3{,}8907) = 0{,}1999.$$

2.2. Для определения параметров распределенного регулятора воспользуемся соотношениями (13):

- для G_1:

$$W(G_1) = \bar{M}_1 = E_1[(n_1 - 1)/n_1 + G_1/n_1]; \quad (14)$$

- для G_3:

$$W(G_3) = \bar{M}_3 = E_1[(n_1 - 1)/n_1 + G_3/n_1]. \quad (15)$$

Решая систему уравнений (14), (15), определим значения параметров пространственно-усилительного звена:

$$n_1 = \frac{-1 + \Delta M - \Delta M G_1 + G_3}{\Delta M - 1} =$$

$$= \frac{-1 + 1{,}054 - 1{,}054 \cdot 66{,}87 + 602{,}06}{0{,}054} = 9243;$$

$$E_1 = \overline{M}_1 / [(n_1 - 1)/n_1 + G_1/n_1] =$$

$$= 0{,}1999 / \left[(9243 - 1)/9243 + \frac{66{,}89}{9243}\right] = 0{,}186, \quad (16)$$

где $\Delta M = \dfrac{\overline{M}_3}{\overline{M}_1} = \dfrac{0{,}1999}{0{,}1897} = 1{,}054$.

Структурная схема синтезированной системы управления приведена на рис. 11.

По результатам моделирования замкнутой системы управления построен график функции рассогласования

$$\Delta T(x, y, z = Z^*, \tau) = 100 - T(x, y, z = Z^*, \tau)$$

для заданной точки $z = Z^*$, $x = 0{,}2$, $y = 0{,}3$ (рис. 12). Аналогичные графики могут быть построены и для других точек.

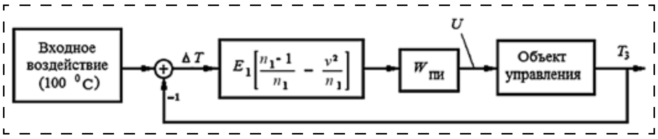

Рис. 11. Структурная схема системы управления

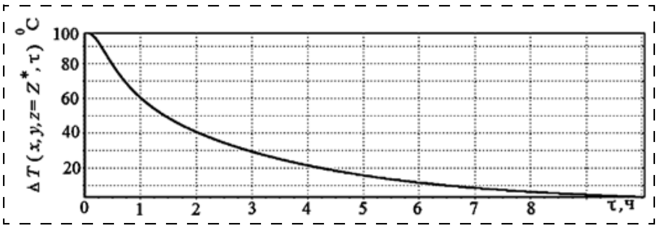

Рис. 12. График функции рассогласования

Как показывают результаты моделирования, методика качественного распределения пространственных мод может быть с успехом использована при анализе и синтезе распределенных систем управления.

Заключение

Необходимость формирования областей качественного расположения пространственных мод, параметры которых связаны с показателями качества процессов проектируемой системы, диктуется практической необходимостью повышения качества процессов управления в распределенных системах. Результаты моделирования показывают, что предлагаемая методика синтеза, использующая модифицированный годограф и частотные методы синтеза сосредоточенных и распределенных систем, может быть использована при синтезе различных законов управления для систем с распределенными параметрами. По сути, эта методика распадается на два этапа: на первом этапе методами сосредоточенных систем синтезируется заданный закон управления, на втором этапе с использованием модифицированного годографа разомкнутой системы синтезируются параметры пространственно-усилительного блока.

Список литературы

1. **Першин И. М.** Синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: РИО КМВ, 2002. 212 с.
2. **Малков А. В., Першин И. М.** Системы с распределенными параметрами. Анализ и синтез. М.: Научный мир, 2012. 476 с.
3. **Бутковский А. Г.** Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977. 320 с.
4. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
5. **Григорьев В. В., Быстров С. В. Першин И. М.** Синтез распределенных регуляторов: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПб. ГУИТМО, 2011. 200 с.
6. **Martirosyan A. V., Martirosyan K. V., Pershin I. M.** Analysis of the Caucasus Mineral Waters' Field's Modeling // Modern Applied Science. 2015. Vol. 9, N. 1. P. 204—210.
7. **Chernyshev A. B., Martirosyan K. V.** Analisys of the nonlinear distributed control system's sustainability // Journal of Mathematics and Statistics. 2014. 10 (3). P. 316—321.
8. **Martirosyan A. V., Martirosyan K. V., Kapylova T. S.** The model of mineral water deposits sustainable management using the decision support system // World Applied Sciences Journal. 2013. N. 27. P. 101—106.
9. **Martirosyan A. V., Martirosyan K. V.** Modeling of information system "Caucasus Mineral Water's hydromineral resources" // 4th International Scientific and Practical Conference "Science and Society". London: SCIEURO, 2013. P. 16—24.
10. **Martirosyan A. V., Yanukyan E. G., Martirosyan K. V.** Methods of complex object's transfer function calculation for distributed control system // Journal of Mathematics and Statistics. 2014. N. 10 (3). P. 23—27.
11. **William By Porter A.** Sensitivity problems in distributive systems // Int. J. Control. 1976. V. 5. P. 159—177.
12. **Першин М. И.** Исследование погрешностей динамических характеристик распределенных объектов при аппроксимации // Современная наука и инновации. 2014. Вып. № 4 (8). С. 46—50.
13. **Pasca La., Levis A. H. and Jin V. Y.-Y.** On the design of Distributed Organisational structures // Automatica. 1988. V. 24, N. 1. P. 81—86.
14. **Grigoriev V. V., Mansurova O. K.** Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems. Preprints of 5 th IFAK Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01). St.-Petersburg, 2001.
15. **Григорьев В. В., Быстров С. В., Рабыш Е. Ю., Мансурова О. К.** Использование условий качественной неустойчивости для оценки динамических процессов // Научно-технический вестник СПБГУИТМО. Санкт-Петербург. 2012. Т. 77. № 1. С. 41—46.
16. **Быстров С. В., Григорьев В. В., Рабыш Е. Ю., Мансурова О. К.** Анализ качества переходных процессов в непрерывных и дискретных системах на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 9. С. 32—36.
17. **Григорьев В. В., Быстров С. В., Наумова А. К., Рабыш Е. Ю., Черевко Н. А.** Использование условий качественной экспоненциальной устойчивости для оценки динамических процессов // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 6. С. 24—30.
18. **Григорьев В. В., Быстров С. В., Мансурова О. К., Першин И. М.** Анализ устойчивости линейных систем с распределенными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 9. С. 2—5.
19. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. М.: Энергия, 1981. 303 с.

Qualitative Distribution of Modes in the Systems with Distributed Parameters

V. V. Grigoriev, grigvv@yandex.ru✉, **S. V. Bystrov,** sbystrov@mail.ru,
ITMO University, St.Petersburg, 197101, Russian Federation,
O. K. Mansurova, erke7@mail.ru,
National Mineral Resources University (Mining University), St. Petersburg, 199106, Russian Federation,
I. M. Pershin, ivmp@yandex.ru,
North-Caucasian Federal University, Pyatigorsk Branch, Pyatigorsk, 357501, Russian Federation,
M. I. Pershin, Pershinmaksim1992@yandex.ru,
Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation

Corresponding author: **Grigoriev V. V.,** D. Sc., Professor,
ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation
e-mail: grigvv@yandex.ru

Received on November 11, 2016
Accepted on February 24, 2016

There are many continuous technological processes of high power, with huge material and energy flows. Their parameters can change not only in time, but also in space. The hydrolithospheric processes, the processes connected with heat treatment, diffusion, etc. (in the control theory this class of processes is called objects with the distributed parameters), can serve as an example. Mathematical models of such processes either are not known, or described by the equations in private derivatives. The main approaches, used for analysis of the linear objects with the distributed parameters [6—14] are based on the theory of differential equations in private derivatives and frequency methods. Without a loss of the linear objects with the distributed parameters we will set the task of application of the qualitative theory [15—19] for a synthesis of the control systems with the distributed parameters. We should note that for the distributed objects a decomposition of their mathematical models on the own vector — functions of the operators of objects, the own movement of which is described by large dimensional differential equations, takes place. The technique of synthesis of the distributed regulators using the qualitative theory is considered on the example of construction of the closed control systems of the heat distribution process in a plate of the final sizes.

Keywords: *distributed systems, areas location parameters, Nyquist criterion, qualitative distribution*

Acknowledgements: This work was supported by the leading universities of Russian Federation (grant 074-U01) the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Project no. 14.Z50.31.0031.

For citation:

Grigoriev V. V., Bystrov S. V., Mansurova O. K., Pershin I. M., Pershin M. I. Qualitative Distribution of Modes in the Systems with Distributed Parameters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 7, pp. 445—452.

DOI: 10.17587/mau.17.445-452

References

1. **Pershin I. M.** *Sintez sistem s raspredelennymi parametrami* (Synthesis of distributed parameter systems), RIO KMV, Piatigorsk, 2002, 212 p. (in Russian).
2. **Malkov A. V., Pershin I. M.** *Sistemy s raspredelennymi parametrami. Analiz i sintez* (Distributed-parameter systems. Analysis and Synthesis), Moscow, Nauchniy mir, 2012, 476 p. (in Russian).
3. **Butkovsky A. G.** *Strukturnaya teoriya raspredelennykh sistem* (Structural Theory of Distributed Systems), Moscow, Nauka, 1977, 320 p. (in Russian).
4. **Sirazetdinov T. K.** Optimization of distributed parameter systems, Moscow, Nauka, 1977, 479 p. (in Russian).
5. **Grigoriev V. V., Bystrov S. V., Pershin I. M.** *Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* (Synthesis of distributed controllers. (Tutorial)), Saint-Petersburg, Publishing house of Saint-Petersburg SU ITMO, 2011, 200 p. (in Russian).
6. **Martirosyan A. V., Martirosyan K. V., Pershin I. M.** Analysis of the Caucasus Mineral Waters' Field's Modeling, *Modern Applied Science*, 2015. vol. 9, no. 1, pp. 204—210.
7. **Chernyshev A. B., Martirosyan K. V.** Analisys of the nonlinear distributed control system's sustainability, *Journal of Mathematics and Statistics*, 2014, no. 10 (3), pp. 316—321.
8. **Martirosyan A. V., Martirosyan K. V., Kapylova T. S.** The model of mineral water deposits sustainable management using the decision support system, *World Applied Sciences Journal*, 2013, no. 27, pp. 101—106.
9. **Martirosyan A. V., Martirosyan K. V.** Modeling of information system "Caucasus Mineral Water's hydromineral resources", *4th International Scientific and Practical Conference "Science and Society"*, London, SCIEURO, 2013, pp. 16—24.
10. **Martirosyan A. V., Yanukyan E. G., Martirosyan K. V.** Methods of complex object's transfer function calculation for distributed control system, *Journal of Mathematics and Statistics*, 2014, no. 10 (3), pp. 23—27.
11. **William By Porter A.** Sensitivity problems in distributive systems, *Int. J. Control,* 1976, vol. 5, pp. 159—177.
12. **Pershin I. M.** *Issledovanie pogreshnostei dinamicheskikh kharakteristik raspredelennykh ob"ektov pri approksimatsii* (Investigation of dynamic characteristics of errors in the approximation of distributed objects), *Modern science and innovation*, 2014, iss. № 4 (8), pp. 46—50 (in Russian).
13. **Pasca La., Levis A. H., Jin V. Y.-Y.** On the design of Distributed Organisational structures, *Automatica*,1988, vol. 24, no. 1, pp. 81—86.
14. **Grigoriev V. V., Mansurova O. K.** Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems, *Preprints of 5th IFAK Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01)*, St. Petersburg, 2001.
15. **Grigoriev V. V., Bystrov S. V., Mansurova O. K., Rabish E. Y.** *Ispol'zovanie uslovii kachestvennoi neustoichivosti dlya otsenki dinamicheskikh protsessov* (Using terms of quality of instability for the evaluation of dynamic processes), *Scientific and Technical Gazette SPBGUITMO*, St. Petersburg, 2012, vol. 77, no. 1, pp. 41—46 (in Russian).
16. **Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Rabish E. Y., Mansurova O. K.** *Analiz kachestva perekhodnykh protsessov v nepreryvnykh i diskretnykh sistemakh na osnove uslovii kachestvennoi eksponentsial'noi ustoichivosti* (Analysis of the quality of transition processes in continuous and discrete systems based on high-quality conditions for exponential stability), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 9, pp. 32—36 (in Russian).
17. **Grigoriev V. V., Bystrov S. V., Naumov A. K., Rabysh E. Y., Cherevko N. A.** *Ispol'zovanie uslovii kachestvennoi eksponentsial'noi ustoichivosti dlya otsenki dinamicheskikh protsessov* (Using qualitative conditions of exponential stability for the evaluation of dynamic processes), *Izv. Vuzov. Priborostroenie*, 2011, vol. 54, no. 6, pp. 24—30 (in Russian).
18. **Grigoriev V. V., Bystrov S. V., Mansurova O. K., Pershin I. M.** *Analiz ustoichivosti lineinykh sistem s raspredelennymi parametrami* (Stability analysis of linear systems with distributed parameters), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2013, no. 9, pp. 2—5 (in Russian).
19. **Voronov A. A.** *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya. Osobye lineinye i nelineinye sistemy* (Fundamentals of the theory of automatic control. Special linear and nonlinear systems), Moscow, Energia, 1981, 303 p. (in Russian).