УДК 531.3 DOI: 10.17587/mau/17.335-340

А. В. Молоденков[1], канд. техн. наук, ст. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
Я. Г. Сапунков[1], канд. физ.-мат. наук, доц., iptmuran@san.ru,
Т. В. Молоденкова[2], канд. физ.-мат. наук, доц., moltw@yandex.ru,
[1] Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов
[2] Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

Точное решение приближенного уравнения Борца и построение на его основе кватернионного алгоритма определения ориентации БИНС*

На основе полученного точного решения приближенного линейного уравнения Борца (справедливого при малых углах поворота твердого тела) решена с помощью квадратур задача определения кватерниона ориентации твердого тела при произвольном векторе угловой скорости и малом угле поворота твердого тела. Исходя из этого решения предложен подход к построению нового алгоритма для вычисления ориентации БИНС.

Ключевые слова: *ориентация, угловая скорость, твердое тело, бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС)*

Введение

В процессе функционирования многих бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) периодически вычисляется вектор ориентации твердого тела относительно инерциального пространства путем приближенного решения приближенного линейного дифференциального уравнения Борца (в практике построения БИНС нелинейным членом в уравнении Борца при малых углах поворота пренебрегают). В уравнении Борца входной величиной является вектор угловой скорости твердого тела. Отметим, что полное нелинейное уравнение Борца относительно вектора ориентации твердого тела является аналогом кватернионного линейного уравнения; вектор и кватернион ориентации твердого тела связаны между собой известными соотношениями. Между тем, для некоторого нового вектора угловой скорости, который получается в задаче определения ориентации твердого тела (БИНС) на основе исходного произвольного вектора угловой скорости при осуществлении взаимно однозначных замен переменных в уравнениях движения твердого тела, приближенное уравнение Борца допускает точное аналитическое решение.

В данной работе на основе полученного точного решения приближенного линейного уравнения Борца (справедливого при малых углах поворота твердого тела) решена с помощью квадратур задача определения кватерниона ориентации твердого тела при произвольном векторе угловой скорости и малом угле поворота твердого тела. Исходя из этого решения предложен подход к построению нового алгоритма для вычисления инерциальной ориентации БИНС:

1) по заданным компонентам вектора угловой скорости твердого тела на основе взаимно однозначных замен переменных в каждый момент времени вычисляется новый вектор угловой скорости твердого тела;

2) с использованием нового вектора угловой скорости и начального положения твердого тела находится с помощью квадратур точное решение приближенного линейного уравнения Борца (вектор ориентации твердого тела) с нулевым начальным условием;

3) по вектору ориентации определяется значение кватерниона ориентации твердого тела (БИНС).

Отметим, что при построении алгоритма ориентации БИНС на каждом последующем шаге замена переменных учитывает предыдущий шаг алгоритма таким образом, что начальное значение вектора ориентации твердого тела каждый раз будет нулевым.

Статья продолжает исследования, начатые в работах [1, 2].

1. Постановка общей задачи определения ориентации твердого тела

Рассмотрим задачу Коши для кватернионного кинематического уравнения [3, 4] с произвольной заданной вектор-функцией угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, записанную в следующей форме:

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t); \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(t_0) = \boldsymbol{\Lambda}_0. \tag{1.2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

Здесь $\mathbf{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ — кватернион, описывающий положение твердого тела в инерциальном пространстве; $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор угловой скорости твердого тела, заданный своими проекциями на оси системы координат, связанной с твердым телом; i_1, i_2, i_3 — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; символ "$\circ$" означает кватернионное произведение; $\mathbf{\Lambda}_0$ — начальное значение кватерниона $\mathbf{\Lambda}(t)$ при $t = t_0$, $t \in [t_0, \infty)$ (для простоты положим $t_0 = 0$). Требуется определить кватернион $\mathbf{\Lambda}(t)$.

Кватернионной записи задачи эквивалентна запись в матричной форме с использованием, например, кватернионных матриц **n**-типа [5]:

$$\mathbf{n}(\mathbf{\Lambda})=\begin{bmatrix}\lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3\\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1\\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0\end{bmatrix};\ \mathbf{n}(\omega)=\begin{bmatrix}0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3\\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2\\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{bmatrix}; \quad (1.3)$$

$$2\mathbf{n}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{n}(\mathbf{\Lambda}); \quad (1.4)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{\Lambda}(t_0)) = \mathbf{n}(\mathbf{\Lambda}_0). \quad (1.5)$$

Задача (1.1), (1.2) ((1.4), (1.5)) и есть задача Дарбу об определении ориентации твердого тела по его известной угловой скорости и начальному положению в кватернионной постановке.

Известно несколько подходов к решению данной задачи: сведение с помощью замен переменных исходных уравнений к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати (подход Дарбу [3]) или к линейному дифференциальному уравнению второго порядка [6] с переменными коэффициентами относительно комплексной неизвестной; отождествление задачи Дарбу с задачей определения вектор-функции по известным модулям ее производных [7], когда задача Дарбу сводится к решению линейного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами относительно действительной неизвестной. При этом аналитическое решение задачи Дарбу в замкнутой форме для произвольного вектора угловой скорости твердого тела при всех подходах не найдено. Найдено лишь несколько частных случаев, допускающих построение точного решения этой задачи [4, 8—13].

Вместе с тем, как показано в работе [14], система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кососимметрической матрицей коэффициентов является приводимой по Ляпунову, т. е. существует замена переменных (преобразование Ляпунова), приводящая данную систему к системе с постоянными коэффициентами. Система уравнений (1.4) задачи Дарбу имеет кососимметрическую матрицу коэффициентов, и, таким образом, задача Дарбу является приводимой по Ляпунову. Следовательно, поиск решения задачи Дарбу в замкнутой форме для общего случая заданной угловой скорости твердого тела не является безнадежным. Также из-за отсутствия на настоящий момент точного решения задачи Дарбу продолжает быть актуальным построение новых высокоэффективных алгоритмов функционирования БИНС, реализующих интегрирование на бортовом вычислителе в реальном масштабе времени дифференциальных уравнений ориентации по информации чувствительных элементов БИНС.

С использованием подходов, связанных с поиском решения задачи Дарбу в замкнутой форме [1], в данной статье предлагается новый алгоритм определения ориентации твердого тела (БИНС).

2. Задача ориентации применительно к БИНС

В процессе функционирования многих БИНС периодически вычисляется вектор $\boldsymbol{\varphi}$ ориентации тела относительно инерциального пространства на временном отрезке $t_{m-1} \leqslant t \leqslant t_m$ путем численного (приближенного) решения точного дифференциального уравнения Борца [15]

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\varphi}\left(1 - \frac{\varphi\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\right)\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}), \quad (2.1)$$

где "$\times$" означает векторное произведение. В уравнении (2.1) входной величиной является вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Отметим, что нелинейное уравнение Борца (2.1) для вектора ориентации твердого тела $\boldsymbol{\varphi}$ является аналогом кватернионного линейного уравнения (1.1); вектор $\boldsymbol{\varphi}$ и кватернион $\mathbf{\Lambda}$ связаны соотношениями

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e},\ \mathbf{e} = e_1\mathbf{i}_1 + e_2\mathbf{i}_2 + e_3\mathbf{i}_3,$$

$$|\mathbf{e}| = (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^{1/2} = 1,$$

$$\lambda_1 = \sin(\varphi/2)e_1,\ \lambda_2 = \sin(\varphi/2)e_2,$$
$$\lambda_3 = \sin(\varphi/2)e_3,\ \lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad (2.2)$$

где φ является углом ориентации твердого тела, а **e** — эйлеровой осью вращения. В практике построения БИНС третьим членом в уравнении (2.1) при малых углах φ пренебрегают [15] (нелинейный член уравнения (2.1) является величиной порядка φ^2). Если полученное упрощенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.3)$$

решать итерационным методом Пикара, то вторая итерация этого метода принимается [15] в практике БИНС за окончательную:

$$\boldsymbol{\varphi}_m = \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\boldsymbol{\omega}(t)dt + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t))dt = \boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\beta}_m, \quad (2.4)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau,\ \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\alpha}(t_m),$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{1}{2}\int_{t_{m-1}}^{t_m} \boldsymbol{\alpha}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau,\ \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\beta}(t_m).$$

Вектор $\boldsymbol{\beta}$ в уравнении (2.4) называют вектором некоммутативного поворота, или "конингом". При определенных движениях твердого тела это слагаемое вносит существенный вклад в погрешность метода. Исследование некоммутативных поворотов (или "конинга") как вида механического движения тел, разделение численных алгоритмов определения ориентации твердого тела (БИНС) на быстрый и медленный циклы счета [15] направлены на компенсацию вредного влияния этого явления.

Между тем, для некоторого вектора угловой скорости $\mathbf{w}(t)$, который получается в задаче определения ориентации твердого тела (БИНС) с произвольным вектором $\boldsymbol{\omega}(t)$ при осуществлении взаимно однозначных замен переменных в уравнении (1.1), приближенное уравнение Борца (2.3) допускает точное аналитическое решение. Используя это решение, можно получить новый аналитический алгоритм определения ориентации твердого тела (БИНС). Покажем это.

3. Приведение задачи Дарбу к удобной для изучения форме

Осуществим в задаче (1.1), (1.2) ряд замен переменных, упрощающих задачу. Замена зависимой переменной в уравнении типа (1.1) будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U} \circ \mathbf{V}; \tag{3.1}$$

$$2\mathbf{U}^{\cdot} = \mathbf{U} \circ \mathbf{B}; \tag{3.2}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{V}^{-1} - 2\mathbf{V}^{\cdot} \circ \mathbf{V}^{-1}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ — новая искомая кватернионная переменная; $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$ — задаваемый оператор (кватернион) перехода к новому уравнению вида (3.2); $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ — кватернионный коэффициент уравнения (2.2), имеющий смысл угловой скорости некоторой новой системы координат.

Для большей наглядности проводимых ниже замен переменных типа (3.1), (3.2) ортогональное преобразование $\mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{V}^{-1}$, входящее в соотношение (3.3), приведем в координатной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{V}^{-1} = r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3;$$

$$r_1 = (\omega_1(v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_0^2) + 2\omega_2(v_1v_2 - v_0v_3) + \\ + 2\omega_3(v_1v_3 + v_0v_2))/\|\mathbf{V}\|;$$

$$r_2 = (2\omega_1(v_1v_2 + v_0v_3) + \omega_2(v_0^2 + v_2^2 - v_1^2 - v_3^2) + \\ + 2\omega_3(v_2v_3 - v_0v_1))/\|\mathbf{V}\|;$$

$$r_3 = (2\omega_1(v_1v_3 - v_0v_2) + 2\omega_2(v_2v_3 + v_0v_1) + \\ + \omega_3(v_0^2 + v_3^2 - v_1^2 - v_2^2))/\|\mathbf{V}\|;$$

$$\|\mathbf{V}\| = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Рассмотрим замену зависимой переменной

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{V}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{V}(t) = \exp\left(\mathbf{i}_3\frac{1}{2}\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) \circ \exp\left(\mathbf{i}_1\frac{1}{2}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right), \tag{3.5}$$

$$\nu(t) = \sin\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_2 + \cos\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_3, \tag{3.6}$$

где "exp(.)" обозначает кватернионную экспоненту [4]

$$\exp(\mathbf{Z}) = \exp(z_0)(\cos(|\mathbf{z}_v|) + \sin(|\mathbf{z}_v|)\mathbf{z}_v/|\mathbf{z}_v|),$$

z_0, $\mathbf{z}_v = z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3$ — скалярная и векторная части кватерниона $\mathbf{Z}$ соответственно, векторная часть кватерниона $\mathbf{Z}(t)$ при этом должна иметь постоянное направление.

В результате задача Дарбу (1.1), (1.2) перейдет в задачу

$$2\mathbf{U}_1^{\cdot} = \mathbf{U}_1 \circ \boldsymbol{\varpi}(t), \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\varpi}(t) = \mu(t)\left(-\mathbf{i}_1\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) + \mathbf{i}_2\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)\right), \tag{3.8}$$

$$\mu(t) = \cos\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_2 - \sin\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_3, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{U}_1(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0, \tag{3.10}$$

где $\nu(t)$ определяется формулой (3.6). Векторный коэффициент в уравнении (3.7) по-прежнему имеет смысл вектора угловой скорости некоторой системы координат, но в отличие от произвольного переменного вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ в уравнении (1.1), в (3.7) вектор угловой скорости $\boldsymbol{\varpi}$ (3.8), оставаясь в общем случае переменным по модулю, совершает вполне определенное движение — вращается в плоскости ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$) вокруг оси $\mathbf{i}_3$ (данное движение является частным случаем конической прецессии).

Отметим один факт, возникающий в связи с изучением проблемы интегрируемости кватернионного кинематического уравнения вращения в форме (3.7).

Осуществим в (3.7)—(3.10) еще одну замену зависимой переменной типа (3.1)—(3.3):

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U} \circ \left(-\mathbf{i}_1\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) + \mathbf{i}_2\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)\right). \tag{3.11}$$

Тогда проблема Дарбу (1.1), (1.2) примет вид

$$2\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \circ \mathbf{w}(t); \tag{3.12}$$

$$\mathbf{w}(t) = \\ =\mu(t)\left(-\mathbf{i}_1\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) + \mathbf{i}_2\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)\right) - 2\mathbf{i}_3\nu(t); \tag{3.13}$$

$$\mathbf{U}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2). \tag{3.14}$$

Нахождение точного решения уравнения (3.12) по-прежнему остается трудной задачей, однако решение кватернионного уравнения

$$2\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{\Psi} \circ \mathbf{w}(t)/2 \tag{3.15}$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{\Psi}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2), \qquad (3.16)$$

отличающегося от уравнения (3.12) только множителем "1/2" в правой части, легко находится:

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}(0) \circ \boldsymbol{\Phi}(t),$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp\left(\mathbf{i}_2\frac{1}{4}\int_0^t \mu(\tau)d\tau\right) \circ \exp\left(-\mathbf{i}_3\frac{1}{2}\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right), \qquad (3.17)$$

где функции ν, μ определяются соотношениями (3.6), (3.9).

Следует отметить, что задачи (3.12)—(3.14); (3.15), (3.16) можно обобщить, введя в них соответствующим образом произвольный постоянный кватернион $\mathbf{K}$.

Подводя итог, запишем всю замену зависимой переменной $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ в задаче Коши (1.1), (1.2):

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \mathbf{U}(t) \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{V}(t), \|\mathbf{K}\| = \|\mathbf{V}\| = 1; \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{V}(t) = \left(-\mathbf{i}_1\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) + \mathbf{i}_2\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)\right) \circ$$

$$\circ \exp\left(\mathbf{i}_3\frac{1}{2}\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) \circ \exp\left(\mathbf{i}_1\frac{1}{2}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right); \qquad (3.19)$$

$$2\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}; \qquad (3.20)$$

$$\mathbf{U}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\mathbf{K}}. \qquad (3.21)$$

Разрешимая задача (3.15), (3.16) примет вид

$$4\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{\Psi} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}; \qquad (3.22)$$

$$\boldsymbol{\Psi}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\mathbf{K}}. \qquad (3.23)$$

Выберем кватернион $\mathbf{K}$ в виде $\mathbf{K} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2)$, чтобы начальные условия (3.21), (3.23) стали единичными: $\mathbf{U}(0) = \boldsymbol{\Psi}(0) = 1$. Решение задачи Коши (3.22), (3.23) запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \boldsymbol{\Phi}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0, \qquad (3.24)$$

где кватернион $\boldsymbol{\Phi}(t)$ определяется выражением (3.17).

Отметим, что этот прием с кватернионом $\mathbf{K}$ важен при построении алгоритма ориентации БИНС. Тогда на каждом последующем шаге алгоритма m кватернион $\mathbf{K}$ следует выбирать в виде $\mathbf{K}_m = \boldsymbol{\Lambda}_{m-1} \circ (-\mathbf{i}_2)$.

4. Точное решение приближенного уравнения Борца

На основе выражений типа (2.2) поставим в соответствие кватернионной задаче (3.20), (3.21) задачу с векторным приближенным линейным дифференциальным уравнением Борца

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \mathbf{w}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0); \qquad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = 0. \qquad (4.2)$$

Отметим, что однородная часть векторного линейного дифференциального уравнения (4.1) эквивалентна системе (3.22), записанной в форме векторного уравнения Пуассона [4]. Следуя методу Лагранжа решения линейных неоднородных дифференциальных систем уравнений, на основании соотношения (3.24) решение приближенного уравнения Борца (4.1) при малом угле поворота твердого тела будет иметь вид

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ$$

$$\circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w} \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau)d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0, \qquad (4.3)$$

где кватернион $\boldsymbol{\Phi}(t)$ определяется выражением (3.17), а $\boldsymbol{\Lambda}_0$ задает начальное положение твердого тела.

Алгоритм определения ориентации твердого тела (БИНС)

1. По заданным компонентам вектора $\boldsymbol{\omega}$ и формулам в каждый момент времени t вычисляются функции $\nu(t)$, $\mu(t)$:

$$\nu(t) = \sin\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_2 + \cos\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_3;$$

$$\mu(t) = \cos\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_2 - \sin\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_3.$$

2. По вычисленным $\nu(t)$, $\mu(t)$ определяется вектор $\mathbf{w}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) =$$

$$= \mu(t)\left(-\mathbf{i}_1\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) + \mathbf{i}_2\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)\right) - 2\mathbf{i}_3\nu(t).$$

3. С использованием вектора $\mathbf{w}(t)$ и начального положения твердого тела $\boldsymbol{\Lambda}_0$ вычисляется приближенное значение вектора ориентации твердого тела $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp\left(\mathbf{i}_2\frac{1}{4}\int_0^t \mu(\tau)d\tau\right) \circ \exp\left(-\mathbf{i}_3\frac{1}{2}\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right);$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{K} \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w} \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau)d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}},$$

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2).$$

4. По вектору ориентации $\boldsymbol{\varphi}$ определяются компоненты кватерниона $\mathbf{U}$:

$$u_0 = \cos(\varphi/2),\ u_1 = \cos(\varphi/2),$$

$$u_2 = \sin(\varphi/2)e_2,\ u_3 = \sin(\varphi/2)e_3,$$

$$\varphi = |\boldsymbol{\varphi}|,\ \mathbf{e} = \boldsymbol{\varphi}/\varphi,\ \varphi(t) \neq 0,\ \forall t.$$

5. Находится приближенное значение кватерниона ориентации твердого тела (БИНС) $\boldsymbol{\Lambda}^{\text{прибл}}$:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\text{прибл}} = \mathbf{U} \circ \mathbf{K} \circ \left(-\mathbf{i}_1\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) + \mathbf{i}_2\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)\right) \circ$$

$$\circ \exp\left(\mathbf{i}_3\frac{1}{2}\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) \circ \exp\left(\mathbf{i}_1\frac{1}{2}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right).$$

Тем самым задача определения ориентации твердого тела (БИНС) (1.1), (1.2) при малых углах поворота полностью решена с помощью квадратур.

При реализации алгоритма ориентации БИНС на каждом последующем шаге алгоритма m кватернион $\mathbf{K}$ следует выбирать в виде $\mathbf{K}_m = \mathbf{\Lambda}_{m-1} \circ (-\mathbf{i}_2)$. Тогда начальное значение по переменной $\boldsymbol{\varphi}$ каждый раз будет нулевым.

Заключение

Следует отметить, что в теории и практике БИНС также используется векторное уравнение типа Риккати [5]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a} + 2\mathbf{x} \times \mathbf{a} - \mathbf{x} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{x},\ \mathbf{a} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}, \qquad (5.1)$$

где между вектором $\mathbf{x}$ и кватернионом ориентации $\mathbf{\Lambda}$ в (5.1) существует взаимно однозначное соответствие. Для линейной части (5.1)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a} + 2\mathbf{x} \times \mathbf{a}$$

возможны такие же рассуждения, как и приведенные в настоящей статье относительно уравнения Борца.

Аналогичные рассуждения можно построить и для дифференциального уравнения относительно вектора конечного поворота твердого тела.

Список литературы

1. **Молоденков А. В.** К решению задачи Дарбу // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 3—13.
2. **Молоденков А. В.** Об определении ориентации твердого тела по его угловой скорости // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. № 1. С. 67—73.
3. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
5. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
6. **Челноков Ю. Н.** Кватернионы и связанные с ними преобразования в динамике симметричного твердого тела. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 3—18.
7. **Иванова Е. А.** Об одном подходе к решению задачи Дарбу // Изв. РАН МТТ. 2000. № 1. С. 45—52.
8. **Зубов В. И.** Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
9. **Каленова В. И., Морозов В. М.** О применении методов теории приводимости к некоторым задачам динамики гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 8—14.
10. **Морозов В. М., Каленова В. И.** Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М.: Изд-во МГУ, 1988. 143 с.
11. **Сачков Г. П., Харламов Ю. М.** Об интегрируемости кинематических уравнений вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 11—15.
12. **Челноков Ю. Н.** Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига—Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11—20.
13. **Плотников П. К.** Измерительные гироскопические системы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. 167 с.
14. **Еругин Н. П.** Приводимые системы // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1947. Т. 13. С. 1—95.
15. **Savage P. G.** Strapdown Analytics. Strapdown Associates Inc., Maple Plan, Minnesota, 2007.

The Exact Solution of the Bortz Approximate Equation and Construction of the Quaternion Orientation Algorithm of SINS on its Basis

A. V. Molodenkov, iptmuran@san.ru✉, **Ya. G. Sapunkov,** iptmuran@san.ru,
T. V. Molodenkova, moltw@yandex.ru,
Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, Saratov State Technical University

Corresponding author: **Molodenkov A. V.,** Ph. D., Senior Researcher,
Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation
e-mail: iptmuran@san.ru

Received on January 18, 2016
Accepted on January 22, 2016

During operation of many strapdown inertial navigation systems (SINS) the orientation vector of a rigid body is periodically calculated by the method of approximate solution of the Bortz approximate linear differential equation (in the practice of construction of SINS for small angles of rotation the nonlinear term in the Bortz equation is neglected). Note, that the full nonlinear Bortz equation for the vector orientation of the rigid body is an analog of the quaternion linear equation; the vector and the quaternion of the rigid body orientation are linked by known relations. In the article on the basis of the obtained exact solution of the Bortz approximate linear equation (valid for small angles of rotation of a rigid body) due to the quadratures the task is solved for determination of the quaternion orientation of a rigid body with an arbitrary angular velocity and small angle of rotation of the rigid body. Proceeding from this solution, the following approach to the construction of a new algorithm for computation of SINS orientation is proposed: 1) By the set components of the angular velocity of a rigid body on the basis of mutually — unambiguous changes of the variables at each time point, a new angular velocity of a rigid body is calculated; 2) Using the new angular velocity and the initial position of a rigid body, with the help of the quadratures we find the exact solution of the Bortz approximate linear equation (vector of orientation) with a zero initial condition; 3) The value of the quaternion orientation of a rigid body (SINS) is determined by the vector of orientation. During construction of the orientation algorithm of SINS at each subsequent step the change of the variables takes into account the previous step of the algorithm in such a way that each time the initial value of the vector orientation of a rigid body will be equal to zero.

Keywords: *algorithm, orientation, angular velocity, rigid body, strapdown inertial navigation system (SINS)*

For citation:
Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G., Molodenkova T. V. The Exact Solution of the Bortz Approximate Equation and Construction of the Quaternion Orientation Algorithm of SINS on its Basis, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 5, pp. 335—340.

DOI: 10.17587/mau/16.335-340

References

1. **Molodenkov A. V.** *K resheniyu zadachi Darbu* (On the Solution of the Darboux), *Problem. Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2007, no. 2, pp. 3—13 (in Russian).
2. **Molodenkov A. V.** *Ob opredelenii orientatsii tverdogo tela po ego uglovoi skorosti* (Rigid body orientation determination by its angular velocity), *Vestnik of the Saratov State Tech. Univ.*, 2007, no. 1, pp. 67—73 (in Russian).
3. **Lurie A. I.** *Analiticheskaya mekhanika* (Analytic Mechanics), Moscow, Fizmatgiz, 1961, 824 p. (in Russian).
4. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian]).
5. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya* (Quaternion and Biquaternion Models and Methods in Mechanics of Solids and Their Applications), Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).
6. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaterniony i svyazannye s nimi preobrazovaniya v dinamike simmetrichnogo tverdogo tela. Ch. 2* (Quaternions and Related Transformations in Dynamics of a Symmetric Rigid Body. Part II), *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela,* 1998, no. 5, pp. 3—18 (in Russian).
7. **Ivanova E. A.** *Ob odnom podkhode resheniyu zadachi Darbu* (On One Approach to Solving the Darboux Problem), *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2000, no. 1, pp. 45—52 (in Russian).
8. **Zubov V. I.** *Analiticheskaya dinamika giroskopicheskikh sistem* (Analytic Dynamics of Gyro Systems), Leningrad, Sudostroenie, 1970. 317 p. (in Russian).
9. **Kalenova V. I., Morozov V. M.** O *primenenii metodov teorii privodimosti nekotorym zadacham dinamiki giroskopicheskikh sistem* (On the Application of Reducibility Methods to Problems of Dynamics of Gyro Systems), *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela,* 1987, no. 1, pp. 8—14 (in Russian).
10. **Morozov V. M., Kalenova V. I.** *Otsenivanie i upravlenie v nestatsionarnykh lineinykh sistemakh* (Estimation and Control in Nonstationary Linear Systems), Moscow, Publishing house of MSU, 1988, 143 p. (in Russian).
11. **Sachkov G. P., Kharlamov Yu. M.** *Ob integriruemosti kinematicheskikh uravnenii vrashcheniya* (On the Integrability of Kinematic Equations of Rotation), *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1991, no. 6, pp. 11—15 (in Russian).
12. **Chelnokov Yu. N.** *Ob opredelenii orientatsii ob"ekta v parametrakh Ro-driga-Gamil'tona po ego uglovoi skorosti* (On Determining the Object Orientation in Rodrigues-Hamilton Parameters from Its Angular Velocity), *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela,* 1977, no. 3, pp. 11—20 (in Russian).
13. **Plotnikov P. K.** *Izmeritel'nye giroskopicheskie sistemy* (Gyroscopic Measurement Systems), Saratov, Publishing house of Saratov Univ., 1976, 167 p. (in Russian).
14. **Erugin N. P.** *Privodimye sistemy* (Reducible Systems), *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1947, vol. 13, pp. 1—95 (in Russian).
15. **Savage P. G.** Strapdown Analytics, Strapdown Associates Inc., Maple Plan, Minnesota, 2007.

УДК 681.586.5 DOI: 10.17587/mau/17.340-346

В. И. Бусурин, д-р техн. наук, проф., vbusurin@mai.ru, **В. В. Коробков,** канд. техн. наук, доц., vvkor@bk.ru,
Йин Наинг Вин, аспирант, integratedchip.88@gmail.com,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Исследование характеристик кольцевого волнового оптоэлектронного преобразователя угловой скорости[1]

Рассмотрены вопросы построения кольцевого волнового преобразователя угловой скорости на основе оптического туннелирования. Исследовано влияние параметров кольцевого резонатора и оптоэлектронного модулятора на радиальное движение, зазор и отражательную способность. Предложена математическая модель оптоэлектронного преобразователя на основе оптического туннелирования, обеспечивающая квазилинейную функцию преобразования.

Ключевые слова: *кольцевой волновой резонатор, оптоэлектронный преобразователь, угловая скорость, оптическое туннелирование, пьезоактюатор, функция преобразования, зазор, радиальное движение*

Введение

Определение угловой скорости осуществляется традиционно с помощью механических преобразователей — гироскопов, использующих быстро вращающееся тело с несколькими степенями свободы [1]. Известно, что они имеют ряд недостатков — значительную массу и большое энергопотребление.

Современные малогабаритные микроэлектромеханические преобразователи угловой скорости часто используют кольцевой волновой резонатор и емкостной способ съема информации [2]. В таких преобразователях для съема информации к подвижной части преобразователя прикреплена обкладка конденсатора, а вторая обкладка закреплена неподвижно. При наличии угловой скорости подвижная часть преобразователя смещается относительно обкладки на неподвижной части. Функция преобразования при таком способе съема информации имеет существенную нелинейность.

Для получения квазилинейной функции преобразования при измерении угловой скорости предлагается использовать преобразователи внешних воздействий на основе управляемого оптического туннельного эффекта (ОТЭ) с переменным зазором между базовой поверхностью и кольцевым резонатором.

Функциональная схема кольцевого оптоэлектронного преобразователя угловой скорости

Кольцевой резонатор является одним из основных узлов микроэлектромеханических преобразователей для измерения угловой скорости относительно полярной оси. При его вращении на него действуют силы Кориолиса, которые являются причиной возникновения радиального движения по периметру кольца. При деформации кольцевого резонатора можно выделить два режима [3].

[1] Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-08-00447).