УДК 531.38; 62-50 DOI: 10.17587/mau.17.414-419

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorot@ntiustu.ru,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург,
Ю. Г. Мартышенко, канд. физ.-мат. наук, доц., j-mart@mail.ru,
Российский государственный университет нефти и газа, г. Москва

К задаче переориентации трехроторного гиростата при неконтролируемых внешних помехах

Решается задача трехосной переориентации асимметричного твердого тела посредством управляющих моментов внутренних сил, создаваемых двигателями-маховиками. Учитываются внешние неконтролируемые помехи, статистическое описание которых отсутствует. Указана оценка допустимых уровней помех в зависимости от заданных ограничений на управляющие моменты.

Ключевые слова: *переориентация трехроторного гиростата, неконтролируемые помехи*

Введение

Решается задача трехосной переориентации асимметричного твердого тела посредством управляющих моментов внутренних сил, создаваемых двигателями-маховиками. На управляющие моменты накладываются заданные геометрические ограничения. В процессе переориентации учитываются внешние неконтролируемые помехи, статистическое описание которых отсутствует.

Рассматриваемый процесс управления моделируется нелинейной конфликтно-управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей уравнения движения основного тела (динамические уравнения Эйлера и кинематические уравнения в переменных Родрига—Гамильтона), а также уравнения вращения маховиков. Для этой системы ставится соответствующая игровая задача управления по части переменных (по переменным, определяющим состояние основного тела) — задача гарантированного перевода системы из одного состояния равновесия в другое за конечное время при любых допустимых реализациях помех. Реализации управляющих моментов и помех считаются измеримыми функциями. Решения рассматриваемых систем дифференциальных уравнений понимаются в смысле А. Ф. Филиппова [8].

Управляющие моменты формируются по принципу обратной связи как нелинейные функции (разрывные) фазовых переменных рассматриваемой конфликтно-управляемой системы. Выбор таких функций определяется следующими обстоятельствами:

1) решение исходной нелинейной задачи переориентации можно свести к решению линейных игровых задач (линейных игровых антагонистических задач с нефиксированным временем окончания);

2) при отсутствии помех управляющие моменты являются субоптимальными по быстродействию;

3) переориентация достигается одним пространственным разворотом без дополнительных ограничений на характер результирующего движения (типа плоского поворота и др.).

Указана оценка допустимых уровней внешних неконтролируемых помех в зависимости от заданных ограничений на управляющие моменты. Данная оценка является достаточным условием, при котором обеспечивается гарантированное решение рассматриваемой задачи переориентации за конечное время посредством предложенной конструкции управляющих моментов. Дается итерационный алгоритм нахождения гарантированного времени переориентации.

Полученные результаты являются развитием результатов работ [1, 2]: 1) обоснована возможность использования указанного подхода для произвольного начального и конечного положения тела; 2) улучшена полученная в работе [2] оценка допустимых уровней неконтролируемых помех.

В случае управления посредством моментов внешних сил данный подход предложен в работе [3]. По поводу задач управления по части переменных см. работы [4, 5].

1. Постановка задачи

Пусть имеем асимметричное твердое тело, вдоль главных центральных осей инерции которого закреплены оси вращения однородных симметричных маховиков. Вращательное движение этой системы (гиростата) вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [6]

$$
\begin{aligned}
&(A_1 - J_1)x_1' = \\
&= (A_2 - A_3)x_2x_3 + J_2x_3\varphi_2' - J_3x_2\varphi_3' - u_1 + v_1; \\
&(A_2 - J_2)x_2' = \\
&= (A_3 - A_1)x_1x_3 + J_3x_1\varphi_3' - J_1x_3\varphi_1' - u_2 + v_2; \\
&(A_3 - J_3)x_3' = \\
&= (A_1 - A_2)x_1x_2 + J_1x_2\varphi_1' - J_2x_1\varphi_2' - u_3 + v_3; \\
&J_i(\varphi_i'' + x_i') = u_i,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

в которых A_i — главные центральные моменты инерции гиростата; x_i — проекции вектора угловой скорости основного тела на главные центральные оси $\mathbf{k}_i$ эллипсоида инерции гиростата; J_i, φ_i — осевые моменты инерции и углы поворота маховиков (роторов), оси вращения которых неподвижно закреплены вдоль осей $\mathbf{k}_i$. Управляющие моменты u_i (моменты внутренних сил) приложены к маховикам и создаются специальными двигателями. Моменты v_i характеризуют внешние силы и внешние неконтролируемые возмущения, действующие на основное тело.

Обозначим $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\varphi}'$ — векторы, состоящие соответственно из x_i, u_i, v_i, φ_i'. Здесь и далее $i = \overline{1, 3}$.

Наряду с уравнениями (1.1) рассмотрим кинематические уравнения в переменных Родрига—Гамильтона [7]

$$
\begin{aligned}
&2\eta_1' = \eta_4x_1 + \eta_2x_3 - \eta_3x_2, \\
&2\eta_2' = \eta_4x_2 + \eta_3x_1 - \eta_1x_3, \\
&2\eta_3' = \eta_4x_3 + \eta_1x_2 - \eta_2x_1, \\
&\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 = 1.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Обозначим $\boldsymbol{\eta}$ вектор, состоящий из η_i и η_4 (в указанном порядке).

Управляющие моменты $u_i = u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}')$ ищутся по принципу обратной связи в классе K разрывных по $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\eta}$ функций. Реализации $u_i[t]$ являются измеримыми функциями, удовлетворяющими заданным ограничениям

$$|u_i| \leqslant \alpha_i = \text{const} > 0. \tag{1.3}$$

Помехи $v_i \in K_1$ могут реализовываться в виде любых измеримых функций $v_i = v_i[t]$ в рамках ограничений

$$|v_i| \leqslant \beta_i = \text{const} > 0. \tag{1.4}$$

Для любой допустимой реализации помех $v_i[t]$ решения системы (1.1), (1.2) при $u_i \in K$ понимаются в смысле А. Ф. Филиппова [8] — как абсолютно непрерывные функции $\mathbf{x}[t]$, $\boldsymbol{\eta}[t]$, удовлетворяющие при почти всех t соответствующей системе дифференциальных включений.

З а д а ч а. Требуется найти приложенные к маховикам управляющие моменты $u_i \in K$ при любых допустимых $v_i \in K_1$, переводящие твердое тело за конечное время из произвольного начального положения $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0$ в заданное $\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}_1$. Оба состояния являются состояниями покоя $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$. Кроме того, $\boldsymbol{\varphi}'(t_0) = \mathbf{0}$. Момент времени $t_1 > t_0$ не фиксируется.

Далее, не нарушая общности, считаем $\boldsymbol{\eta}(t_1) = (0, 0, 0, 1)$. Случай произвольного начального и конечного положения тела будет рассмотрен при описании алгоритма решения поставленной задачи управления.

2. Вспомогательная линейная конфликтно-управляемая система

Рассмотрим нелинейные управляющие моменты вида (выписано только выражение для u_1; выражения для u_2 и u_3 получаются из u_1 циклической перестановкой индексов $1 \to 2 \to 3$)

$$
\begin{aligned}
u_1 = -\frac{2(A_1 - J_1)}{\eta_4}[u_1^*(\eta_1^2 + \eta_4^2) + u_2^*(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4) + \\
+ u_3(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4) + 1/4\eta_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)] + \\
+ (A_2x_2 + J_2\varphi_2')x_3 - (A_3x_3 + J_3\varphi_3')x_2 \\
(1 \to 2 \to 3),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

в которых u_i^* — некоторые вспомогательные управления, которыми распорядимся позже.

Управляющие моменты (2.1) позволяют выделить из замкнутой нелинейной конфликтно-управляемой системы (1.1), (1.2), (2.1) линейную конфликтно-управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\eta_i'' = u_i^* + v_i^*. \tag{2.2}$$

"Помехи" v_i^* в системе (2.2) имеют вид

$$
\begin{aligned}
v_1^* = 1/2[\eta_4v_1/(A_1 - J_1) + \eta_2v_3/(A_3 - J_3) - \\
- \eta_3v_2/(A_2 - J_2)]\ (1 \to 2 \to 3).
\end{aligned}
$$

Уровни v_i^* можно оценить, используя неравенство Коши—Буняковского и неравенства (1.4):

$$|v_i^*| \leqslant \beta^*, \tag{2.3}$$

$$
\begin{aligned}
\beta^* = 1/2[(\beta_1/(A_1 - J_1))^2 + (\beta_3/(A_3 - J_3))^2 + \\
+ (\beta_2/(A_2 - J_2))^2]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Для системы (2.2) решим задачу управления о быстрейшем приведении в положение

$$\eta_i = \eta_i' = 0. \tag{2.4}$$

Управление осуществляется посредством u_i^* при любых допустимых реализациях v_i^*, удовлетворяющих неравенствам (2.3).

Для решения данной игровой задачи управления допустимые уровни u_i^* должны быть выше уровней v_i^*. Соответствующие ограничения примем в виде

$$|u_i^*| \leqslant \alpha_i^*,\ |v_i^*| \leqslant \beta^* = \rho_i\alpha_i^*,\ 0 < \rho_i < 1. \qquad (2.5)$$

Процедура назначения уровней α_i^* рассматривается ниже. Здесь считаем их заданными, так что выполняются условия (2.5).

Решение указанной линейной игровой задачи для системы (2.2) использует решение задачи оптимального быстродействия для системы [9]

$$\eta_i'' = (1 - \rho_i)u_i^*. \qquad (2.6)$$

Краевые условия те же, что и для системы (2.2).

Решение задачи оптимального быстродействия для систем типа (2.6) имеет вид [10]

$$u_i^*(\eta_i,\ \eta_i') = \begin{cases} \alpha_i^*\operatorname{sgn}\psi_i^\rho(\eta_i,\ \eta_i'),\ \psi_i^\rho \neq 0; \\ \alpha_i^*\operatorname{sgn}\eta_i = -\alpha_i^*\operatorname{sgn}\eta_i',\ \psi_i^\rho = 0, \end{cases} \qquad (2.7)$$

где $\psi_i^\rho(\eta_i, \eta_i') = -\eta_i - [2(1-\rho_i)\alpha_i^*]^{-1}\eta_i'|\eta_i'|$ — функции переключений.

При $v_i^* \neq -\rho_i u_i^*$ движения системы (2.2), (2.7) на фазовых плоскостях переменных η_i, η_i' будут сначала происходить (до достижения кривых переключений) между дуг парабол, являющихся траекториями систем $\eta_i'' = (1 \pm \rho_i)u_i^*$ при u_i^* вида (2.7). Далее, попав на кривые переключений $\psi_i^\rho(\eta_i, \eta_i') = 0$, движения будут происходить вдоль них в скользящем режиме до достижения требуемых конечных значений $\eta_i = \eta_i' = 0$. На участках решений, соответствующих скользящим режимам, вспомогательные управления u_i^* принимают значения $\pm\ \alpha_i^*$ с бесконечно частыми сменами знака.

Величина

$$\tau = \max\tau_i,\ \tau_i = 2\{|\eta_{i0}|(1 - \rho_i)\alpha_i^*]^{-1}\}^{1/2} \qquad (2.8)$$

определяет минимальное гарантированное время τ достижения положения $\eta_i = \eta_i' = 0$ во вспомогательной линейной игровой задаче.

Отметим, что те подсистемы системы (2.2), которые придут в требуемое положение раньше, чем последняя из них, будут оставаться в этом положении. При этом соответствующее управление u_i^* в этих подсистемах будут парировать "помехи" v_i^*.

3. Алгоритм решения задачи трехосной переориентации

Решая уравнения системы (1.2) как алгебраические относительно x_i, получаем равенства

$$x_1 = \frac{2}{\eta_4}[\eta_1'(\eta_1^2 + \eta_4^2) + \eta_2'(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4) + $$
$$+ \eta_3'(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4)],\ (1 \to 2 \to 3). \qquad (3.1)$$

Поэтому решение рассмотренной линейной игровой задачи о быстрейшем приведении в положение $\eta_i = \eta_i' = 0$ означает решение исходной нелинейной задачи переориентации посредством управляющих моментов (2.1). Число τ определяет гарантированное время переориентации.

Итерационный алгоритм решения поставленной нелинейной задачи переориентации включает четыре этапа.

1. Выбор конструкции (2.1) управляющих моментов u_i с u_i^* вида (2.7). Конструкция (2.1) включает множитель $1/\eta_4$, который формально ведет к "особенности". Однако анализ фазового портрета системы (2.2), (2.7) показывает, что в случае $\boldsymbol{\eta}(t_1) =$ $= (0, 0, 0, 1)$ в процессе управления имеет место соотношение $[|\eta_{40}|,\ 1]$. Следовательно, указанной "особенности" не возникает.

Пусть $\boldsymbol{\eta}(t_1) \neq (0, 0, 0, 1)$. Для того чтобы избежать "особенности", в данном случае достаточно перейти к управляющим моментам, получающимся из выражения (2.1) перестановкой индексов (или к комбинации таких управляющих моментов), т. е. необходимо наряду с конструкцией (2.1) рассматривать конструкции управляющих моментов вида

$$u_i = \eta_s^{-1} f_i^{(s)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}', \mathbf{u}^*)\ (s = \overline{1, 4}). \qquad (3.2)$$

Конструкции (3.2) позволяют при определенном выборе функций $f_i^{(s)}$ выбрать вспомогательные линейные конфликтно-управляемые системы вида (2.2) из замкнутой системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (3.2). В этом случае множество индексов i в системе типа (2.2) будет зависеть от индекса s переменной η в знаменателе выражений (3.2). Так, индексу $s = 4$ соответствуют $i = 1, 2, 3$, индексу $s = 1$ соответствуют $i = 2, 3, 4$, и т. д.

2. Оценка уровня β^* "вспомогательных помех" v_i^* по формулам (2.3).

3. "Назначение" уровней α_i^* вспомогательных управлений u_i^*. При этом числа α_i^*, β^* предопределяют соответствующее значение $\tau = t_1 - t_0$ гарантированного времени переориентации твердого тела.

4. Проверка выполнимости заданных ограничений (1.3) для управляющих моментов u_i. При учете равенств (3.1) эту проверку можно осуществить на множестве возможных состояний вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений (2.2), (2.7), а также используя оценки выражений $A_ix_i + J_i\varphi_i'$.

Если оценки (1.3) не выполняются или, наоборот, есть "резерв" в их выполнении, необходимо продолжить поиск подходящих чисел α_j^*. В противном случае переориентация осуществляется за время τ.

Оценки выражений $A_ix_i + J_i\varphi_i'$ можно получить, используя функцию

$$M^2(t) = \sum[A_ix_i(t) + J_i\varphi_i'(t)]^2.$$

При вычислении ее производной в силу системы (1.1), используя неравенство Коши—Буняковского и неравенства (1.4), получаем

$$M'(t) \leqslant \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}.$$

В результате искомые оценки имеют вид

$$|A_i x_i(t) + J_i \varphi_i'(t)| \leqslant t\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}. \qquad (3.3)$$

4. Оценка допустимых уровней помех

Укажем прямую оценку допустимых уровней помех v_i, определяющих возможности решения исходной нелинейной задачи переориентации посредством приложенных к маховикам управляющих моментов (2.1). Данная оценка уточняет оценку допустимых уровней помех, полученную в работе [2], и является менее ограничительной.

Теорема. *Если область помех определяется неравенством*

$$\sqrt{3}\,(A_1 - J_1)(1 + \eta_{10}^2/\eta_{40}^2)^{1/2}[\sum(\beta_i^2/(A_i - J_i)]^{1/2} +$$
$$+4\sqrt{2}\,[2+(\eta_{20}^2+\eta_{30}^2)/\eta_{40}^2]^{1/2}(1-\eta_{40}^2)^{1/2}[\sum \beta_i^2]^{1/2}<\alpha_1$$
$$(1 \to 2 \to 3),$$

то задача переориентации может быть решена посредством управляющих моментов (2.1), (2.7), *удовлетворяющих заданным ограничениям* (1.3).

Доказательство. Условия разрешимости рассмотренной вспомогательной линейной игровой задачи определяются неравенствами

$$\beta_i^* < \alpha_i^*. \qquad (4.1)$$

Положим $\alpha_i^* - \beta_i^* = \varepsilon > 0$ (где ε — достаточно малое число). Для удобства представим выражения (2.1) для моментов u_i в виде суммы двух слагаемых: $u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$; при этом полагаем

$$u_i^{(2)} = -\frac{2(A_1 - J_1)}{\eta_4}[1/4\eta_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)].$$

На основе анализа фазового портрета заключаем, что на множестве Ω состояний системы (2.2), (2.7) имеют место неравенства

$$\eta_i^2 \leqslant \eta_{i0}^2,\ \eta_{40}^2 \leqslant \eta_4^2, \qquad (4.2)$$

$$\max(\eta_i')^2 = |\eta_{i0}|[(\alpha_i^*)^2 - (\beta_i^*)^2](1/\alpha_i^*).$$

Учитывая оценку (3.3), а также значения (2.8) для τ_i, с учетом фазового портрета системы (2.2), (2.7), используя неравенство Коши—Буняковского, получаем соотношения

$$|(A_2x_2 + J_2\varphi_2')x_3| \leqslant \frac{2}{|\eta_4|}[\sum \beta_i^2]^{1/2}|\tau_3\eta_3'(\eta_3^2 + \eta_4^2) +$$
$$+ \tau_1\eta_1'(\eta_3\eta_1 + \eta_2\eta_4) + \tau_2\eta_2(\eta_3\eta_2' - \eta_1\eta_4)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{|\eta_4|}(\eta_3^2 + \eta_4^2)^{1/2}[\sum \beta_i^2]^{1/2}[\sum(\tau_i\eta_i')^2]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant 4(1 + \eta_{30}^2/\eta_{40}^2)^{1/2}((\alpha_3^* + \beta^*)\eta_{30}^2/\alpha_3^* +$$
$$+ (\alpha_1^* + \beta^*)\eta_{10}^2/\alpha_1^* +$$
$$+ (\alpha_2^* + \beta^*)\eta_{20}^2/\alpha_2^*)^{1/2}[\sum \beta_i^2]^{1/2}[\sum(\eta_{i0}^2)]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant 4\sqrt{2}\,(1 + \eta_{30}^2/\eta_{40}^2)^{1/2}(1 - \eta_{40}^2)^{1/2}[\sum \beta_i^2]^{1/2}$$
$$(1 \to 2 \to 3).$$

Тогда, учитывая неравенства (4.1), (4.2), а также неравенство Коши—Буняковского, имеем следующую цепочку неравенств:

$$|u_1^{(1)}| \leqslant \frac{2(A_1 - J_1)}{|\eta_{40}|}(\eta_1^2 + \eta_4^2)^{1/2}[\sum(\alpha_i^{*2})]^{1/2} +$$
$$+ |(A_2x_2 + J_2\varphi_2')x_3 - (A_3x_3 + J_3\varphi_3')x_2| \leqslant$$
$$\leqslant 2(A_1 - J_1)(1 + \eta_{10}^2/\eta_{40}^2)^{1/2}[\sum(\alpha_i^{*2})]^{1/2} +$$
$$+ 4\sqrt{2}\,[1 + (\eta_{20}^2 + \eta_{30}^2)/\eta_{40}^2]^{1/2}(1 - \eta_{40}^2)^{1/2}[\sum \beta_i^2]^{1/2}$$
$$(1 \to 2 \to 3).$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ значения $|u_i^{(2)}|$ также будут достаточно малыми. В результате, на основании условий (1.3), (4.1), получаем соотношения

$$\sqrt{3}\,(A_1 - J_1)(1 + \eta_{10}^2/\eta_{40}^2)^{1/2}\beta^* +$$
$$+4\sqrt{2}\,[1+(\eta_{20}^2+\eta_{30}^2)/\eta_{40}^2]^{1/2}(1-\eta_{40}^2)^{1/2}[\sum \beta_i^2]^{1/2}\leqslant\alpha_1$$
$$(1 \to 2 \to 3),$$

из которых, при учете неравенств (2.3), получаем требуемую оценку допустимых уровней помех.

Выводы

Дано решение нелинейной задачи трехосной переориентации асимметричного твердого тела посредством моментов внутренних сил, приложенных к связанным с ним маховикам, для произвольного начального и конечного положения тела в пространстве. Уточнена ранее полученная в работе [2] оценка допустимых уровней помех в зависимости от ограничений на управляющие моменты. Данная оценка является достаточным условием, при котором обеспечивается гарантированное решение рассматриваемой задачи переориентации за конечное время посредством предложенной конструкции управляющих моментов, и является менее ограничительной.

Предложенная конструкция управляющих моментов может быть эффективно использована в случаях, когда начальные возмущения угловой скорости тела (начальные значения переменных x_i) являются достаточно малыми, в то время как начальное угловое отклонение связанных с телом осей от заданного направления в пространстве может быть достаточно большим. В связи с этим заметим, что требуемого значения начальной угловой скорости тела всегда можно добиться за счет ее предварительного снижения.

Ряд других подходов к решению задач переориентации твердого тела при неконтролируемых внешних возмущениях можно найти, например, в работах [11—13].

Список литературы

1. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К нелинейной задаче одноосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Автоматика и телемеханика. 2012. № 9. С. 35—48.
2. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К нелинейной задаче трехосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Космические исследования. 2013. Т. 51. Вып. 5. С. 412—418.
3. **Воротников В. И.** Об управлении угловым движением твердого тела при помехах. Игровой подход // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 82—103.
4. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998.
5. **Воротников В. И.** Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.
6. **Зубов В. И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
7. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961.
8. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
9. **Красовский Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
10. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
11. **Park Y.** Robust and optimal attitude stabilization of spacecraft with external disturbances // Aerospace Science and Technology. 2005. Vol. 9. № 3. P. 253—259.
12. **Ding S. H., Li S. H.** Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques // Aerospace Science and Technology. 2009. Vol. 13. № 4—5. P. 256—265.
13. **Xia Y. Q., Zhu Z., Fu M. Y., Wang S.** Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2011. Vol. 58. № 2. P. 647—659.

To Problem of Three-Rotor Gyrostat Reorientation under Uncotrolled External Disturbances

V. I. Vorotnikov, vorot@ntiustu.ru✉,
Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
Yu. G. Martyshenko, j-mart@mail.ru,
Russian State University of Oil and Gas, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Vorotnikov Vladimir I.,** D. Sc. (Phys.&Math.), Professor,
Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
Phone: (3435) 25-67-22 (office), e-mail: vorot@ntiustu.ru

Received on January 15, 2016
Accepted on January 22, 2016

The article studies the problem of three-axis reorientation of a rigid spacecraft. Three reaction wheels are employed to produce necessary torque in the axes of the spacecraft. External uncontrolled disturbances, that have no statistical description, are taken into consideration in the process of reorientation. Such a statement of the problem is characteristic for game theory. The controlling moments, applied to flywheels, are offered to be generated by means of a feedback inform of nonlinear functions of phase variables of a considered conflict-controlled system of differential equations, including dynamic Euler equations and kinematic equations in Rodrigues-Hamilton variables (in terms of the quaternion). As a result, the solution of the original nonlinear game problem is narrowed down to solving the elementary linear game problems. Since the exact solution of nonlinear game problems is very difficult, the proposed method seems to be effective. We stress the fact that the linearization used in n this case does not neglect nonlinear phenomena of the problem. Indeed, the converse passage from auxiliary control moments to initial ones, as well as the verification of constraints on control moments, requires the account of essentially nonlinear relations. The obtained control moments ensure the exact reorientation of the solid at a finite time. The reorientation being achieved by one spatial turn without causing additional constraints to the character of the resulting motion. The estimates of the accepted level of external disturbances, depending on the constraints on controlling moments and the initial location of the solid are found. These estimates are convenient at the first stage of a solution process, when the possibility is determined of using the proposed construction of control moments on order to ensure the required reorientation. If aforementioned estimates hold with a "reserve", then (at the second stage of the solution) a particular value of the guaranteed time of reorientation can be found by a special iteration algorithm.

Keywords: *three-rotor gyrostat reorientation, external uncontrolled disturbances*

For citation:

Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. To Problem of Three-Rotor Gyrostat Reorientation under Uncontrolled External Disturbances, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 6, pp. 414—419.

DOI: 10.17587/mau.17.414-419

References

1. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the Nonlinear Uniaxial Reorientation Problem for a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 9, pp. 1469—1480.
2. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the Nonlinear Problem of Three-Axis Reorientation of a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Cosmic Research*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 372—378.
3. **Vorotnikov V. I.** The Control of the Angular Motion of a Solid with Interference. A Game-Theoretic Approach, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 457—476.
4. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998.
5. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.

6. **Zubov V. I.** Theorie de la Commande, Moscow, Mir, 1978 (in Russian).
7. **Lurie A. I.** Analytical Mechanics, Berlin, Springer-Verlag, 2002.
8. **Filippov A. F.** Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988.
9. **Krasovskii N. N.** Rendeznous Game Problems, JPRS Publ., 1971.
10. **Pontryagin L. S. Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishenko E. F.** The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: Interscience, 1962.
11. **Park Y.** Robust and optimal attitude stabilization of spacecraft with external disturbances, *Aerospace Science and Technology*, 2005, vol. 9, no. 3, pp. 253—259.
12. **Ding S. H., Li S. H.** Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques, *Aerospace Science and Technology,* 2009, vol. 13, no. 4—5, pp. 256—265.
13. **Xia Y. Q., Zhu Z., Fu M. Y., Wang S.** Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, vol. 58, no. 2, pp. 647—659.

УДК 004.896

DOI: 10.17587/mau.17.419-425

В. А. Нестеров, д-р техн. наук, проф., **Я. Р. Кадыров,** аспирант, yankadyrov@yandex.ru
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Управление группой беспилотных летательных аппаратов в режиме радиомолчания

Рассматривается задача нанесения максимального ущерба противнику группой беспилотных летательных аппаратов в условиях отсутствия прямого обмена информацией между ее участниками. Предложены принципы организации и метод управления группой без использования средств обмена информацией. Получена оценка групповой эффективности в случае применения предлагаемого метода.

Ключевые слова: *оптимальное целераспределение, групповое управление, режим радиомолчания, виртуальная цель, групповая эффективность*

Введение

Разработка алгоритмов группового применения беспилотных летательных аппаратов (БЛА) актуальна для дальнейшего развития военной науки и техники. На сегодняшний день вопросы применения одиночного БЛА хорошо изучены, как и меры противодействия БЛА на различных этапах боевой операции. Большое число разрабатываемых концепций группового применения БЛА для нанесения ударов по наземным целям противника говорит об актуальности и востребованности подобного направления исследований. Речь идет в первую очередь о задаче подавления средств противовоздушной обороны (ПВО) противника [1]. Групповое применение БЛА по аналогии с использованием пилотируемых ЛА целесообразно прежде всего для создания большой плотности ракетно-бомбового удара.

На рис. 1 (см. третью сторону обложки) приведено дерево поиска оптимальной конфигурации системы подавления ПВО.

В ходе анализа боевого применения БЛА выделен следующий перечень преимуществ применения БЛА по сравнению с пилотируемыми ЛА: более высокая живучесть БЛА (вследствие меньшей заметности в радиолокационном, инфракрасном, оптическом и акустическом диапазонах); большая продолжительность полета (исчисляется на сегодня уже сутками); меньшая вероятность обнаружения и поражения средствами ПВО противника; способность осуществлять контролируемый безопасный полет на предельно малых высотах (порой недоступных для пилотируемых ЛА); возможность нахождения в высокой степени боевой (оперативной) готовности практически неограниченное время, а также существенно меньшая стоимость разработки, серийного производства и войсковой эксплуатации БЛА и подготовки операторов наземных или иных командных пунктов (КП).

В настоящее время все больше создается мобильных комплексов ПВО, трудно обнаруживаемых, неразличимых на фоне местности для систем распознавания БЛА, что, в свою очередь, предполагает решение задачи поиска. На сегодняшний день основным путем решения задачи группового поиска принято считать разработку алгоритмов децентрализованного управления, основанных на обмене информацией между участниками группы [3]. Однако современные средства радиоэлектронного противодействия (РЭП) успешно создают помехи каналам связи и управления группой и в ряде случаев сводят боевую эффективность группы БЛА к нулю. Таким образом, направление исследований в области организации групповых действий БЛА без прямого обмена информацией между участниками группы, т. е. в режиме радиомолчания, на сегодняшний день крайне актуально (радиомолчание — запрет работы радиотехнических средств на передачу в целях сокрытия от радиоразведки противника местонахождения и действий своих сил).