

**А. А. Колесников**, Засл. деятель науки и техники РФ, д-р техн. наук, проф., ankolesnikov@sfedu.ru,

**Ал. А. Колесников**, канд. техн. наук, доц., alkolesnikov@sfedu.ru,

**А. А. Кузьменко**, канд. техн. наук, доц., aakuzmenko@sfedu.ru,

Институт компьютерных технологий и информационной безопасности  
Южного федерального университета, г. Таганрог

## Методы АКАР и бэкстеппинг в задачах синтеза нелинейных систем управления<sup>1</sup>

*Проводится сравнение известного метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), развитого в работах научной школы Южного федерального университета, с методом бэкстеппинга (обход интегратора), предложенного П. Котковичем и его сотрудниками. Приведены численные примеры и результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие преимущества метода АКАР для решения задач синтеза законов управления для произвольного класса нелинейных объектов.*

**Ключевые слова:** нелинейные системы управления, синтез управления, бэкстеппинг, синергетическая теория управления, метод АКАР

### Введение

Окружающая нас среда (природная, социально-экономическая, технологическая) — это мир сложных суперсистем разнообразной природы, которые представляют собой комплекс различных подсистем, выполняющих определенные функции и связанных между собой процессами интенсивного динамического взаимодействия и обмена энергией, веществом и информацией. Указанные суперсистемы являются нелинейными, многомерными и многосвязными, в которых протекают сложные переходные процессы и возникают критические и хаотические режимы. Проблемы системного синтеза, т.е. поиска общих объективных законов управления в такого рода динамических системах, по-прежнему являются весьма актуальными, трудными и во многом практически малодоступными для современной теории управления. Эта теория позволила успешно освоить методы централизованного внешнего воздействия на различные объекты, однако наступило время пересмотра силовых подходов в задачах управления и перехода на идеи самоорганизации — новой науки синергетики (в США — это хаосодинамика, во Франции — наука о диссипативных структурах, а в России и Германии — это синергетика и нелинейная динамика). Отсюда вытекает насущная потребность поиска путей целевого воздействия на процессы самоорганизации в конструируемых динамических системах. Другими словами, возникла необходимость создания способов формирования и резонансного возбуждения *внутренних* сил взаимодействия,

которые могли бы породить в фазовом пространстве синтезируемых систем желаемые структуры — аттракторы, адекватные физической сущности соответствующей системы.

Процессы управления и самоорганизации пронизывают окружающий нас мир систем разнообразной природы. Мировоззренческая значимость науки о процессах управления и самоорганизации определяется тем важным обстоятельством, что, как утверждают ученые Санкт-Петербургского государственного университета в своей работе "Достаточно общая теория управления", "...всякий процесс в Мироздании может быть интерпретирован в качестве *процесса управления или самоуправления*. По этой причине понятийный и терминологический аппарат именно теории управления как таковой является обобщающим, что позволяет с его помощью *единообразно описывать* разные процессы: *общеприродные, биологические, технические...*". С точки зрения современной науки о сложных системах с этим базовым утверждением невозможно не согласиться. По существу, это *концепция единства процессов самоорганизации и управления* (КЕПСУ), впервые развитая в работах научной школы кафедры синергетики и процессов управления Южного федерального университета и положенная в основу синергетической теории нелинейного системного синтеза [1, 2]. На основе этой теории разработан метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), позволивший успешно решить проблему синтеза систем управления нелинейными, многомерными и многосвязными объектами [3—5].

В настоящее время в теории управления развит целый ряд методов синтеза нелинейных систем уп-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00782-а).

равления, обладающих как своими достоинствами, так и значительными недостатками [6, 7]. В связи с этим в предлагаемом цикле работ сравниваются существующие методы современной теории управления (адаптивного, оптимального, робастного, интеллектуального и других видов управления) с методом АКАР, позволяющим в должной мере решить проблемы синтеза нелинейных систем управления.

Таким образом, одной из фундаментальных и актуальнейших проблем современной науки о сложных системах является развитие высокоэффективной прикладной теории и методов *нелинейного системного синтеза*.

### О бэкстеппинге

В современной литературе трудно указать метод синтеза нелинейных систем, полностью сравнимый по своей эффективности с методом АКАР. К достаточно популярным методам нелинейного синтеза в настоящее время относится так называемый бэкстеппинг. Данный метод нашел свое развитие в модифицированных вариациях [9, 10], в совместном использовании с методами адаптивного и робастного управления, в том числе с использованием нейронных сетей и нечетких алгоритмов управления [11–14]. Однако определенная эффективность бэкстеппинга проявляется в основном в простых скалярных случаях синтеза нелинейных систем. Увеличение размерности и сложности модели объекта управления приводит к существенным трудностям получения аналитического выражения закона управления.

В научной литературе [8, 15] известен метод нелинейного преобразования координат динамических систем, математическая модель которых может быть представлена одной из возможных *канонических* форм. Предположим, что математическая модель объекта управления с одним входом  $u$  представлена в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})u; y = h(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}(\cdot)$ ,  $\mathbf{B}(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$  — дифференцируемые нелинейные функции своих аргументов;  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  — вектор состояния объекта;  $u$  — скалярное управление;  $y$  — скалярный измеряемый выход объекта.

Тогда можно поставить задачу приведения модели исходного объекта (1) к некоторой "типовой" форме. Эта задача решается применением такого преобразования  $\mathbf{z} = \Gamma(\mathbf{x}) = \text{col}(\gamma_1(\mathbf{x}), \dots, \gamma_n(\mathbf{x}))$  координат объекта (1), чтобы уравнение состояния в новых переменных перешло в одну из возможных канонических форм, в частности, линейную в виде системы уравнений Коши. Для объекта (1) такой формой может служить система уравнений [15]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2, \dot{z}_2(t) = z_3, \dots, \dot{z}_{p-1}(t) = z_p; \\ \dot{z}_p(t) &= a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u. \end{aligned} \quad (2)$$

Более общей является каноническая форма:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2, \dot{z}_2(t) = z_3, \dots, \dot{z}_{p-1}(t) = z_p; \\ \dot{z}_p(t) &= a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u; \\ \dot{z}_{p+1}(t) &= \dot{\phi}_{p+1}(\mathbf{z}); \dots, \dot{z}_n = \phi_n(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^n$  — новый вектор состояния объекта (1). Здесь функции  $\phi_j(\cdot)$  необходимо определить, а новые переменные  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , находятся по формуле [15]

$$z_k = \gamma_k(\mathbf{x}) = L_f^k h, \quad (4)$$

где  $L_f^1 h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $L_f^k h = \frac{\partial (L_f^{k-1} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x})$  — производные Ли функции выхода по векторному полю  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  системы (1). Искомые функции  $\phi_i(\mathbf{z})$ ,  $p + 1 \leq i \leq n$ , в соотношении (3) выбирают как

$$\phi_i(\mathbf{z}) = L_f \gamma_i(\Gamma^{-1}(\mathbf{z})). \quad (5)$$

Преобразования  $\gamma_k(\mathbf{x})$  (4) и  $\phi_i(\mathbf{z})$  (5) должны быть таковы, чтобы обратимое отображение  $\Gamma(\mathbf{x})$  удовлетворяло условиям:

$$\text{rang} \Gamma(\mathbf{x}) = n, \quad (6)$$

$$L_g \gamma_i(\mathbf{x}) = 0. \quad (7)$$

В работе [15] показана принципиальная возможность приведения исходных уравнений движения объекта (1) к желаемой канонической форме (2) или (3) при выборе функций  $\gamma_i$ , удовлетворяющих условиям (6), (7). Такое преобразование координат получило название "feedback linearizable form", т.е. линеаризация обратной связью или "точная" линеаризация уравнений объекта [15]. Указанное преобразование означает, что можно найти некоторый закон обратной связи, обеспечивающий для объекта (1) в новой системе координат линейную динамику. Отличительной особенностью применения метода преобразования координат является необходимость выполнения рангового ограничения (6), (7), предполагающего существование обратного (гладкого) отображения  $\Gamma^{-1}(\mathbf{z})$  в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ . Такие условия выполняются далеко не всегда, в частности, для объекта (1) эти условия могут не выполняться при  $p < n$ . Сама по себе процедура поиска преобразования  $\Gamma(\mathbf{x})$  трудоемка, а уравнения объекта (1) часто не могут быть полностью сведены к линейным уравнениям типа (2), которые нередко остаются нелинейными, хотя и более упрощенной структуры.

### Метод АКАР-ОИ

В известном обзоре [15] задача синтеза законов управления нелинейными динамическими объектами (1), сводимыми путем описанного выше преобразования к уравнениям вида (2) или (3), названа задачей АКАР-ОИ. Суть аббревиатуры "АКАР-ОИ" сводится к следующему. Дело в том, что термин

АКАР — аналитическое конструирование агрегированных регуляторов — был впервые предложен в известных работах [16—19], а термин ОИ — обход интегратора (бэкстеппинг, *integrator backstepping*) — в работах [20—24]. В работе [15] показано, что оба метода — АКАР и ОИ для объектов вида (2) приводят к аналогичным законам управления. Действительно, для простейших нелинейных объектов, сводимых к структуре вида (2) или (3) из последовательно включенных интеграторов, охваченных обратными связями, оба метода формально приводят к совпадающим результатам. Однако это относится только лишь к простейшей, скалярной версии метода АКАР [16, 17], который был предложен значительно ранее метода ОИ. Что же касается векторной версии метода АКАР, впервые предложенной еще в работе [18], то такого аналога в методе ОИ практически не существует. Отметим, что в известном обзоре П. Кокотовича [23] бэкстеппинг отнесен к числу "эпохальных нововведений" теории управления 90-х годов XX века.

Следуя работе [15], конкретизируем метод синтеза нелинейных законов управления на основе процедуры АКАР-ОИ. Пусть для нелинейного объекта

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1) + g(x_1)u, \quad x_1, u \in \mathfrak{R}, \quad (8)$$

найдено управление  $u = \alpha_1(x_1)$ , обеспечивающее асимптотическую устойчивость относительно  $x_1 = 0$ . Это устанавливается с помощью функции Ляпунова  $V(x_1)$ , производная которой по времени в силу (8) удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)\alpha_1(x_1)] \leq -W(x_1), \quad (9)$$

где  $W(x_1)$  — положительно определенная функция. Тогда для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f(x_1) + g(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= u, \end{aligned} \quad (10)$$

где переменная  $x_2$  доступна прямым измерениям, управление вида

$$\begin{aligned} u &= -(x_2 - \alpha_1(x_1)) + \\ &+ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)x_2] - \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} g(x_1) \end{aligned} \quad (11)$$

обеспечивает ограниченность  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и стремление  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $(x_2 - \alpha_1) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Введем теперь в рассмотрение агрегированную макропеременную  $\psi_1 \triangleq x_2 - \alpha_1(x_1)$  и перепишем систему (10) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f(x_1) + g(x_1)(\alpha_1(x_1) + \psi_1), \\ \dot{\psi}_1(t) &= u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)x_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда производная по времени функции Ляпунова  $V_1 = V(x_1) + (1/2)\psi_1^2$  в силу (11), (12) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} [f(x_1) + g\alpha_1(x_1)] + \\ &+ \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} g\psi_1 - \psi_1^2 - \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} g\psi_1 \leq -W(x_1) - \psi_1^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Неравенство (13) следует из теоремы Ла Салля [15].

### Сравнение методов

Как указывал И. Ньютон, "при изучении наук примеры не менее поучительны, чем правила". В связи с этим, учитывая теоретическую и прикладную значимость рассматриваемой в статье проблемы системного синтеза для современной теории управления, важно провести сравнение метода АКАР с различными методами аналитического конструирования регуляторов на конкретных примерах синтеза систем. Разумеется, что такое сравнение тех или иных методов лучше всего проводить для объектов, обладающих особыми свойствами, например, желательно, чтобы они были нелинейными и многомерными. В этом отношении нет особого смысла показывать какие-то так называемые "достоинства" тех или иных методов синтеза линейных систем, как это до сих пор продолжается в работах многих авторов! Методы синтеза линейных систем — это вчерашний день теории управления. В связи с этим использование метода АКАР для синтеза линейных регуляторов имеет смысл только с точки зрения демонстрации его методических преимуществ. Покажем сравнение методов АКАР и бэкстеппинга на ряде широко известных задач синтеза нелинейного управления.

*Пример 1.* Для сравнительной иллюстрации методов АКАР и ОИ рассмотрим задачу синтеза стабилизирующего управления нелинейным объектом вида

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \quad \dot{x}_2(t) = \sin x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3(t) = u. \quad (14)$$

В соответствии с методом ОИ на первом шаге вводится макропеременная вида  $\psi_1 = x_1$ , и первая функция стабилизации (внутреннее управление) выбирается в виде  $\alpha_1 = -\psi_1 = -x_1$ . Назначая первую функцию Ляпунова  $V_1 = (1/2)x_1^2$  и вводя вторую макропеременную  $\psi_2 = x_2 - \alpha_1$ , определяем вторую функцию стабилизации [15]:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\psi_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \sin x_1 = \\ &= -2x_1 - 2x_2 - \sin x_1. \end{aligned}$$

Выбирая далее  $V_2 = V_1 + (1/2)\psi_2^2$  и вводя третью макропеременную  $\psi_3 = x_3 - \alpha_2$ , определяем действительный закон управления:

$$u = -\psi_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (\sin x_1 + x_3) - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial \psi_2} = -4x_1 - (5 + \cos x_1)x_2 - 3x_3 - 3\sin x_1. \quad (15)$$

В соответствии с методом АКАР синтез стабилизирующего управления осуществляется в обратном порядке. Сначала вводится макропеременная вида  $\psi_1 = x_3 - \alpha_2$  и задается сопровождающий функционал:

$$J_1 = \int_0^{\infty} [m_1^2 \psi_1^2 + c_1^2 \dot{\psi}_1^2(t)] dt, \quad (16)$$

где  $m_1 > 0$ ,  $c_1 > 0$  — постоянные коэффициенты. Управление, доставляющее минимум введенному функционалу, имеет вид [17]

$$u = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (\sin x_1 + x_3) - \frac{1}{T_1} (x_3 - \alpha_2), \quad (17)$$

где  $T_1 = c_1/m_1$ . Движение вдоль многообразия  $\psi_1 = 0$  описывается уравнениями

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}, \quad \dot{x}_{2\psi}(t) = \sin x_{1\psi} + \alpha_2.$$

Используя вторую макропеременную

$$\psi_2 = \beta_{21}x_1 + x_2 + \alpha_1(x_1),$$

находим внутреннее управление  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = -\frac{\beta_{21}}{T_2} x_1 - \left( \beta_{21} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{1}{T_2} \right) x_2 - \sin x_1 - \frac{1}{T_2} \alpha_1(x_1), \quad (18)$$

минимизируя функционал вида (16) с заменой  $\psi_1$  на  $\psi_2$  и  $T_2 = c_2/m_2$ . Движение вдоль многообразия  $\psi_2 = 0$  описывается уравнением

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = -\beta_{21}x_{1\psi} - \alpha_1(x_1),$$

и, следовательно,  $\alpha_1(x_1)$  может быть положено тождественно равным нулю. Тогда, найдя  $\alpha_2$  (18) и подставив его в соотношение (17), определяем внешний закон управления:

$$u = -\frac{\beta_{21}}{T_1 T_2} x_1 - \left( \frac{\beta_{21}}{T_1} + \frac{\beta_{21}}{T_2} + \frac{1}{T_1 T_2} + \cos x_1 \right) x_2 - \left( \beta_{21} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) x_3 - \left( \beta_{21} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \sin x_1. \quad (19)$$

Коэффициенты  $T_1$ ,  $T_2$  и  $\beta_{21}$  могут быть выбраны для обеспечения желаемого характера и времени переходных процессов. Сравнивая выражение (15) и (19), убеждаемся, что закон (19) при соответствующем выборе коэффициентов  $\beta_{21}$  и  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ , совпадает с законом (15), т. е. методы АКАР и ОИ приводят для объекта (14) к законам управления

одинаковой структуры [15]. Следует подчеркнуть, что закон управления (19) имеет обобщенный характер, что позволяет сформировать разные свойства замкнутой системы.

*Пример 2.* Применим метод АКАР для решения задачи синтеза законов управления нелинейным объектом

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1 + x_1^3 x_2^2; \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(x_3 + x_4); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4; \quad \dot{x}_4(t) = u. \end{aligned} \quad (20)$$

Задача синтеза законов управления объектом (20) на основе процедуры бэкстеппинга рассмотрена в работе [23]. Введем согласно методу АКАР следующую макропеременную:

$$\psi = x_3 + x_4 + \alpha |x_2^m| + \beta x_2^2 + \gamma x_1^4, \quad (21)$$

где  $m \leq 1$ . Тогда, подставляя  $\psi$  (21) в функциональное уравнение метода АКАР

$$T\dot{\psi}(t) + \psi = 0,$$

в силу уравнений объекта (20) находим базовый закон управления

$$u = -x_4 - (\alpha m |x_2^m| + 2\beta x_2^2)(x_3 + x_4) - 4\gamma x_1^4 (x_1^2 x_2^2 - 1) - \psi/T. \quad (22)$$

Этот закон переводит изображающую точку замкнутой системы (20), (21) в окрестность многообразия  $\psi = 0$  (21), движение вдоль которого описывается следующими декомпозированными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1\psi}(t) &= -x_{1\psi} + x_{1\psi}^3 x_{2\psi}^2; \\ \dot{x}_{2\psi}(t) &= -\alpha x_{2\psi} |x_{2\psi}^m| - \beta x_{2\psi}^3 - \gamma x_{1\psi}^4 x_{2\psi}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для определения условий асимптотической устойчивости системы (23) введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(t) = 0,5x_{1\psi}^2 + 0,5x_{2\psi}^2,$$

производная которой в силу уравнений (23) равна

$$\dot{V}(t) = -x_{1\psi}^2 - \alpha x_{2\psi}^2 |x_{2\psi}^m| - \beta x_{2\psi}^4 - (\gamma - 1)x_{1\psi}^4 x_{2\psi}^2. \quad (24)$$

Из выражения (24) следует, что при выполнении условий

$$\alpha > 0; \beta \geq 0; \gamma \geq 1 \quad (25)$$

функция  $\dot{V}(t)$  будет определено отрицательна для всех областей изменения координат  $x_{1\psi}$  и  $x_{2\psi}$ . Это означает, что при выполнении неравенств (25) декомпозированная система (23) обладает свойством асимптотической устойчивости в целом. Отсюда следует, что и замкнутая система (20), (22) при  $T > 0$  будет также асимптотически устойчива относительно состояния  $x_{1\psi} = x_{2\psi} = 0$ .

Выясним теперь условия устойчивости декомпозированной системы относительно координат  $x_{2\psi}$  и  $x_{4\psi}$ . На инвариантном многообразии  $\psi = 0$  (21) эти координаты равны

$$x_{3\psi} + x_{4\psi} = -\alpha|x_{2\psi}^m| - \beta x_{2\psi}^2 - \gamma x_{1\psi}^4, \quad (26)$$

откуда следует, что при  $x_{1\psi} = x_{2\psi} = 0$  координаты  $x_{3\psi}$  и  $x_{4\psi}$  также равны нулю. Если же положить, например,  $m = 0$ , то, согласно соотношению (24), система (23) остается асимптотически устойчивой относительно состояния равновесия  $x_{1\psi} = x_{2\psi} = 0$ . Однако в этом случае, согласно процедуре метода АКАР и соотношению (26), координаты  $x_{3\psi} = -\alpha$  и  $x_{4\psi} = 0$ . Заметим, кстати, что модель (20) в своей структуре имеет два последовательно включенных на входе интегратора, что редко встречается на практике. Тогда равенство  $x_{3\psi} = -\alpha$  будет означать некоторое установившееся положение координаты  $x_3$  на выходе второго интегратора. В выражениях для макропеременной  $\psi$  (21) и закона управления (22) можно положить  $\beta = 0$ , что не изменит условий асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Если же в соотношениях (21) и (22) положить  $\alpha = 0$ , то в этом случае закон управления (22) примет вид

$$u_1 = -\frac{1}{T}x_3 - \left(1 + \frac{1}{T}\right)x_4 - 2\beta x_2^2 \left(x_3 + x_4 + \frac{0,5}{T}\right) + 4\gamma x_1^4 - 4\gamma x_1^4 \left(x_1^2 x_2^2 + \frac{0,25}{T}\right). \quad (27)$$

По своей структуре закон управления (27), за исключением последнего члена, совпадает с законом

$$u_B = -x_3 - 2x_4 - x_2^2(x_3 + x_4 + 2) + 4x_1^4, \quad (28)$$

полученным в работе [23] методом "бэкстеппинг" после доказательства теорем об асимптотической устойчивости с использованием двух функций Ляпунова. Заметим, что закон управления (22) получен методом АКАР в результате простых аналитических процедур.

Следует отметить, что при использовании законов управления  $u_1$  (27) и  $u_B$  (28) переходный процесс по координате  $x_2$  будет затянут. Об этом свидетельствует структура уравнений системы (23), в которой при быстром затухании координаты  $x_1$  решение второго уравнения будет слабозувствительным к малым значениям координаты  $x_2$ , что и приведет к затягиванию переходного процесса.

На рис. 1–3 приведены результаты моделирования замкнутой системы (20), (22) для различных коэффициентов закона управления  $u$  (22), в том числе: на рис. 1 — для  $\alpha = \beta = T = \gamma = m = 1$ ; на рис. 2 — для  $\alpha = 10, \beta = 0, T = m = 1, \gamma = 20$ ; на рис. 3 — для  $\alpha = \beta = T = \gamma = 1, m = 0$ . Эти результаты в полной мере подтверждают теоретические положения и эффективность метода АКАР. Для сравнения на рис. 4 показаны результаты моделирования замкнутой системы (20), (28).

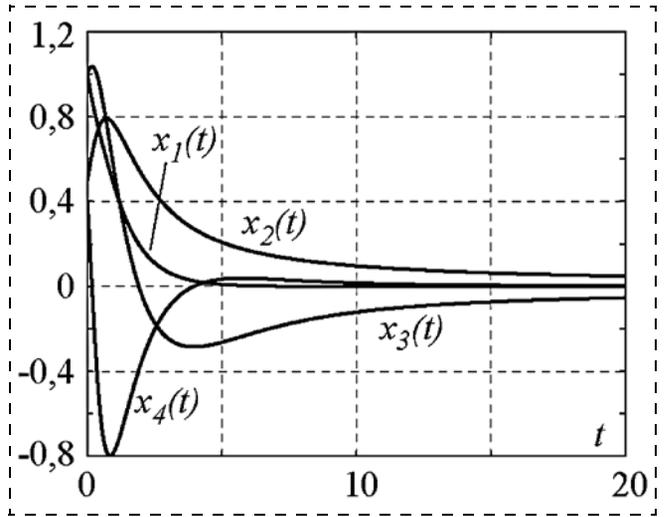


Рис. 1. Переходные процессы в системе (20), (22) при  $\alpha = \beta = T = \gamma = m = 1$

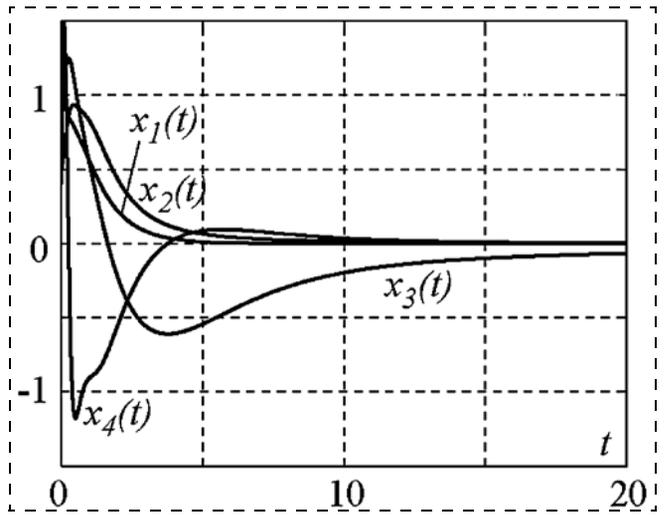


Рис. 2. Переходные процессы в системе (20), (22) при  $\alpha = 10, \beta = 0, T = m = 1, \gamma = 20$

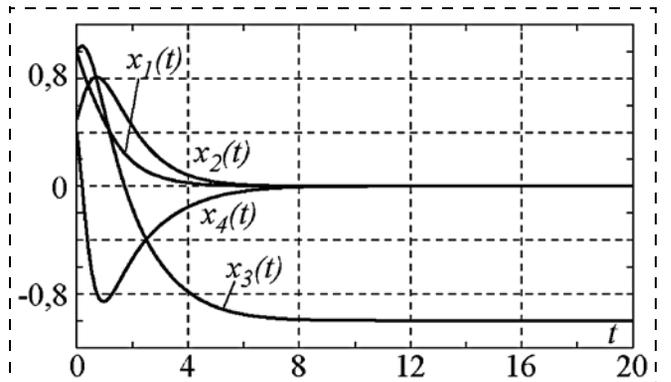


Рис. 3. Переходные процессы в системе (20), (22) при  $\alpha = \beta = T = \gamma = 1, m = 0$

Пример 3. Как указывает П. Кокотович [23], бэкстеппинг обычно применяется к системам без обратных-прямых частей. Применение этого метода

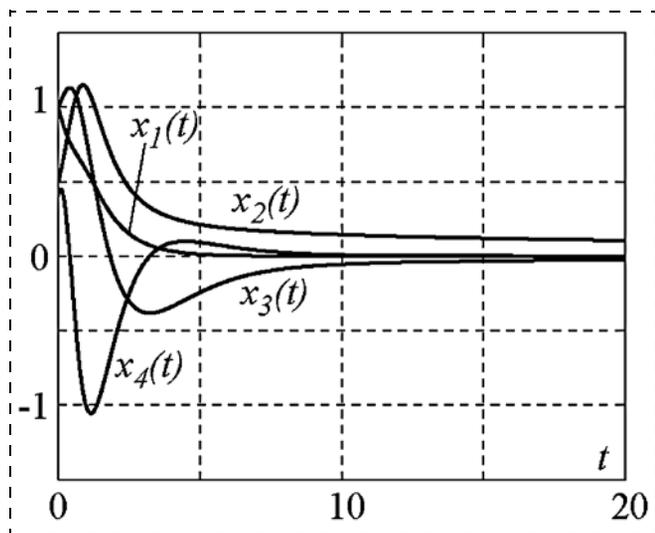


Рис. 4. Переходные процессы в системе (20), (28)

затруднено для систем, требующих повышенного быстродействия, например, вида

$$\dot{x}_1(t) = x_2 + x_3^2; \dot{x}_2(t) = x_3; \dot{x}_3(t) = u, \quad (29)$$

где  $x_3^2$  в первом уравнении создает обратно-прямую часть в обход  $x_2$  — интегратора. В связи с этим Тил [24] предложил использовать аналог бэкстеппинга в виде так называемой форвардинг-конструкции для решения задачи управления системами типа (29). При этом возникают затруднения с обеспечением достаточной области устойчивости. Применим метод АКАР для решения задачи эффективного управления системами вида (29) с обратными частями. Согласно методу АКАР введем макропеременную

$$\psi_1 = x_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \beta_1 x_2^3. \quad (30)$$

Тогда, подставляя  $\psi_1$  (30) в функциональное уравнение

$$T_1 \dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, \quad T_1 > 0, \quad (31)$$

в силу уравнений объекта (29) находим закон управления

$$u_1 = -\gamma_1 x_2 - \gamma_1 x_3^2 - (\gamma_2 + 3\beta_1 x_2^2) x_3 - \psi_1 / T_1. \quad (32)$$

Закон  $u_1$  (32) переводит изображающую точку (ИТ) замкнутой системы (29), (32) на инвариантное многообразие  $\psi_1 = 0$ , движение вдоль которого относительно координаты  $x_{2\psi}$  описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x}_{2\psi}(t) + (\gamma_2 + 3\beta_1 x_{2\psi}^2 + \gamma_1 \dot{x}_{2\psi}(t)) \dot{x}_{2\psi}(t) + \gamma_1 x_{2\psi} = 0. \quad (33)$$

Условия устойчивости уравнения (33) и, следовательно, замкнутой системы (29), (32) имеют вид

$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0 \quad (34)$$

в области малых отклонений ( $\dot{x}_{2\psi}^2 \approx 0$  и  $x_{2\psi}^2 \dot{x}_{2\psi} \approx 0$ ) и в области, где выполняется следующее неравенство:

$$\gamma_2 + 3\beta_1 x_2^2 + \gamma_1 x_3 \geq 0. \quad (35)$$

Это неравенство можно усилить при  $\beta_1 = 0$ , т. е.

$$x_{30} > -\gamma_2 / \gamma_1. \quad (36)$$

Условия (35), (36) означают, что синтезированная система (29), (32) чувствительна к отрицательным начальным условиям по координате  $x_{30} < 0$  и, кроме того, введение члена  $3\beta_1 x_2^2$  в закон управления  $u_1$  (32) позволяет расширить область устойчивости замкнутой системы.

В области малых отклонений уравнение (33) принимает форму

$$\tau^2 \ddot{x}_{2\psi}(t) + 2\xi\tau \dot{x}_{2\psi}(t) + x_{2\psi} = 0,$$

где  $\xi = 0,5\gamma_2 / \sqrt{\gamma_1}$  — декремент затухания,  $\tau = 1 / \sqrt{\gamma_1}$  — постоянная времени. Отсюда следует, что с увеличением коэффициента  $\gamma_1$ , с одной стороны, повышается быстродействие системы, однако с другой, согласно (35), уменьшается область устойчивости системы в случае отрицательных начальных условий по координате  $x_{30} < 0$ . При выборе декремента  $\xi = 1$  между коэффициентами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  можно установить связь  $\gamma_2 = 2\sqrt{\gamma_1}$ .

На рис. 5 представлены результаты моделирования замкнутой системы (29), (32) при  $\beta_1 = 0$  и выполнении неравенства (36). На рис. 6 и 7 представлены результаты моделирования замкнутой системы (29), (32) при  $\beta_1 = 1$  и  $\beta_1 = 10$  соответственно.

Выявим условия повышения робастности к отрицательным начальным условиям по координате  $x_{30} < 0$ . Для замкнутой системы (29), (32) рассмот-

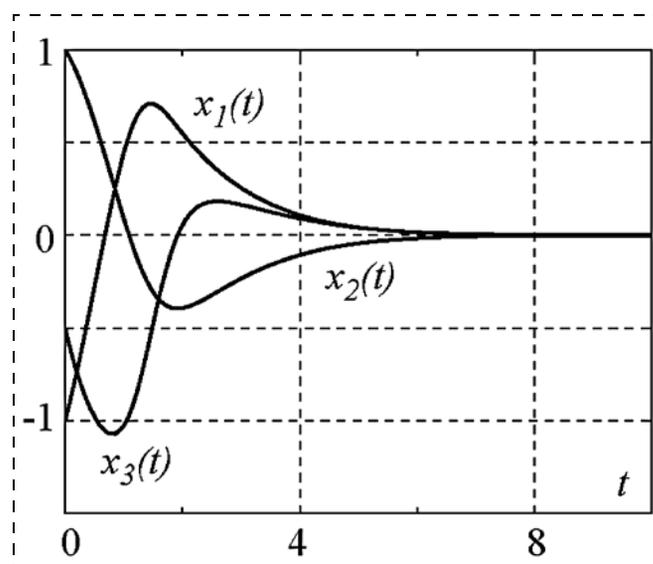


Рис. 5. Переходные процессы в системе (29), (32) при  $\beta_1 = 0$  и выполнении неравенства (36)

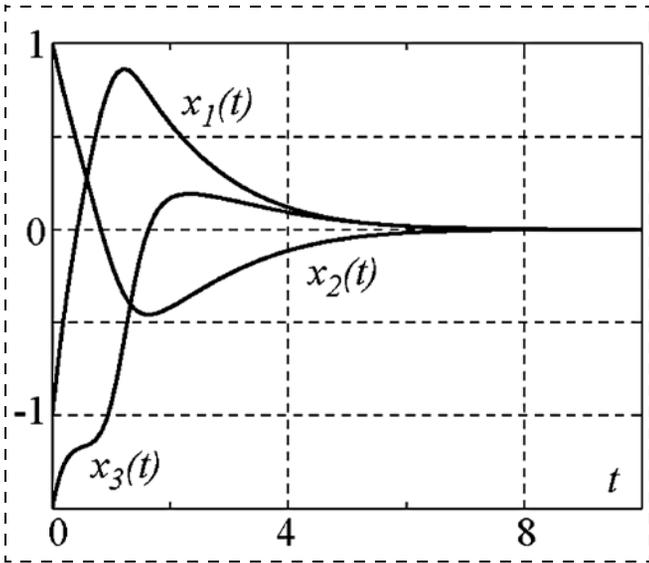


Рис. 6. Переходные процессы в системе (29), (32) при  $\beta_1 = 1$

рим ее уравнение движения относительно координаты  $x_{3\psi}$  на многообразии  $\psi_1 = 0$  при  $\beta_1 = 0$ :

$$\ddot{x}_{3\psi}(t) + (2\gamma_1 x_3 + \gamma_2)\dot{x}_{3\psi}(t) + \gamma_1 x_{3\psi} = 0, \quad (37)$$

которое можно получить путем дифференцирования по времени уравнения (33). Очевидно, что уравнение (37) устойчиво относительно  $x_{3\psi} = 0$  при выполнении неравенства

$$x_{3\psi} \geq -\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}, \quad (38)$$

которое является более ограничительным по сравнению с условием (36).

Итак, для обеспечения условий устойчивости синтезированной системы (29), (32) необходимо, чтобы выполнялось неравенство (38). Это означает, что для выполнения условия (36) на координату  $x_3$

следует наложить ограничение  $|x_3| \leq b = \frac{\gamma_2}{2\gamma_1}$ .

Согласно методу АКАР для этого введем следующую макропеременную:  $\psi_2 = x_3 + b \operatorname{th}(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \beta_1 x_3^2)$ . Тогда на основе функционального уравнения

$$T_2 \dot{\psi}_2(t) + \psi_2 = 0, \quad T_2 > 0$$

и уравнений объекта (29) можно найти закон управления

$$u_2 = -\frac{b(\gamma_1 x_2 + \gamma_1 x_3^2 + \gamma_2 x_3 + 3\beta_1 x_2^2 x_3)}{\operatorname{ch}^2(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \beta_1 x_3^2)} - \frac{1}{T_2} \psi_2. \quad (39)$$

Отметим, что в физическом плане координата  $x_3$  — это положение интегрирующего исполнительного механизма, которое всегда ограничено. На рис. 8 приведены результаты моделирования замкнутой системы (29), (39) для  $\beta_1 = 0$  и  $x_{30} < 0$ , а на рис. 9 — для  $\beta_1 = 10$  и  $x_{30} < 0$ . Эти результаты подтверждают

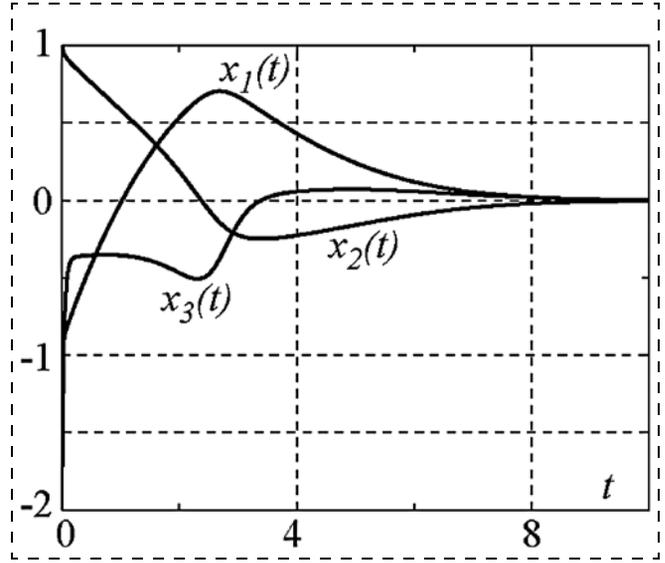


Рис. 7. Переходные процессы в системе (29), (32) при  $\beta_1 = 10$

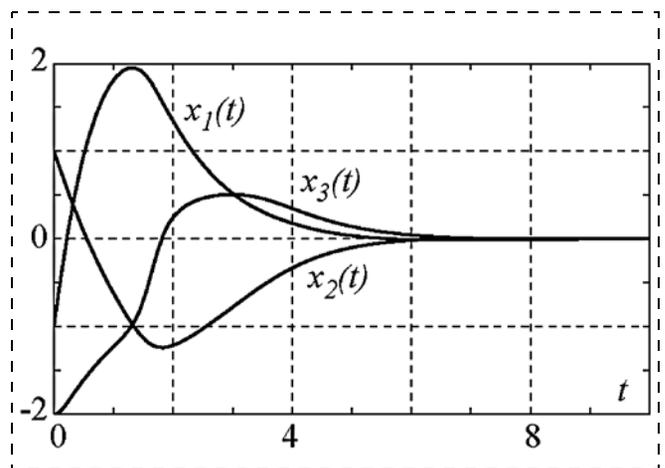


Рис. 8. Переходные процессы в системе (29), (39) при  $\beta_1 = 0$  и  $x_{30} < 0$

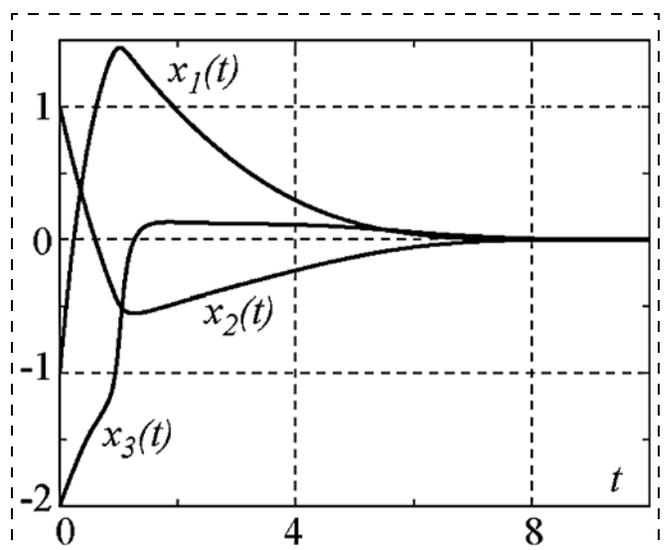


Рис. 9. Переходные процессы в системе (29), (39) при  $\beta_1 = 10$  и  $x_{30} < 0$

основные теоретические положения и эффективность метода АКАР.

Таким образом, применение метода АКАР для управления нелинейными системами, например вида (29), имеющими обратную-прямую часть, позволяет аналитически синтезировать эффективные законы управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость замкнутым системам.

*Пример 4.* Следующим примером, приведенным в работе [23] и вызвавшим затруднения с непосредственным применением бэкстеппинга, является задача синтеза стабилизирующего закона управления нелинейным объектом

$$\dot{x}_1(t) = x_1 + x_2 + x_3^3; \dot{x}_2(t) = x_3; \dot{x}_3(t) = u. \quad (40)$$

Объект (40) по своей структуре аналогичен объекту (29), за исключением того, что в первом уравнении системы (40) обратная-прямая часть представлена не квадратичной, а кубической нелинейностью  $x_3^3$  и, кроме того, также добавлен член  $x_1$ . В работе [23] на основе теоремы пассивности, линейного матричного неравенства и пакета программ предложена процедура численного определения коэффициентов нелинейного закона управления

$$u_B = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \beta x_3^3. \quad (41)$$

Покажем здесь, что задача синтеза закона управления объектом (40) решается методом АКАР аналитически и весьма элегантно в результате простых и ясных процедур. Согласно методу АКАР введем следующую макропеременную:

$$\psi_1 = x_3 + \gamma_1 x_1 + \sin \gamma_2 x_2. \quad (42)$$

Тогда на основе функционального уравнения

$$T_1 \dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, T_1 > 0 \quad (43)$$

и в силу уравнений объекта (40) найдем закон управления

$$u_1 = -\gamma_1(x_1 + x_2 + x_3^3) - \gamma_2 x_3 \cos \gamma_2 x_2 - \frac{1}{T_1} \psi_1. \quad (44)$$

Этот закон, согласно (43), через время  $t = (3-4)T_1$  переводит ИТ замкнутой системы (40), (44) из произвольных начальных условий  $x_{j0}$  в малую окрестность инвариантного многообразия  $\psi_1 = 0$  (42). Движение системы вдоль  $\psi_1 = 0$  описывается относительно координаты  $x_2$  дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}_{2\psi}(t) + (\gamma_2 \cos \gamma_2 x_{2\psi} - 1 + \gamma_1 \dot{x}_{2\psi}^2(t)) \dot{x}_{2\psi}(t) + \gamma_1 x_{2\psi} - \sin \gamma_2 x_{2\psi} = 0. \quad (45)$$

Декомпозированное уравнение (45) относится к классу уравнений маятникового типа, обладающих в зависимости от выбора коэффициентов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  разнообразными движениями — от регулярных ко-

лебаний до аperiodических переходных процессов. Дивергенция поля этого уравнения равна

$$\operatorname{div} \dot{x}_{2\psi}(t) = 1 - \gamma_2 \cos \gamma_2 x_{2\psi} - 3\gamma_1 \dot{x}_{2\psi}^2(t). \quad (46)$$

Из выражения (46) следует, что при  $\gamma_2 > 0$  дивергенция всегда отрицательна, т.е. синтезированная система (40), (44) будет обладать некоторым притягивающим множеством. В случае же, когда  $\gamma_2 < 1$  и, тем более,  $\gamma_2 < 0$ , дивергенция может изменить свой знак при некоторых значениях переменных  $x_{2\psi}$  и  $\dot{x}_{2\psi}(t)$ . Согласно критерию Бендиксона, это означает, что в системе имеет место предельный цикл. Действительно, проведем линеаризацию функций  $\sin \gamma_2 x_2 \cong \gamma_2 x_2$  и  $\cos \gamma_2 x_2 \cong 1$ . Тогда макропеременная  $\psi_1$  (42) и уравнение (45) примут соответственно вид

$$\psi_1 = x_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \quad (47)$$

и

$$\ddot{x}_{2\psi}(t) + (\gamma_2 - 1 + \gamma_1 \dot{x}_{2\psi}^2(t)) \dot{x}_{2\psi}(t) + (\gamma_1 - \gamma_2) x_{2\psi} = 0. \quad (48)$$

Уравнение (48) — это известное в теории нелинейных колебаний уравнение Релея, которое при  $\gamma_1 > \gamma_2$  и  $\gamma_2 < 1$  или  $\gamma_2 < 0$  обладает одним устойчивым предельным циклом, а при  $\gamma_2 \geq 1$  будет асимптотически устойчивым относительно  $x_{2\psi} = \dot{x}_{2\psi}(t) = 0$ . В этом случае, согласно (47), закон управления (44) принимает частный вид

$$u_1 = -\gamma_1 \left( 1 + \frac{1}{T_1} \right) x_1 - \gamma_2 \left( 1 + \frac{1}{T_1} \right) x_2 - \left( \gamma_2 + \frac{1}{T_1} \right) x_3 - \gamma_1 x_3^3, \quad (49)$$

который по своей структуре совпадает с законом (41), полученным в работе [23] на основе процедуры бэкстеппинга. Отметим, что закон (49) получен в результате простых аналитических процедур, а выбор его коэффициентов непосредственно связан со свойствами нелинейного декомпозированного уравнения (48), которое при  $\gamma_1 > \gamma_2 > 1$  будет асимптотически устойчивым. В режиме малых отклонений уравнение (48) имеет декремент затухания

$$\xi = \frac{0,5(\gamma_2 - 1)}{\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}}, \gamma_1 > \gamma_2 > 1. \quad (50)$$

Если в соотношении (50) положить  $\xi = 1$ , то между коэффициентами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  можно установить следующую связь:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + 0,25(\gamma_2 - 1)^2. \quad (51)$$

Выражения (50) и (51) позволяют выбрать коэффициенты закона управления  $u_1$  (49), при этом член  $\gamma_1 \dot{x}_{2\psi}^2$  усиливает демпферные свойства системы (48).

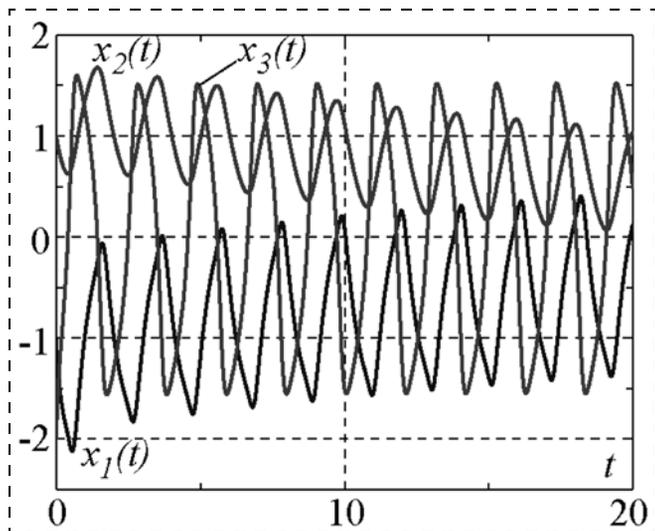


Рис. 10. Переходные процессы в системе (40), (41) при  $T_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 2, \gamma_2 = 2,25$  соответственно

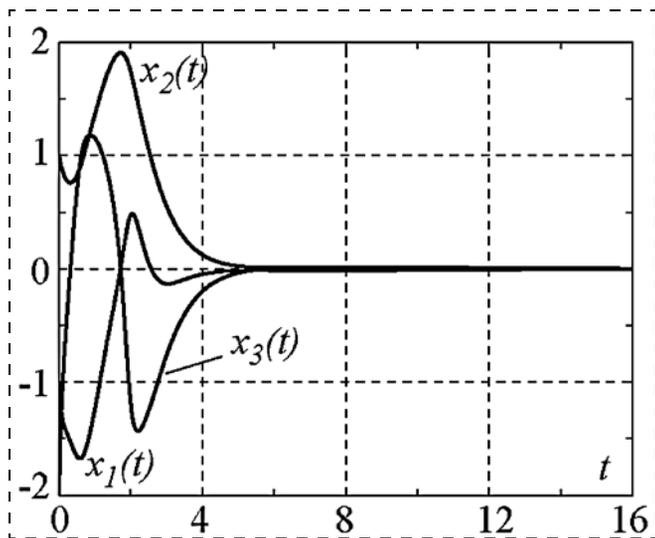


Рис. 11. Переходные процессы в системе (40), (44) при  $T_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 2, \gamma_2 = 2,25$  соответственно

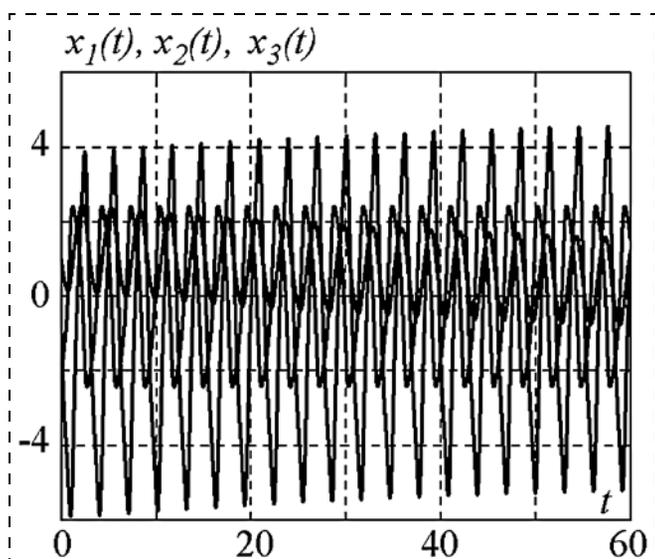


Рис. 12. Переходные процессы в системе (40), (41) при  $T_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 0,5, \gamma_2 = 0,5625$  соответственно

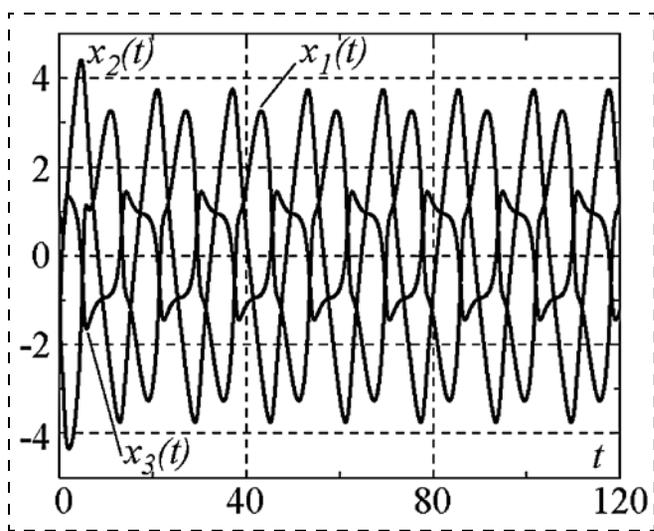


Рис. 13. Переходные процессы в системе (40), (44) при  $T_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 0,5, \gamma_2 = 0,5625$  соответственно

На рис. 10, 11 представлены результаты моделирования при  $T_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 2, \gamma_2 = 2,25$  соответственно, а на рис. 12, 13 — при  $T_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 0,5, \gamma_2 = 0,5625$  соответственно, которые подтверждают теоретические положения и прикладную эффективность метода АКАР.

Таким образом, эффективно решена задача аналитического синтеза стабилизирующих законов управления объектом (40). Эти законы гарантируют асимптотическую устойчивость в целом замкнутой системы и обеспечивают желаемый характер переходных процессов. Следует подчеркнуть, что дело не столько в наличии нелинейности  $x_3^3$  — обратной-прямой части в обход  $x_2$  — интегратора, на что обращается особое внимание в работе [23], а в четности или нечетности степени указанной нелинейности. Если в задаче (29) нелинейность  $x_2^3$  была четной степени, что привело к необходимости ограничения координаты  $|x_3| \leq b$  по модулю, то в задаче (40) указанная нелинейность  $x_3^3$  имеет нечетную степень, что позволило весьма элегантно разрешить методом АКАР задачу синтеза стабилизирующих законов управления.

### Заключение

В работе проведено сравнение метода АКАР с бэкстепингом на конкретных примерах синтеза нелинейных систем. Данные примеры наглядно демонстрируют явные преимущества метода АКАР перед бэкстепингом как в отношении процедур аналитического конструирования нелинейных регуляторов и их физической обоснованности, обоснованности и однозначности выбора настроечных параметров регуляторов, так и обеспечения свойств асимптотической устойчивости замкнутых систем. В последующих статьях данного цикла нами будет продемонстрировано сравнение метода АКАР с методами оптимального, адаптивного и интеллектуального управления нелинейными объектами управления.

## Список литературы

1. Колесников А. А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
2. Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: КомКнига, 2006. 240 с.
3. Колесников А. А., Веселов Г. Е., Попов А. Н. и др. Синергетические методы управления сложными системами: Механические и электромеханические системы. М.: КомКнига, 2006. 304 с.
4. Колесников А. А., Кузьменко А. А., Веселов Г. Е. Новые технологии проектирования современных систем управления процессами генерирования электроэнергии: учебное издание. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 280 с.
5. Колесников А. А. Новые нелинейные методы управления полетом. М.: Физматлит, 2013. 196 с.
6. Ioannou P. A., Sun J. Robust Adaptive Control. New York: Dover, 2012. 848 p.
7. Isidori A. Nonlinear control systems an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 545 p.
8. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
9. Фуртат И. Б. Модифицированный алгоритм обратного обхода интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 2—7.
10. Krstić M., Kanellakopoulos M., Kokotović P. V. Adaptive nonlinear control without overparametrization // Systems & Control Letters. 1992. Vol. 19, Iss. 3. P. 177—185.
11. Polycarpou M. M., Ioannou P. A. A robust adaptive nonlinear control design // Automatica. 1996. Vol. 32, Iss. 3. P. 423—427.
12. Li Y., Qiang S., Zhuang X., Kaynak O. Robust and adaptive backstepping control for nonlinear systems using RBF neural networks // IEEE Transactions on Neural Networks. 2004. Vol. 15, Iss. 3. P. 693—701.
13. Bouabdallah S., Siegwart R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro Quadrotor // Proc. of IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation, 18—22 April 2005, Spain. Vol. 2005. P. 2247—2252.
14. Tong S., Liu C., Li Y. Fuzzy-adaptive decentralized output-feedback control for large-scale nonlinear systems with dynamical uncertainties // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2010. Vol. 18, Iss. 5. P. 845—861.
15. Дружинина М. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу // Автоматика и телемеханика. 1996. № 2. С. 3—33.
16. Колесников А. А. Аналитический синтез нелинейных систем, оптимальных относительно линейных агрегированных переменных // Известия вузов. Электромеханика. 1985. № 11. С. 9—18.
17. Колесников А. А. Аналитическое конструирование нелинейных агрегированных регуляторов по заданной совокупности инвариантных многообразий. I. Скалярное уравнение // Известия вузов. Электромеханика. 1987. № 3. С. 100—108.
18. Колесников А. А. Аналитическое конструирование нелинейных агрегированных регуляторов по заданной совокупности инвариантных многообразий. II. Векторное уравнение // Известия вузов. Электромеханика. 1987. № 5. С. 5—17.
19. Колесников А. А. Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем. М.: Энергоатомиздат, 1987. 160 с.
20. Byrnes C. I., Isidori A. New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Systems & Control Letters. 1989. Iss. 12. P. 437—442.
21. Tsiniias J. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization // Mat. Contr. Signals Syst. 1989. Vol. 2, Iss. 12. P. 343—357.
22. Kokotovic P. V., Sussman H. J. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems // Systems & Control Letters. 1989. Iss. 13. P. 125—133.
23. Kokotovic P. V., Arcak M. Constructive Nonlinear Control: progress in the 90'S // Prepr. 14<sup>th</sup> IFAC World Congress. Beijing, China, 1999.
24. Teel A. R. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // Systems & Control Letters. 1992. Iss. 18. P. 165—171.

## Backstepping and ADAR Method in the Problems of Synthesis of the Nonlinear Control Systems

A. A. Kolesnikov, ankolesnikov@sfedu.ru, Al. A. Kolesnikov, alkolesnikov@sfedu.ru,  
A. A. Kuz'menko, aakuzmenko@sfedu.ru, Southern Federal University,  
Institute of Computer Technologies and Information Security, Taganrog, 347922, Russian Federation

Corresponding author: Kuz'menko Andrew A., Ph. D., Associate Professor, Southern Federal University,  
Institute of Computer Technologies and Information Security, Taganrog, 347922, Russian Federation  
e-mail: aakuzmenko@sfedu.ru

Received on March 31, 2016

Accepted on April 07, 2016

*In this paper the authors explore comparison of the famous method of analytical design of the aggregated regulators (ADAR), developed in the works of the scientific school of the Southern Federal University (Russia), and the method of backstepping. In a well-known review of P. Kokotović, the method of backstepping was mentioned as a milestone innovation in the control theory of the last decade of the 20th century. For the simplest nonlinear objects, which are derived to the structure of the serially connected integrators looped with feedbacks, the ADAR method and the backstepping method are formally deduced to the same results. But any variation of this structure, as well as an increase of the dimension and complexity of the control object model, leads to major difficulties for deriving of the analytical expression of the control law. The ADAR method of the Synergetic Control Theory is a way of forming and resonance exciting of the internal forces of co-interaction. These forces emerge in the desired structures, i.e. attractors, in a phase space of the designed systems, which are confirmed with a physical essence of the above system. In the paper the comparison of ADAR method with the backstepping method is presented with well-known examples of the nonlinear control systems' design problems. The provided numerical examples and computer simulation results clearly demonstrate the explicit advantages of ADAR method in comparison with the backstepping method by the following criteria: (i) the nonlinear regulators of the analytical design procedure and regulators of the physical validity; (ii) regulator settings of the selection validity and its value; and (iii) provision of the closed-loop system's asymptotic stability.*

**Keywords:** control design, nonlinear control systems, backstepping technique, synergetic control theory, ADAR method

**Acknowledgements:** This work was supported by RFBR (grant № 14-08-00782-a).

For citation:

Kolesnikov A. A., Kolesnikov Al. A., Kuz'menko A. A. Backstepping and ADAR Method in the Problems of Synthesis of the Non-

linear Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 7, pp. 435—445.

DOI: 10.17587/mau.17.435-445

## References

1. **Kolesnikov A. A.** *Sinergeticheskaja teorija upravlenija* (Synergetic control theory), Moscow, Jenergoatomizdat, 1994, 344 p. (in Russian).
2. **Kolesnikov A. A.** *Sinergeticheskie metody upravlenija slozhnymi sistemami: teorija sistemnogo sinteza* (Complex systems synergetic control methods: system synthesis theory), Moscow, KomKniga, 2006, 240 p. (in Russian).
3. **Kolesnikov A. A., Veselov G. E., Popov A. N.** et al. *Sinergeticheskie metody upravlenija slozhnymi sistemami: Mehanicheskie i jelektromehaničeskije sistemy* (Complex systems synergetic control methods: mechanical and electromechanical systems), Moscow, KomKniga, 2006, 304 p. (in Russian).
4. **Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A., Veselov G. E.** *Novye tehnologii proektirovanija sovremennyh sistem upravlenija processami generirovanija jelektroenergii* (New design technologies of modern process control systems for the electricity generating), Moscow, Publishing house "MEI", 2011, 280 p. (in Russian).
5. **Kolesnikov A. A.** *Novye nelinejnye metody upravlenija poletom* (New nonlinear methods of flight control), Moscow, Fizmatlit, 2013, 196 p. (in Russian).
6. **Ioannou P. A., Sun J.** *Robust Adaptive Control*, New York, Dover, 2012, 848 p.
7. **Isidori A.** *Nonlinear control systems an introduction*, Berlin, Springer-Verlag, 1989, 545 p.
8. **Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L.** *Nelinejnoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* (Complex dynamic systems nonlinear and adaptive control), St. Petersburg, Nauka, 2000, 549 p. (in Russian).
9. **Furtat I. B.** *Modificirovannyj algoritm obratnogo obhoda integratora* (Modified algorithm of robust integrator backstepping), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 10, pp. 2–7 (in Russian).
10. **Krstić M., Kanellakopoulos M., Kokotović P. V.** Adaptive nonlinear control without overparametrization, *Systems & Control Letters*, 1992, vol. 19, iss. 3, pp. 177–185.
11. **Polycarpou M. M., Ioannou P. A.** A robust adaptive nonlinear control design, *Automatica*, 1996, vol. 32, iss. 3, pp. 423–427.
12. **Li Y., Qiang S., Zhuang X., Kaynak O.** Robust and adaptive backstepping control for nonlinear systems using RBF neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, vol. 15, iss. 3, pp. 693–701.
13. **Bouabdallah S., Siegwart R.** Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro Quadrotor, Proc. of IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation, 18–22 April 2005, Spain, vol. 2005, pp. 2247–2252.
14. **Tong S., Liu C., Li Y.** Fuzzy-adaptive decentralized output-feedback control for large-scale nonlinear systems with dynamical uncertainties, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, vol. 18, iss. 5, pp. 845–861.
15. **Druzhinina M. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L.** *Metody adaptivnogo upravlenija nelinejnymi ob'ektami po vyhodu* (Adaptive control methods for nonlinear objects output control), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1996, no. 2, pp. 3–33 (in Russian).
16. **Kolesnikov A. A.** *Analiticheskij sintez nelinejnyh sistem, optimal'nyh odnositel'no linejnyh agregirovannyh peremennyh* (Analytical synthesis of nonlinear systems, which optimal regarding to nonlinear aggregate variables), *Izvestija Vuzov. Jelektromehaničeskaja*, 1985, no. 11, pp. 9–18 (in Russian).
17. **Kolesnikov A. A.** *Analiticheskoe konstruirovanie nelinejnyh agregirovannyh reguljatorov po zadannoju sovkupnosti invariantnyh mnogobrazij. I. Skal'arnoe uravnenie* (Nonlinear aggregated regulators analytical design for a given set of invariant manifolds. I. Scalar control), *Izvestija Vuzov. Jelektromehaničeskaja*, 1987, no. 3, pp. 100–108 (in Russian).
18. **Kolesnikov A. A.** *Analiticheskoe konstruirovanie nelinejnyh agregirovannyh reguljatorov po zadannoju sovkupnosti invariantnyh mnogobrazij. II. Vektornoe uravnenie* (Nonlinear aggregated regulators analytical design for a given set of invariant manifolds. II. Vector control), *Izvestija Vuzov. Jelektromehaničeskaja*, 1987, no. 5, pp. 5–17 (in Russian).
19. **Kolesnikov A. A.** *Posledovatel'naja optimizacija nelinejnyh agregirovannyh sistem* (Sequential optimization of nonlinear aggregated systems), Moscow, Jenergoatomizdat, 1987, 160 p. (in Russian).
20. **Byrnes C. I., Isidori A.** New results and examples in nonlinear feedback stabilization, *Systems & Control Letters*, 1989, iss. 12, pp. 437–442.
21. **Tsinias J.** Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization, *Mat. Contr. Signals Syst.*, 1989, vol. 2, iss. 12, pp. 343–357.
22. **Kokotović P. V., Sussman H. J.** A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, 1989, iss. 13, pp. 125–133.
23. **Kokotović P. V., Arcak M.** Constructive Nonlinear Control: progress in the 90'S, *Prepr. 14<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Beijing, China, 1999.
24. **Teel A. R.** Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls, *Systems & Control Letters*, 1992, iss. 18, pp. 165–171.

УДК 28.50

DOI: 10.17587/mau.17.445-452

**В. В. Григорьев**, д-р техн. наук, проф., grigw@yandex.ru,  
**С. В. Быстров**, канд. техн. наук, доц., sbystrov@mail.ru,  
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий механики и оптики,  
**О. К. Мансурова**, канд. техн. наук, доц., erke7@mail.ru,  
Национальный минерально-сырьевой университет "Горный",  
**И. М. Першин**, д-р техн. наук, проф., ivmp@yandex.ru,  
Северо-Кавказский федеральный университет,  
**М. И. Першин**, аспирант, Pershinmaksim1992@yandex.ru,  
Южный федеральный университет

## Качественное распределение мод в системах с распределенными параметрами\*

Обсуждается разработка методики качественного распределения мод, определяющих показатели качества процессов в линейных системах с распределенными параметрами. Для использования частотных методов исследования линейных распределенных систем выполнена модификация критерия Найквиста, которая позволяет проводить анализ параметров областей расположения пространственных мод, связанных с показателями качества процессов.

**Ключевые слова:** распределенные системы, пространственные моды, критерий Найквиста, качественное распределение

\*Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01) Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z).