

А. Р. Гайдук, д-р техн. наук, проф., gaiduk_2003@mail.ru,

Южный федеральный университет, Кисловодский гуманитарно-технический институт,

Е. А. Плаксиенко, канд. техн. наук, доц., putka@mail.ru,

Таганрогский институт управления и экономики

Робастность редуцированных динамических систем автоматизации

Исследуется влияние динамики быстрой подсистемы, отсекаемой при синтезе, на робастную устойчивость динамических систем автоматизации, синтезированных на основе редуцированных различными методами моделей. Редуцированные системы получены методом аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям. Анализ робастной устойчивости осуществляется на основе критерия В. Л. Харитонова. Установлено, что отсекаемая динамика оказывает существенное влияние на робастную устойчивость редуцированных систем.

Ключевые слова: линейная динамическая система, математическая модель, спектральная декомпозиция, редукция, аналитический синтез, робастная устойчивость

Введение

Как известно, динамические системы автоматизации и управления высоких порядков, как правило, имеют регуляторы повышенной сложности. Эти системы характеризуются более высокой чувствительностью к изменениям структуры и параметров, т. е. пониженной робастностью [1–4]. В целях получения менее сложных систем автоматизации и повышения их робастной устойчивости часто осуществляют такие изменения моделей технологических процессов, при которых происходит уменьшение (редукция) числа дифференциальных уравнений, используемых при описании рассматриваемых процессов [1, 4–8]. При этом уменьшаются степени характеристических уравнений, т. е. порядки математических моделей. Это позволяет упростить устройства управления систем автоматизации, а также уменьшить сложность как решения задач синтеза и анализа, так и практической реализации редуцированных систем.

К настоящему времени разработано много методов редукции моделей линейных систем автоматизации, в основе которых лежит исключение "слабо влияющих связей", "малых постоянных времени", "быстро затухающих мод", а также балансировка моделей управляемых систем, синтез неполных систем и др. [1, 6–12]. Одним из наиболее ранних является метод обнуления малых постоянных времени (МПВ) [5–8], который применяется, когда знаменатели передаточных функций динамических систем имеют множители типа $(Tp + 1)$, с малыми значениями постоянных времени T . Эти множители соответствуют быстро затухающим составляющим переменных состояния и практически не влияют на качество систем автоматизации. При обнулении МПВ происходит понижение степени знаменателей передаточных функций, т. е. редукция модели системы. Для краткости в дальнейшем данный метод редукции будем называть *временной редукцией*.

Развитие методов исследования динамических систем в переменных состояния привело к разра-

ботке процедуры балансировки моделей линейных систем, основанной на таком преобразовании переменных системы, которое диагонализует ее матрицы управляемости и наблюдаемости [9–12]. Эта процедура позволяет осуществить "балансную редукцию" модели динамической системы в переменных состояния путем отсекающей части переменных, доставляющих меньшие вклады в динамику системы. При этом понижение порядка модели осуществляется с минимизацией нормы разности переходных матриц исходной и редуцированной динамических моделей [11, 12].

В работе [1] предложен новый метод *модальной редукции*, который заключается в спектральной декомпозиции моделей динамических систем в переменных состояния на "быструю" и "доминирующую" подсистемы и в последующей замене динамики быстрой подсистемы ее установившимся режимом. При этом предполагается, что быстрая подсистема включает быстро затухающие моды исходной модели, а доминирующая подсистема — все остальные ее моды. Однако если два предыдущих метода при одной и той же степени редукции приводят к единственной редуцированной модели, то метод модальной редукции, как правило, приводит к различным моделям.

Это связано с особенностью описания динамических систем в переменных состояния. Дело в том, что одной и той же динамической системе можно поставить в соответствие множество систем дифференциальных уравнений (моделей) в переменных состояния даже одного и того же порядка. Эти модели равнозначны с точки зрения соотношений "вход—выход", но имеют различные переменные состояния, обусловленные различными матрицами преобразования, посредством которых осуществляется спектральная декомпозиция исходной модели. Поэтому одной и той же исходной модели в переменных состояния соответствует множество "модально редуцированных" моделей, имеющих различные переменные состояния как быстрой, так и доминирующей подсистем. Редукция всех этих де-

композированных моделей осуществляется, естественно, путем исключения мод, соответствующих одним и тем же корням характеристического уравнения исходной модели системы, поскольку при линейных преобразованиях корни не меняются.

На основе изложенного нетрудно заключить, что и временная, и балансная, и модальная редукции фактически приводят к исключению динамики быстрой подсистемы рассматриваемого процесса из процедуры синтеза системы автоматизации или управления. Однако в действительности влияние исключенной динамики на устойчивость и другие свойства синтезированной редуцированной системы, естественно, сохраняется. В связи с этим представляет интерес сравнение различных методов редукции по тем свойствам, которые имеют системы автоматизации и управления, синтезированные на основе различных редуцированных моделей.

В данной работе на численных примерах изучается влияние указанных выше методов редукции на робастную устойчивость замкнутых систем. При этом рассматриваются редуцированные системы автоматизации, полученные методом аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям (АСС с УВВ) [13, 14].

1. Постановка задачи

Рассмотрим исходную математическую модель управляемого динамического объекта третьего порядка, которая описывается в переменных состояния уравнением вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \quad (1)$$

где, например,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,6358 & 0,7254 & 0,5709 \\ 13,4134 & 8,0531 & 9,5669 \\ -16,0835 & -15,7079 & -18,4173 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,689 \\ 0,5118 \\ 0,2205 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5,6 \\ 5,5 \\ 3,75 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

При этом передаточная функция системы (1), (2) имеет вид

$$W_{yu}(s) = \frac{7,5s^2 + 81s + 188}{s^3 + 11s^2 + 8s - 20} = \frac{7,5s^2 + 81s + 188}{(s + 10)(s + 2)(s - 1)}. \quad (3)$$

Далее на основе указанных выше методов редукции находится ряд редуцированных моделей управляемой системы (1), (2), и для каждой из них синтезируется методом АСС с УВВ замкнутая система. При исследовании робастной устойчивости синтезированных систем принимается, что передаточные функции (ПФ) редуцированных моделей имеют вид $W_{red}(s) = B_{red}(s)/A_{red}(s)$, и вводятся интервалы коэффициентов β_i и α_i полиномов $B_{red}(s)$ и

$A_{red}(s)$. С этой целью полагается $\beta_i = (1 \pm \tilde{\Delta}_{\beta_i})\beta_i^\circ$, $\alpha_i = (1 \pm \tilde{\Delta}_{\alpha_i})\alpha_i^\circ$, где β_i° , α_i° — расчетные значения коэффициентов указанных полиномов, а $\tilde{\Delta}_{\alpha_i}$, $\tilde{\Delta}_{\beta_i}$ — максимальные относительные отклонения, обусловленные погрешностями определения коэффициентов в выражениях (2). Оценка робастной устойчивости редуцированных замкнутых систем проводится по критерию В. Л. Харитонова с учетом отсеченной при синтезе динамики, а влияние методов редукции — путем построения границ робастной устойчивости этих систем.

2. Редукция и синтез систем

Временная редукция. В случае динамической системы (1), (2) ее ПФ (3) представим в виде

$$W_{yu}(s) = \frac{0,75s^2 + 8,1s + 18,8}{(Ts + 1)(s + 2)(s - 1)},$$

где $T = 1/10$ можно считать малой постоянной времени. Поэтому, выполняя временную редукцию, т. е. полагая в последнем выражении $T = 0$, получим ПФ редуцированной модели в виде

$$W_{BP}(s) = \frac{0,75s^2 + 8,1s + 18,8}{(s + 2)(s - 1)} = \frac{B_{red}(s)}{A_{red}(s)}. \quad (4)$$

Для сравнения на рис. 1 приведены графики переходных функций, причем кривая 1 соответствует исходной модели, а кривая 2 — редуцированной модели (4). Так как исходная модель неустойчива, то приводятся лишь начальные участки переходных функций. Как видно, кривые 1 и 2 несколько отличаются.

Переходя к синтезу редуцированной системы, отметим, что в соответствии с методом аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям [13, 14] искомое устройство управления описывается уравнением

$$R(s)u(s) = Q(s)g(s) - L(s)y(s), \quad (5)$$

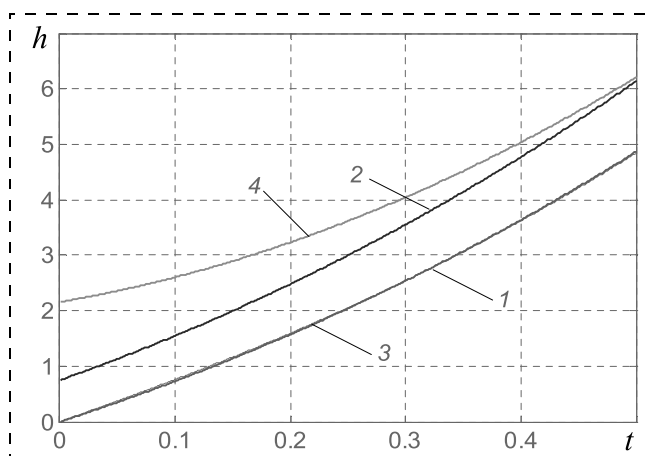


Рис. 1. Переходные функции исходной и редуцированных моделей

где $R(s)$, $Q(s)$, $L(s)$ — некоторые полиномы; $u(s)$, $g(s)$, $y(s)$ — изображения по Лапласу управления, задающего воздействия, и выходной переменной синтезируемой системы. Вид и степени полиномов $R(s)$, $Q(s)$, $L(s)$ определяются исходя из требований к качеству системы, условий разрешимости задачи синтеза, а также условий физической реализуемости уравнения (5).

На основе модели (4) синтезируем неполную, с астатизмом первого порядка к задающему воздействию систему управления с перерегулированием $\sigma^* \leq 2\%$ и длительностью переходного процесса не более $t_p^* = 0,85$ с. С этой целью, следуя работам [13, 14], положим $R(s) = sB_{\Omega}(s)\tilde{R}(s)$, где $B_{\Omega}(s)$ — нормированный полином, корни которого равны достаточно левым корням s_{Bi} полинома $B_{red}(s)$, т. е. таким, что $\text{Res}_{s_{Bi}} \leq -\eta_{sys}^*$, где $\eta_{sys}^* = 1,25$ — желаемая степень устойчивости синтезируемой системы. Множитель s в принятом выражении для полинома $R(s)$ обусловлен требованием астатизма первого порядка, так как $A_{red}(0) \neq 0$.

В общем случае $B_{red}(s) = \beta_m B_{\Omega}(s) B_{\bar{\Omega}}(s)$, здесь $B_{\bar{\Omega}}(s)$ — также нормированный полином, корни которого равны корням полинома $B_{red}(s)$, но не включен в число корней полинома $B_{\Omega}(s)$; β_m — коэффициент при старшей степени s^m полинома $B_{red}(s)$. Фактически в результате замыкания системы полином $B_{\Omega}(s)$ становится множителем характеристического полинома синтезируемой системы, теоретически делая ее неполной [14].

Примем также, что устройство управления (5) физически реализуемо, если его относительный порядок $\mu_{yy} \geq 1$, где $\mu_{yy} = \max\{r-l, r-q\}$, а $r = \deg R(s)$, $q = \deg Q(s)$ и $l = \deg L(s)$. При этих условиях расчетное уравнение "вход—выход" замкнутой редуцированной системы имеет вид

$$B_{\Omega}(s)\tilde{D}(s)y(s) = B_{\Omega}(s)Q(s)g(s), \quad (6)$$

где

$$\tilde{D}(s) = [A_{red}(s)s\tilde{R}(s) + \beta_m B_{\bar{\Omega}}(s)L(s)]. \quad (7)$$

Коэффициенты полинома $\tilde{D}(s)$ определяются методом стандартных передаточных функций (СПФ) на основе заданных показателей качества синтезируемой системы. Коэффициенты полиномов $\tilde{R}(s)$ и $L(s)$ находятся путем решения системы алгебраических уравнений, соответствующей полиномиальному уравнению (7) [13, 14].

- ♦ В случае передаточной функции (4) $\beta_m = \beta_2 = 0,75$, $B_{\Omega}(s) = s^2 + 10,8s + 25,067$, $B_{\bar{\Omega}}(s) = 1$, поэтому из условий разрешимости уравнения (7) и указанных условий физической реализуемости следует, что $\deg \tilde{R}(s) = 0$; $\deg L(s) = 2$, $\deg \tilde{D}(s) = n_{\tilde{D}} = 3$ [13, 14]. По значениям $v_g^* = 1$, $n_{\tilde{D}} = 3$ и $\sigma^* \leq 2\%$ из таблицы СПФ [14, с. 346] находим: $\Delta_0 = 1$,

$\Delta_1 = 2,2$, $\Delta_2 = 1,9$, $\Delta_3 = 1$, $\sigma_{таб} = 1,65\%$, $t_{таб} = 4,04$ с.

Это позволяет найти коэффициенты полинома $\tilde{D}(s) = \delta_3 s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0$ по формуле

$\delta_i = \Delta_i \omega_0^{n_d - i}$, где $\omega_0 = t_{таб}/t_p^*$. В данном случае с некоторым запасом примем $\omega_0 = 5$, тогда $\delta_3 = 1$, $\delta_2 = 9,5$, $\delta_1 = 55$, $\delta_0 = 125$, а система алгебраических уравнений, соответствующая уравнению (7), здесь имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0,75 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \rho_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 55 \\ 9,5 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Ее решение определяет полиномы $\tilde{R}(s) = 1$, $L(s) = 11,333s^2 + 76s + 166,67$. Поэтому полиномы $R(s) = s^3 + 10,8s^2 + 25,067s$, $Q(s) = 166,67$, а уравнение устройства управления (5) в случае временной редукции (ВР) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{УУ}_{\text{ВР}}: (s^3 + 10,8s^2 + 25,067s)u(s) = \\ = 166,67g(s) - (11,333s^2 + 76s + 166,67)y(s). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) описывает устройство, относительный порядок которого, очевидно, равен 1, что соответствует принятым условиям синтеза. Нетрудно убедиться, например, с помощью пакета MATLAB, что замкнутая редуцированная система (4), (9) имеет заданные показатели качества.

Балансная редукция. Эту операцию удобно выполнять в MATLAB с помощью функции "balancmr" [11, 12]. Применяя эту функцию к системе уравнений (1), (2), получим редуцированную модель

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_b = \begin{bmatrix} -1,474 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_b + \begin{bmatrix} 1,268 \\ 3,678 \end{bmatrix} u, \\ y = [-1,268 \ 2,278] \mathbf{x}_b. \end{aligned} \quad (10)$$

Передаточная функция полученной методом балансной редукции модели (10) имеет вид

$$W_{\text{бал}}(s) = \frac{6,71(s + 2,0617)}{s^2 + 0,474s - 1}. \quad (11)$$

Переходная функция балансной модели (10), (11) также приведена на рис. 1 (кривая 3), причем она практически совпадает с переходной функцией исходной модели (кривая 1). В этом заключается одна из особенностей балансных моделей, отличающих их от других редуцированных моделей динамических систем.

Замкнутая система синтезируется по передаточной функции (11) тем же методом, что и в случае временной редукции, но при $\tilde{D}(s) = s^4 + 7,7s^3 + 42,88s^2 + 120s + 150$, так как здесь полином $B_{\Omega}(s) = s + 2,0617$ имеет первую степень; коэффициент $\beta_m = \beta_1 = 6,771$, а полином $B_{\bar{\Omega}}(s) = 1$, по-

прежнему. В результате получим следующее уравнение "вход—выход" балансной редукции (БР):

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_{\text{БР}}: (s^3 + 8,762s^2 + 13,813s)u(s) = \\ & = 22,153g(s) - (5,638s^2 + 19,716s + 22,153)y(s). \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что замкнутая система (10), (12) имеет те же заданные показатели качества.

Модальная редукция. Наиболее быстро затухающей модой рассматриваемой системы (1), (2), очевидно, является мода $c_1 e^{-10t}$, соответствующая корню $s_1 = -10$. Остальным корням характеристического полинома этой системы соответствуют "доминирующие (сравнительно медленно затухающая $c_2 e^{-2t}$ и возрастающая $c_3 e^t$) моды". Для краткости быстро затухающие моды далее будем называть быстрыми модами, а остальные — доминирующими модами.

В соответствии с методом спектральной декомпозиции проводится замена в уравнениях (1), (2) вектора $\mathbf{x}$ по формуле: $\mathbf{x} = \mathbf{P}_1 \mathbf{z}_1$ так, чтобы новый вектор $\mathbf{z}_1$ состоял из двух компонент: быстрой $-\mathbf{z}_1^{**}$ и доминирующей $-\mathbf{z}_1^*$ [1, 10].

В рассматриваемом случае быстрая компонента $\mathbf{z}_1^{**} = \mathbf{z}_1$ должна зависеть только от корня $s_1 = -10$, т. е. только от быстрой моды $c_1 e^{-10t}$, а доминирующая компонента $\mathbf{z}_1^*$ — от остальных корней характеристического полинома, т. е. от остальных мод системы.

Для этой цели можно воспользоваться, например, линейным преобразованием $\mathbf{x} = \mathbf{P}_1 \mathbf{z}_1$, где матрица $\mathbf{P}_1^{-1}$ — обратная к $\mathbf{P}_1$ — имеет вид

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,34 & 0,4 \\ -0,6667 & -0,0684 & 0,0874 \\ 0,2667 & -1,1465 & -1,7998 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Подвергая вектор состояния системы (1), (2) преобразованию $\mathbf{x} = \mathbf{P}_1 \mathbf{z}_1$, получим уравнения относительно переменных z_{i1} , $i = 1, 2, 3$. Для удобства дальнейшего рассмотрения запишем их в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{11} &= -10z_{11} + 0,4u, \\ \dot{z}_{21} &= -8z_{11} + 0,335z_{21} - 0,291z_{31} - 0,475u, \\ \dot{z}_{31} &= 51z_{11} - 5,334z_{21} - 1,333z_{31} - 0,8u, \\ y &= 54z_{11} + 12z_{21} + 10,5z_{31}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для проведения модальной редукции модели (14) быстрая компонента $z_{11} = z_{11}(t)$ в уравнениях доминирующих компонент z_{21} и z_{31} заменяется ее установившимся значением $z_{11}^\circ = \lim_{t \rightarrow \infty} z_{11}(t)$, при котором $\dot{z}_{11} = 0$. При этом условии из первого уравнения (14) вытекает равенство $z_{11}^\circ = 0,04u$. Полагая в остальных уравнениях (14) $z_{11} = z_{11}^\circ = 0,04u$, полу-

чим уравнения модально редуцированной модели, которые в векторно-матричной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1^* &= \begin{bmatrix} 0,335 & -0,291 \\ -5,334 & -1,333 \end{bmatrix} \mathbf{z}_1^* + \begin{bmatrix} -0,795 \\ 1,24 \end{bmatrix} u, \\ y &= [12 \ 10,5] \mathbf{z}_1^* + 2,16u. \end{aligned} \quad (15)$$

Как видно, полученная модель имеет более низкий порядок по сравнению с исходной моделью системы. ПФ модально редуцированной модели (15)

$$W_{\text{МР1}}(s) = \frac{2,16s^2 + 5,636s + 18,8}{s^2 + s - 2}. \quad (16)$$

Переходная функция модально редуцированной модели (15), (16) также приведена на рис. 1 (кривая 4). Как видно, она довольно сильно отличается от переходной функции исходной модели (1), (2).

Выполняя, как и выше, процедуру синтеза замкнутой системы по ПФ (16) при тех же условиях, найдем уравнение устройства управления для данного случая модальной редукции (МР):

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_{\text{МР1}}^*: (s^3 + 2,61s^2 + 8,704s)u(s) = \\ & = 57,87g(s) - (3,9352s^2 + 26,389s + 57,87)y(s). \end{aligned} \quad (17)$$

Однако аналогичную спектральную декомпозицию модели (1), (2) можно осуществить и с помощью других матриц, в частности, с помощью матриц, обратные к которым имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1,7 & 1 \\ -1,8 & -0,4 & -0,25 \\ 2 & -1,4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1,7 & 2 \\ 0,4 & 1,2 & 0,5 \\ 2 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_3^{-1} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,34 & 0,4 \\ -0,1167 & 0,1317 & -0,0167 \\ 0,2667 & -0,3467 & -0,6333 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Подвергая уравнения системы (1), (2) преобразованиям $\mathbf{x} = \mathbf{P}_v \mathbf{z}_v$, получим уравнения относительно переменных z_{iv} , $v = 2, 3, 4$. Как и выше, запишем их в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{12} &= -10z_{12} + 2u, \\ \dot{z}_{22} &= -z_{12} - z_{22} - 0,5z_{32} - 1,5u, \\ \dot{z}_{32} &= 21z_{12} - 4z_{22}, \\ y &= 6z_{12} + 3z_{22} + 2,5z_{32}; \\ \dot{z}_{13} &= -10z_{13} + 0,4u, \\ \dot{z}_{23} &= 6,542z_{13} - 2,677z_{23} + 1,833z_{33} - 0,0167u, \\ \dot{z}_{33} &= 23,833z_{13} - 1,333z_{23} + 1,667z_{33} - 0,133u, \\ y &= 21,5z_{13} + 6z_{23} + 7,5z_{33}; \\ \dot{z}_{14} &= -10z_{14} + 2u, \\ \dot{z}_{24} &= z_{14} - 3z_{24} + 4z_{34} + u, \\ \dot{z}_{34} &= 0,5z_{14} - z_{24} + 2z_{34} + 2u, \\ y &= z_{14} + 1,5z_{24} + 2z_{34}. \end{aligned} \quad (18)$$

Выполняя модальную редукцию моделей (18) по аналогии с моделью (14), получим еще три модально редуцированные модели системы (1), (2):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_2^* &= \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}_2^* + \begin{bmatrix} -1,7 \\ 4,2 \end{bmatrix} u, \\ y &= [3 \ 2,5] \mathbf{z}_2^* + 1,2u; \\ \dot{\mathbf{z}}_3^* &= \begin{bmatrix} -2,667 & 1,833 \\ -1,333 & 1,667 \end{bmatrix} \mathbf{z}_3^* + \begin{bmatrix} 0,245 \\ 1,002 \end{bmatrix} u, \\ y &= [6 \ 7,5] \mathbf{z}_3^* + 0,86u; \\ \dot{\mathbf{z}}_4^* &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{z}_4^* + \begin{bmatrix} 1,2 \\ 2,1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1,5 \ 2] \mathbf{z}_4^* + 0,2u. \end{aligned} \quad (19)$$

Модально редуцированным моделям (19) соответствуют следующие ПФ:

$$\begin{aligned} W_{MP2}(s) &= \frac{1,2s^2 + 6,6s + 18,8}{s^2 + s - 2}, \\ W_{MP3}(s) &= \frac{0,86s^2 + 9,844s + 24,44}{s^2 + s - 2}, \\ W_{MP4}(s) &= \frac{0,2s^2 + 6,8s + 22,4}{s^2 + s - 2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Переходные функции модально редуцированных вариантов (19), (20) исходной системы (1), (2) приведены на рис. 2, где кривая 1 — это по-прежнему переходная функция исходной системы, а цифрами 2, 3 и 4 обозначены переходные функции, соответствующие моделям (19), (20). С учетом рис. 1 нетрудно заключить, что переходные функции модально редуцированных моделей могут отличаться как друг от друга, так и от переходной функции исходной системы довольно сильно. Вместе с тем, они могут быть и достаточно близкими к последней.

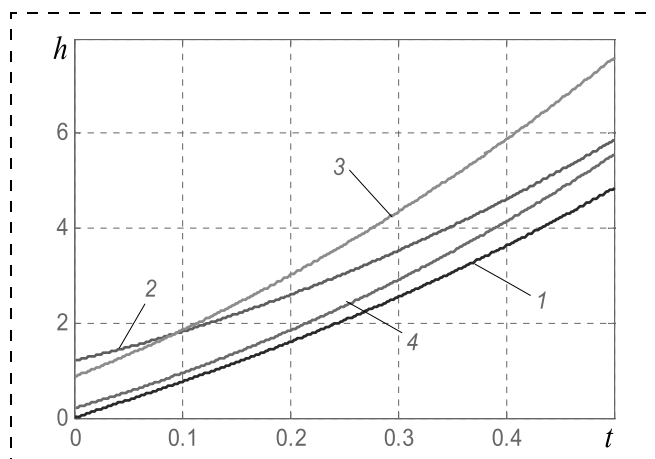


Рис. 2. Переходные функции исходной и модально редуцированных моделей

Для модально редуцированных моделей (19), (20) тем же методом [13, 14] и при тех же условиях, что и выше, получены три соответствующих варианта УУ:

$$\begin{aligned} \text{УУ}_{MP2}^*: (s^3 + 5,5s^2 + 15,667s)u(s) = \\ = 104,167g(s) - (7,0833s^2 + 47,5s + 104,167)y(s), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{УУ}_{MP3}^*: (s^3 + 11,45s^2 + 28,37s)u(s) = \\ = 145,349g(s) - (9,884s^2 + 66,28s + 145,349)y(s), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{УУ}_{MP4}^*: (s^3 + 34s^2 + 112s)u(s) = \\ = 625g(s) - (42,5s^2 + 285s + 625)y(s). \end{aligned} \quad (23)$$

Судя по уравнениям (17) и (21)—(23), процедура модальной редукции может приводить к УУ_{MP}^* , параметры которых отличаются более чем в десять раз. Подчеркнем, что при этом показатели качества модально редуцированных замкнутых систем со всеми приведенными вариантами УУ_{MP}^* (при расчетных значениях параметров) одни и те же. Именно поэтому представляет значительный интерес вопрос о том, как различия модально редуцированных моделей сказываются на робастности соответствующих замкнутых систем.

3. Исследование робастной устойчивости

При исследовании влияния методов редукции управляемых систем на робастную устойчивость редуцированных систем, с учетом отсеченной при синтезе быстрой динамики исходной модели, используется, как отмечалось выше, критерий В. Л. Харитонова. С этой целью характеристический полином $D_{rs}(s, T)$ редуцированной замкнутой системы берется в виде

$$D_{rs}(s, T) = (Ts + 1)A_{red}(s)R(s) + B_{red}(s)L(s), \quad (24)$$

а все коэффициенты α_i и β_i полиномов $A_{red}(s)$, $B_{red}(s)$ заменяются выражениями $\alpha_i^\circ (1 \pm \Delta_{\alpha_i}/100)$ и $\beta_i^\circ (1 \pm \Delta_{\beta_i}/100)$, отражающими неточности в определении параметров управляемой системы (1), (2). При этом предполагается, что параметры реальных УУ равны расчетным значениям с пренебрежимо малой ошибкой.

Постоянная времени T , которая в соотношении (24) отражает влияние динамики быстрой подсистемы, отсеченной при синтезе, в процессе исследования изменяется от нуля до такого значения $T_{m, red}$, при котором замкнутая редуцированная система теряет устойчивость уже при $\Delta_{\alpha_i} = 0$ и $\Delta_{\beta_i} = 0$, т. е. при расчетных значениях параметров α_i° , β_i° .

В данной работе использовалась упрощенная компьютерная программа, позволяющая вводить одинаковые относительные отклонения параметров управляемой системы, т. е. $\Delta_{\alpha_i} = \Delta_{\beta_i} = \Delta$. Построение четырех интервальных полиномов В. Л. Хари-

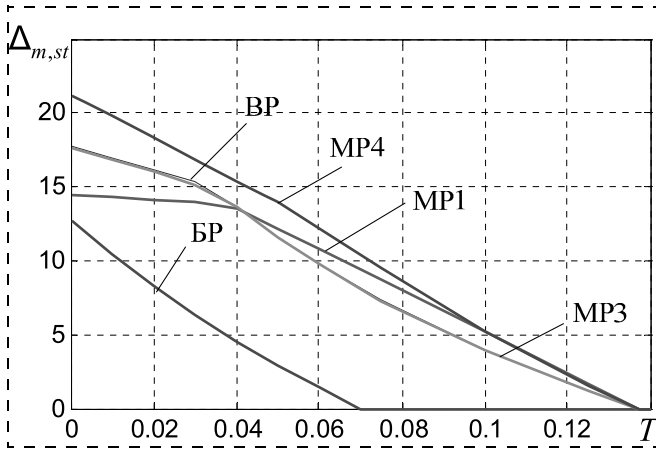


Рис. 3. Границы робастной устойчивости редуцированных систем

тонова, соответствующих заданным значениям Δ , а также проверка условий робастной устойчивости реализуются соответствующими подпрограммами.

На рис. 3 представлены соответствующие различным методам редукции графики, отражающие зависимость относительных отклонений $\Delta = \Delta_{m, st}$ от значений постоянной времени T . Здесь $\Delta_{m, st}$ — это отклонения параметров в % к расчетным значениям, критические по робастной устойчивости замкнутой редуцированной системы, т. е. если в выражении (24) $\Delta = \Delta_{m, st}$, то замкнутая система оказывается на границе робастной устойчивости.

На рис. 3 символами БР, ВР и МР обозначены границы устойчивости, соответствующие системам, синтезированным на основе балансной, временной и модальной редукции. При этом график, соответствующий системе, синтезированной по модели МР2 (с вектором состояния $\mathbf{z}_2^*$), не приведен, так как он практически полностью совпадает с графиком, соответствующим системе, синтезированной по модели МР1 (с вектором состояния $\mathbf{z}_1^*$).

Таблица 1

Допустимые отклонения $\Delta_{m, st}$

T, c	0,0	0,01	0,05	0,10	$T_{m, red}, c$
БР	17,80	17,0	11,58	3,92	0,137
ВР	12,78	10,40	2,92	0,00	0,0705
МР 1	14,46	14,29	12,17	5,25	0,137
МР 2	14,93	14,46	10,57	3,83	0,137
МР 3	17,69	16,85	11,55	3,89	0,137
МР 4	21,22	19,78	13,93	5,15	0,137

Таблица 2

Допустимые отклонения $\Delta_{m, st}$

T, c	0,0	0,01	0,05	0,10	$T_{m, red}, c$
ВР	14,40	12,86	7,44	2,05	0,123
БР	11,30	10,04	7,35	4,45	0,215
МР 1	11,31	10,41	7,37	4,48	0,217
МР 2	13,93	12,49	7,37	2,10	0,123

Практически совпадают и границы устойчивости редуцированных систем, синтезированных по моделям ВР и МР3.

Для большей наглядности полученных результатов в столбцах со 2-го по 5-й табл. 1 представлены критические значения отклонений $\Delta_{m, st}$ в %, соответствующие различным вариантам редукции и значениям T , равным: 0,0 с; 0,01 с; 0,05 с и 0,10 с.

Подчеркнем, что значения $\Delta_{m, st}$ на рис. 3 при $T = 0$ и второй столбец табл. 1 соответствуют отклонениям, критическим по робастной устойчивости *расчетных* замкнутых редуцированных систем.

В последнем столбце табл. 1 приведены значения постоянной времени T , при которых замкнутые редуцированные системы оказываются на границе устойчивости уже при расчетных значениях параметров. Как видно, в этом случае редуцированные системы, полученные методами временной и модальной редукции, характеризуются одним и тем же граничным значением $T_{m, red}$, которое в рассмотренных случаях равно 0,137 с.

В случае же балластной редукции это значение равно 0,0705 с, т. е. намного меньше. Меньшими, по сравнению с другими методами редукции, являются и значения критических отклонений $\Delta_{m, st}$ при $T \leq T_{m, red}$. Этот факт является наиболее неожиданным, так как при балластной редукции переходные функции редуцированной и исходной управляемой систем, как видно на рис. 1, являются наиболее близкими. Вероятнее всего, это обусловлено тем, что при балластной редукции изменяется динамика устойчивой части доминирующей подсистемы, в то время как при временной и модальной редукции динамика доминирующей подсистемы полностью соответствует динамике сохраняемой части исходной модели.

Рассмотренная выше система (1), (2), является неустойчивой. Кроме того, соответствующие ей редуцированные системы имеют передаточные функции (4), (16) и (20), у которых степени числителей и знаменателей одинаковы. В связи с этим аналогичные операции, т. е. редукция, синтез УУ и исследование робастной устойчивости, были выполнены и для другой исходной модели, в уравнениях (1) которой матрица и векторы имели вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,1140 & -0,8637 & -0,2260 \\ 6,0874 & 7,5882 & 10,6909 \\ -10,1170 & -14,5180 & -18,9742 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0,8270 \\ 3,3859 \\ -1,4646 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -5,6 \\ -1,8 \\ -1,0 \end{bmatrix},$$

а передаточная функция

$$W_{yu}(s) = \frac{18s + 223}{s^3 + 11,5s^2 + 15,5s + 5} = \frac{18s + 223}{(s + 10)(s + 1)(s + 0,5)}.$$

В этом случае виды редукций и условия синтеза редуцированных устройств управления использовались те же, что и в первом случае. Аналогично, в столбцах со 2-го по 5-й табл. 2 приведены соответствующие этому случаю критические значения отклонений $\Delta_{m, st}$ в процентах, соответствующие различным методам редукции и при тех же значениях T , что и в табл. 1.

Общий характер изменения допустимых значений $\Delta_{m, st}$ при различных значениях постоянной времени T и в первом, и во втором случаях, очевидно, одинаков, т. е. с увеличением значения T допустимые по робастной устойчивости значения отклонений параметров уменьшаются. При этом система, полученная при балансной редукции, также имеет меньшую степень робастной устойчивости по сравнению с модально редуцированными системами.

Фактически влияние множителя $(Tr + 1)$ в рассмотренных случаях является структурным возмущением редуцированной системы [4, 14]. Таким образом, как и в случае нередуцированных систем, при достаточной интенсивности структурных возмущений редуцированные системы также теряют устойчивость даже при расчетных значениях параметров.

Заключение

Проведенное исследование робастной устойчивости редуцированных систем свидетельствует о существенном влиянии отсеченной при синтезе динамики на робастную устойчивость замкнутых динамических систем, уменьшая ее. Большинство методов редукции динамических систем заключается в отсечении быстрой динамики управляемых систем в процессе синтеза. Различные методы редукции, как правило, приводят к различным характеристикам робастности результирующих систем.

Практически все методы редукции применимы лишь при очень малой длительности отсекаемой динамики. В рассмотренных выше случаях отсеченная динамика незначительно уменьшала робастную устойчивость редуцированных систем, если только ее длительность примерно на порядок меньше длительности доминирующей динамики.

Полученные выше результаты позволяют также сделать следующие выводы.

1. Допустимые по робастной устойчивости отклонения $\Delta_{m, st}$ параметров технологических процессов и объектов управления могут служить "оценкой степени робастной устойчивости" как редуцированных, так и нередуцированных синтезируемых систем.

2. Чем больше длительность "быстрой динамики", отсеченной при синтезе замкнутых систем, тем меньше степень робастной устойчивости редуцированных систем.

3. Метод модальной редукции является неоднозначным и может приводить к редуцированным системам как с большей, так и с меньшей степенью робастной устойчивости по сравнению с временной редукцией.

4. Метод балластной редукции приводит к редуцированным системам с наименьшей степенью робастной устойчивости по сравнению с другими методами редукции.

5. Существует оптимальная модальная редукция линейных динамических управляемых систем, при которой степень робастной устойчивости замкнутых редуцированных систем является наибольшей.

С учетом широкой распространенности на практике редуцированных систем представляется целесообразной разработка метода синтеза модально редуцированных систем, обеспечивающего в заданных условиях наибольшую степень робастной устойчивости.

Список литературы

1. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Концепция модальной редукции моделей динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 12. С. 2—8.
2. Тарарыкин С. В., Аполонский В. В. Методы синтеза редуцированных полиномиальных регуляторов динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 2. С. 75—80.
3. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. О проблеме неробастности спектра в задачах модального управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 10. С. 8—13.
4. Гайдук А. Р., Бесклубова К. В. Исследование влияния структурных возмущений на устойчивость динамических систем // Наука и образование на рубеже тысячелетий. Сб. науч.-исслед. работ. Вып. 1. Кисловодск: Изд-во КГТИ, 2014. С. 42—49.
5. Топчиев Ю. И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1989.
6. Тютиков В. В., Тарарыкин С. В. Робастное модальное управление технологическими объектами. Иваново: Изд-во ИГЭУ, 2006.
7. Gaiduk A. R., Stojkovic N. M. Formation of Transfer Function for Control Systems under Implementation Conditions // FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics. 2014. Vol. 13, N. 1. P. 15—25.
8. Нейдорф Р. А., Сашенко Д. С. Параметрический синтез законов управления на основе обобщенных корневых ограничений // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ-16: Сб. тр. Междунар. науч. конф. Т. 2. СПб.: Изд-во СПбГТИ (ТУ), 2003. С. 67—69.
9. Балберин В. В. Сбалансированные модели скалярных систем // Электронное моделирование. 1988. Т. 10. № 5. С. 6—10.
10. Алиев Ф. А., Ларин В. Б., Ясинский С. А. О блочной диагонализации граммианов и редукции линейных управляемых систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. № 4. С. 16—24.
11. Glover K. All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and their L_∞ -error Bounds // International Journal Control. 1984. Vol. 39, N. 6. P. 1145—1193.
12. Safonov M. G., Chiang R. Y., Limebeer D. J. N. Optimal Hankel Model Reduction for Nonminimal Systems // IEEE Transaction on Automation Control. 1990. Vol. 35, N. 4. P. 496—502.
13. Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А. Синтез динамических систем по требуемым показателям качества // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 4. С. 7—12.
14. Гайдук А. Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012.

Robustness of the Reduced Automation Dumanic Systems

A. R. Gaiduk, gaiduk_2003@mail.ru✉,

Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation;
Kislovodsk Humanitarian-Technical Institute, Kislovodsk, 337700, Russian Federation,

E. A. Plaksienko, pumkad@mail.ru,

Taganrog Institute of Management and Economics, Taganrog, 347900, Russian Federation

Corresponding author: **Gaiduk A. R.**, D. Sc., Professor,
Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation;
Head of Department, Kislovodsk Humanitarian-Technical Institute,
Kislovodsk, 337700, Russian Federation, e-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Received on January 08, 2016

Accepted on January 14, 2016

The article is devoted to the influence of various reduction methods of the mathematical models on the robust stability of the automation systems of the technological processes. As is known, these automation systems are designed on the basis of the reduced models. The automation systems of a high order are usually characterized by an increased complexity and high sensitivity to the parameters of deviations from the calculated values. Since the known parameters of the systems are always inexact, a high sensitivity (or low robustness) of the systems lowers sharply the quality of the automated technological processes. Reduction of the dynamic models of the technological processes is frequently applied to eliminate this drawback. The reduction of the models can be carried out by various methods such as elimination of the poorly influencing bonds and small time constants due to removal of the quickly changing variables (cutting of the quick dynamics), etc. The reduced models also allow us to design simpler regulators and more robust automation systems of the lower orders. Besides, a solution to the problem of the automation systems design becomes much easier. However, in a real automation system the cut off quick dynamics influences the properties of the reduced system. Exactly the influence of this cut off quick dynamics on the robust stability of the reduced automation systems is the subject of this work. The robust stability is estimated with the help of V. L. Kharitonov criteria. For solving of the problem the models are reduced by three various methods. The reduced automation systems are created by the analytical design method. The maximal admissible deviations of their parameters for the robust stability are studied with account of the quick dynamics cut off at the stage of designing. It was established, that the cut off quick dynamics rendered an essential influence on the robust stability of the reduced automation systems. The received results can be applied for development of the automation systems for the technological processes in the chemical, power engineering, aviation, machine-building and other sectors.

Keywords: technological process, linear dynamic system, mathematical model, spectral decomposition, reduction, analytical design, robust stability

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 13-08-00249.

For citation:

Gaiduk A. R., Plaksienko E. A. Robustness of the Reduced Automation Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 17, no. 5, pp. 308–315.

DOI: 10.17587/mau/16.308-315

References

1. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Koncepciya modal'noy redukcii modelei dinamicheskikh sistem* (The conception of modal reduction of models of controlled systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2013, no. 12, pp. 2–8 (in Russian).
2. **Tararykin S. V., Apolonskiy V. V.** *Metody sinteza reduktirovannykh polinomial'nykh regulyatorov dinamicheskikh sistem* (Methods of synthesis of reduced polynomial controls dynamic systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 75–80 (in Russian).
3. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *O probleme nerobastnosti spektra v zadachakh modal'nogo upravleniya* (Concerning the problem of nonrobust of spectrum in tasks of modal control), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 10, pp. 8–13 (in Russian).
4. **Gaiduk A. R., Besklubova K. V.** *Issledovanie vliyaniya strukturykh vozmushcheniy na ustoychivost' dinamicheskikh sistem* (Research of influence perturbations on the stability of dynamical systems), *Nauka i Obrazovanie na Rubezhe Tysyacheletiy. Sbornik Nauchno-Issledovatel'skikh Rabot*, vol. 1, Kislovodsk, 2014, pp. 42–49 (in Russian).
5. **Topcheev Yu. I.** *Atlas dlya proektirovaniya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (Atlas for the design of automatic control systems), Moscow, Mashinostroenie, 1989 (in Russian).
6. **Tyutikov V. V., Tararykin S. V.** *Robastnoe modal'noe upravlenie tekhnologicheskimi ob'ektami* (Robust modal control of technological plants), Ivanovo, 2006 (in Russian).
7. **Gaiduk A. R., Stojkovic N. M.** Formation of Transfer Function for Control Systems under Implementation Conditions, *FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics*, 2014, vol. 13, no. 1, pp. 15–25.
8. **Neydorf R. A., Sashenko D. S.** *Parametricheskiiy sintez zakonov upravleniya na osnove obobshchennykh kornevnykh ogranicheniy* (Parametric synthesis of control laws based on the generalized root restrictions), *Proceedings of the International Scientific Conference Mathematical Methods in Engineering and Technology MMET-16*, Russia, St. Petersburg, 2003, vol. 2, pp. 67–69 (in Russian).
9. **Balberin V. V.** *Sbalansirovannyye modeli skalyarnykh sistem* (Balanced model of scalar systems), *Elektronnoe Modelirovanie*, 1988, vol. 10, no. 5, pp. 6–10 (in Russian).
10. **Aliev F. A., Larin V. B., Yasinskiy S. A.** *O blochnoy diagonalizatsii gramianov i redukcii lineynykh upravlyaemykh sistem* (About gramians' block diagonalization and reduction of linear control systems), *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 1995, no. 4, pp. 16–24 (in Russian).
11. **Glover K.** All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and their L_∞ -error Bounds, *International Journal of Control*, 1984, vol. 39, no. 6, pp. 1145–1193.
12. **Safonov M. G., Chiang R. Y., Limebeer D. J. N.** Optimal Hankel Model Reduction for Nonminimal Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, vol. 35, no. 4, pp. 496–502.
13. **Gaiduk A. R., Plaksienko E. A.** *Sintez dinamicheskikh sistem po trebuemym pokazatelyam kachestva* (The synthesis of dynamic systems on the required performances), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2008, no. 4, pp. 7–12 (in Russian).
14. **Gaiduk A. R.** *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (Polinomial'nyy podkhod)* (The theory and analytical methods of automatic control systems design (polynomial approach), Moscow, Fizmatlit, 2012 (in Russian).