УДК 629.7 DOI: 10.17587/mau.19.65-72

М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., dp940@mail.ru,
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

Оптимизация кинетического момента для повышения маневренности космического аппарата с инерционными исполнительными органами

Решается задача улучшения маневренности космического аппарата (КА) с инерционными исполнительными органами (системой силовых гироскопов, гиродинами) за счет оптимизации алгоритмов управления кинетическим моментом. В аналитическом виде записаны условия оптимальности режима переориентации без "разгрузки" гиросистемы и изучены свойства оптимального движения. Даны ключевые соотношения и уравнения для построения оптимальной программы управления, если КА разворачивается в условиях возмущений. Приведен пример численного моделирования разворота КА в соответствии с разработанным методом управления.

Ключевые слова: *космический аппарат, ориентация, силовые гироскопы, управляющая функция, оптимальное управление, кинетический момент*

Введение

Эффективность средств и методов управления движением космического аппарата (КА) непосредственно влияет на эффективность выполнения целевых программ — на объем решаемых задач, проведенных наблюдений и экспериментов, на точность полученных результатов, на время активного существования на орбите и целевого применения КА и т. д. К проблеме оптимального управления движением КА многие исследователи обращались неоднократно [1—9]. Разработка высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня. КА дистанционного зондирования Земли, мониторинга, а также астрофизические и другие научные КА требуют периодической смены ориентации для наведения научных приборов и целевой аппаратуры на интересующие участки земной поверхности или область небесной сферы. Минимизация длительности разворота увеличит время наблюдения и улучшит условия их выполнения. Оптимизация способа переориентации (в смысле маневренности КА) повышает эффективность использования КА. Под маневренностью понимается способность КА совершать маневры вокруг центра масс за меньшее время. Чем быстрее мы можем перенацелить КА на новый объект наблюдения (в данном случае развернуть КА) или провести очередную коррекцию орбиты, тем больше полезного времени будет для выполнения целевой задачи (для использования КА по целевому назначению — для получения снимков из космоса, для изучения интересующих объектов, получения метеоинформации и т.д.). Нередко управление ориентацией осуществляется инерционными исполнительными органами (системой силовых гироскопов или гиродинами) [2]. В этом случае разворот выполняется за счет перераспределения кинетического момента между системой гиродинов и корпусом КА. Для исключения "насыщения" гиросистемы ее суммарный кинетический момент не должен превышать допустимого значения. Нахождению оптимального по времени режима переориентации КА, при котором запас кинетического момента системы гиродинов был бы достаточным, посвящена данная статья. Управляющей функцией считается кинетический момент КА.

Уравнения движения и постановка задачи оптимального управления

Под поворотным маневром понимают перевод связанных осей КА из одного известного углового положения в другое известное (обычно заданное) угловое положение за конечное время T. Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных механизмов, создающих вращающие моменты относительно всех трех главных центральных осей инерции КА. Угловое движение КА как твердого тела будем описывать кинематическими уравнениями, записанными в кватернионных переменных:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1 L_1/J_1 - \lambda_2 L_2/J_2 - \lambda_3 L_3/J_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0 L_1/J_1 + \lambda_2 L_3/J_3 - \lambda_3 L_2/J_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0 L_2/J_2 + \lambda_3 L_1/J_1 - \lambda_1 L_3/J_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0 L_3/J_3 + \lambda_1 L_2/J_2 - \lambda_2 L_1/J_1, \end{aligned} \qquad (1)$$

где λ_j ($j = \overline{0, 3}$) — компоненты кватерниона Λ [1], который задает движение связанного базиса $\boldsymbol{E}$, образованного главными центральными осями инерции КА, относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$; L_i ($i = \overline{1, 3}$) — проекции вектора $\mathbf{L}$ кинетического момента КА на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}$; J_i — главные центральные моменты инерции КА. Уравнения (1) имеют граничные условия $\Lambda(0) = \Lambda_{н}$ и $\Lambda(T) = \Lambda_{к}$, где T — время окончания маневра переориентации. Кватернионы $\Lambda_{н}$ и $\Lambda_{к}$ имеют произвольные наперед заданные значения, для которых $\Lambda_{к} \neq \pm\Lambda_{н}$ и $\|\Lambda_{н}\| = \|\Lambda_{к}\| = 1$ (кватернион Λ принят нормированным [1] для удобства).

В целях повышения маневренности КА оптимальным будем считать движение, при котором длительность маневра T минимальна. Поскольку маневр разворота выполняется с помощью силовых гироскопов [2], существенной характеристикой становится кинетический момент корпуса КА. При управлении ориентацией КА силовыми гироскопами кинетический момент **G** гиросистемы должен находиться внутри заданной ограниченной области S, выход за которую приводит к потере управляемости КА. Чтобы разворот произошел без "разгрузки" гиросистемы, в любой момент времени модуль кинетического момента системы гиродинов должен быть заведомо меньше радиуса R_0 сферы, вписанной в область возможных значений кинетического момента гиросистемы S ($R_0 > 0$) [9—11]. Если возмущающие моменты малы, то общий кинетический момент КА как твердого тела с вращающимися массами равен или близок нулю ($\mathbf{L} + \mathbf{G} \approx 0$). Поэтому оптимальное движение КА должно удовлетворять условию

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \leqslant L_{\max}^2, \tag{2}$$

где $L_{\max}$ — максимально допустимое значение кинетического момента, такое, что $0 < L_{\max} < R_0$ (запас кинетического момента $R_0 - |\mathbf{L}| > 0$ необходим для использования его на компенсацию предполагаемых возмущающих моментов $\mathbf{M}_{\text{в}}$).

Задачу оптимального управления формализуем следующим образом: необходимо развернуть КА из положения $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}}$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}}$ в соответствии с уравнениями (1) при ограничении (2) за минимальное время T. Принципиальным отличием от известных задач оптимизации является то, что хотя в задаче (1)—(2) $L_{\max}$ — постоянная величина, само значение $L_{\max}$ подлежит оптимизации (если иметь в виду действие на КА возмущающих моментов).

Особенность повышения маневренности КА, управляемого силовыми гироскопами (гиродинами), заключается в необходимости определения величины $L_{\max}$ и решении задачи максимального быстродействия как классической задачи оптимального управления ($L_{\max}$ должна быть как можно ближе к R_0, но при этом достаточной для компенсации возможных возмущений или отклонений). Когда возмущающие моменты пренебрежимо малы, значение $L_{\max}$ можем считать известным (например, $L_{\max} = 0{,}95R_0$). В противном случае (когда действие возмущающих моментов необходимо учитывать) задача оптимального управления кинетическим моментом во время разворота разделяется на две задачи — нахождение оптимального значения $L_{\max}$ и построение оптимальной программы изменения кинетического момента при известном значении $L_{\max}$.

Решение задачи оптимального управления без учета возмущений

В этом случае значение $L_{\max}$ известно, и в ограничении (2) $L_{\max}$ — параметр. Будем решать поставленную задачу (1)—(2), используя принцип максимума Л. С. Понтрягина [12]. Управляющими переменными принимаем компоненты кинетического момента L_i. Наличие фазового ограничения $\|\Lambda\| = 1$ несущественно, так как оно всегда выполняется (при любых движениях КА вокруг центра масс). Переменные λ_j обладают следующим свойством: в силу уравнений (1) норма $\|\Lambda\|$ кватерниона Λ есть величина постоянная, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{const}$. В начальный момент времени $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_{\text{н}}\| = 1$, поэтому $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$. Так как критерий оптимальности не включает позиционных координат λ_j, мы можем использовать универсальные переменные r_i ($i = \overline{1, 3}$) [3], заменяющие сопряженные переменные. Для задачи максимального быстродействия (или максимальной маневренности КА) функция Гамильтона H равна

$$H = -1 + L_1 r_1/J_1 + L_2 r_2/J_2 + L_3 r_3/J_3. \tag{3}$$

Оптимальные функции r_i как компоненты вектора **r** удовлетворяют уравнениям

$$\dot r_1 = L_3 r_2/J_3 - L_2 r_3/J_2;\ \dot r_2 = L_1 r_3/J_1 - L_3 r_1/J_3;$$
$$\dot r_3 = L_2 r_1/J_2 - L_1 r_2/J_1. \tag{4}$$

Функция Гамильтона H составлена без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ для фазовых переменных в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем договорились выше. Вектор **r** неподвижен относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$, из-за чего $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$. Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (4) определяется начальным $\Lambda_{\text{н}}$ и конечным $\Lambda_{\text{к}}$ положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1, 3]:

$$\mathbf{r} = \tilde\Lambda \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \text{ где } \mathbf{c}_E = \Lambda_{\text{н}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde\Lambda_{\text{н}} = \text{const}$$

(составляющие вектора $\mathbf{c}_E$ — проекции вектора **r** на оси инерциального базиса $\boldsymbol{I}$). Система (4) совместно с требованием максимальности гамильтониана H и условиями трансверсальности $\mathbf{r}(0) \neq 0$, $\mathbf{r}(T) \neq 0$ и $H(T) = 0$ являются необходимыми условиями оптимальности (заметим, что соответствующим выбором оптимального значения $|\mathbf{r}|$ всегда можно добиться, чтобы $H(T) = 0$). Условия максимума функции H определяют искомое решение $\mathbf{L}(t)$; граничные условия по положению (для $\Lambda(0)$ и $\Lambda(T)$) определяют решения $\Lambda(t)$ и $\mathbf{r}(t)$.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении значения $\mathbf{r}(0)$, при котором решение системы дифференциальных уравнений (1), (4) с одновременной максимизизацией в каждый момент времени функции Гамильтона H удовлетворяет условиям разворота $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}}$ и $\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}}$.

В случае $|\mathbf{L}| \leqslant L_{\max}$ максимум гамильтониана H будет достигаться при $|\mathbf{L}| = L_{\max}$, и поэтому оптимальные функции L_i определяются зависимостями

$$L_i = \frac{L_{\max} r_i}{J_i \sqrt{r_1^2/J_1^2 + r_2^2/J_2^2 + r_3^2/J_3^2}},\ i = \overline{1, 3}.$$

Поскольку оптимальные управляющие функции L_i не зависят от $|\mathbf{r}|$, перейдем к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ и обозначим $r_0 = |\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$. Для проекций p_i орта $\mathbf{p}$ на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}$ справедливы уравнения

$$\dot{p}_1 = L_3 p_2/J_3 - L_2 p_3/J_2;\ \dot{p}_2 = L_1 p_3/J_1 - L_3 p_1/J_3;$$
$$\dot{p}_3 = L_2 p_1/J_2 - L_1 p_2/J_1; \quad (5)$$

$$L_i = \frac{L_{\max} p_i}{J_i \sqrt{p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2}},\ i = \overline{1, 3}. \quad (6)$$

В дальнейшем будем использовать компоненты p_i вектора $\mathbf{p}$; тогда $r_i = r_0 p_i$, где r_0 — константа, которую необходимо определить в процессе оптимизации. Необходимое условие оптимальности можно записать в виде

$$L_i = b p_i / J_i, \quad (7)$$

где $b > 0$ — скалярная величина.

Гамильтониан H не зависит явно от времени, и длительность T не фиксирована. Поэтому $H = 0$ в любой момент времени t, а не только $H(T) = 0$ в конечный момент времени $t = T$ [13]. Подставив оптимальные значения функций L_i, вычисленные по соотношениям (6), в выражение (3) для функции H с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$, получим уравнение $L_{\max}^2 r_0^2 (p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2) = 1$, из которого следует $p_1^2/J_1^2 + p_2^2/J_2^2 + p_3^2/J_3^2 = \text{const}$ и $r_0 = 1/L_{\max} C$ — оптимальное значение, где $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1^2 + p_{20}^2/J_2^2 + p_{30}^2/J_3^2}$; p_{10}, p_{20}, p_{30} — компоненты вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Задача построения оптимального управления свелась к решению системы уравнений углового движения КА (1) и уравнений (5) при условии, что управление $\mathbf{L}$ выбрано из требования (6). Сформулированная задача управления (1)—(2) решается до конца. Условия максимума функции H определяют оптимальное решение $\mathbf{L}(t)$. На всем интервале движения $0 < t < T$ КА должен вращаться с постоянным по модулю кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = \text{const}$ (поэтому во время идеального по маневренности разворота $b = \text{const}$). Уравнения (1) и (5) совместно с соотношениями (7) образуют замкнутую систему уравнений. Значение параметра C зависит от вектора $\mathbf{p}(0)$, который, в свою очередь, определяется граничными значениями $\Lambda(0)$, $\Lambda(T)$ и моментами инерции J_1, J_2, J_3.

Таким образом, задача построения оптимального управления $\mathbf{L}(t)$ состоит, главным образом, в нахождении такого значения вектора $\mathbf{p}(0)$, при котором в результате движения КА в соответствии с уравнениями (1), (5), (7) и $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}}$ выполняется равенство $\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}}$. Общее решение приведенной системы уравнений найти практически невозможно. Трудность заключается в определении граничных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны выражением

$$\Lambda_{\text{к}} \circ \mathbf{p}(T) \circ \widetilde{\Lambda}_{\text{к}} = \Lambda_{\text{н}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \widetilde{\Lambda}_{\text{н}}$$
$$\text{или } \mathbf{p}(T) = \widetilde{\Lambda}_{\text{р}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_{\text{р}},$$

где $\Lambda_{\text{р}} = \widetilde{\Lambda}_{\text{н}} \circ \Lambda_{\text{к}}$ — кватернион разворота.

Задача оптимального управления с учетом ограничения (2) будет решена, если мы найдем решение системы уравнений (1), (5), (6), удовлетворяющее граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}}$ и $\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}}$. Оптимальный кинетический момент $\mathbf{L}$ связан с кватернионом ориентации Λ равенством

$$\mathbf{L} = J^{-1} L_{\max} \widetilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_P \circ \Lambda / C, \quad (8)$$

где $\mathbf{c}_P = \text{const} = \Lambda_{\text{н}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \widetilde{\Lambda}_{\text{н}}$; $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — тензор инерции КА (напомним, что $p_{i\,0} = p_i(0)$). Ключевой искомой характеристикой является значение вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Решение $\mathbf{L}(t)$ во время кинематически оптимального разворота (без ограничений на моменты M_i) обладает следующими свойствами (интегралами движения):

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \text{const},$$
$$J_1^2 L_1^2 + J_2^2 L_2^2 + J_3^2 L_3^2 = \text{const}. \quad (9)$$

Поскольку управлением считается вектор $\mathbf{L}$ кинетического момента КА, то поставленную кинематическую задачу оптимального разворота можно считать решенной — уравнения (1), (5) и (6) с учетом граничных условий $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}}$, $\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}}$ полностью определяют искомое решение $\mathbf{L}(t)$. Уравнения для управляющих функций L_i формализуются следующим образом:

$$\dot{L}_1 = L_2 L_3 (J_2^2 - J_3^2)/J_1 J_2 J_3;$$
$$\dot{L}_2 = L_1 L_3 (J_3^2 - J_1^2)/J_1 J_2 J_3; \quad (10)$$
$$\dot{L}_3 = L_1 L_2 (J_1^2 - J_2^2)/J_1 J_2 J_3.$$

Оптимальное управление пространственным разворотом заключается в сообщении КА начальных условий движения (расчетного кинетического момента в начале разворота), поддержании вращения КА с требуемым (программным) изменением кинетического момента $\mathbf{L}(t)$, при котором его модуль имеет постоянное значение $|\mathbf{L}| = \text{const}$, и сбросе имеющегося кинетического момента до нуля в момент времени $t = T$, когда $\Lambda(t) = \Lambda_{\text{к}}$ (при достижении КА конечного положения $\Lambda_{\text{к}}$). Основная задача — нахождение закона изменения вектора $\mathbf{p}(t)$, чтобы в результате решения системы уравнений (1), (5), (6) с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}}$ граничное условие $\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}}$ на правом конце было выполнено (определение вектора $\mathbf{p}(0)$ — самостоятельная и достаточно непростая задача).

Практическое значение имеют задачи, в которых $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ (такие условия разворота КА наиболее характерны). Разумеется, в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ кинетический момент для номинальной программы вращения КА, определяемый уравнениями (6), не равен нулю. Следовательно, неизбежны переходные участки: разгон — переход из состояния покоя (когда $\mathbf{L} = 0$) на режим вращения с кинетическим моментом максимальной величины $L_{\max}$ — и торможение — гашение кинетического момента КА до нуля. Между разгоном и торможением выполняются уравнения (5) и (7), в которых $b = L_{\max}/C = \text{const}$.

Если условия разворота $\Lambda_{\text{н}}$, $\Lambda_{\text{к}}$ и время T таковы, что времена разгона и торможения пренебрежимо малы (по сравнению с длительностью всего разворота), то сообщение КА необходимого кинетического момента $L_{\max}$ и гашение имеющегося кинетического момента до нуля можно считать импульсным, и почти на всем развороте (между разгоном и торможением) $|\mathbf{L}(t)| = \text{const} = L_{\max}$ с выполнением уравнений (8), (10). Определяющим при нахождении оптимальных решений $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{L}(t)$ является значение вектора $\mathbf{p}$ на момент времени $t = 0$.

Если момент управления $\mathbf{M}$ ограничен, то сообщение требуемого кинетического момента до уровня $|\mathbf{L}| = L_{\max}$ в начале разворота и гашение имеющегося кинетического момента до нуля в конце разворота занимают некоторое конечное (отличное от нуля) время. Интерес представляет общий случай, когда условия разворота $\Lambda_{\text{н}}$ и $\Lambda_{\text{к}}$ таковы, что переходными участками (разгоном и торможением) нельзя пренебречь. Если управляющий момент $\mathbf{M}$ ограничен условием

$$|\mathbf{M}| \leqslant m_0, \qquad (11)$$

то законы максимально быстрого набора и гашения кинетического момента известны [4].

На участке торможения оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{M} = -m_0\mathbf{L}/|\mathbf{L}|.$$

При оптимальном движении кинетический момент КА не меняет своего направления в инерциальной системе координат, а управляющий момент $\mathbf{M}$ составляет с кинетическим моментом 180°. Модуль кинетического момента КА изменяется по закону $|\mathbf{L}| = L_{\max} - m_0(t - t_0)$, где t_0 — момент начала остановки вращения.

Оптимальное управление *на участке разгона* имеет вид

$$\mathbf{M} = m_0\mathbf{L}/|\mathbf{L}|. \qquad (12)$$

Модуль кинетического момента на этом участке изменяется по закону $|\mathbf{L}| = m_0 t$. И при разгоне, и при торможении оптимальным по быстродействию является управление, при котором управляющий момент все время параллелен кинетическому моменту.

В момент времени $t = 0$ кинетический момент КА $\mathbf{L} = 0$, и для быстрейшего достижения заданного уровня $|\mathbf{L}| = L_{\max}$ необходимо управление (12). Пока $|\mathbf{L}(t)| < L_{\max}$ управляющий момент $\mathbf{M} = m_0\mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ будет оптимальным. С момента времени $t_{\text{р}}$, когда $|\mathbf{L}(t_{\text{р}})| = L_{\max}$, оптимальным будет движение (5), (6), при котором $|\mathbf{L}(t)| = L_{\max}$. Из-за наличия граничного условия $\mathbf{L}(T) = 0$ существует такой момент времени $t_{\text{т}} < T$, начиная с которого выполняют гашение кинетического момента с максимальным моментом управления $\mathbf{M} = -m_0\mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ (момент времени $t_{\text{т}}$ выбирается с таким расчетом, чтобы к моменту полной остановки $\mathbf{L} = 0$ КА занял требуемое угловое положение $\Lambda_{\text{к}}$). На интервалах разгона и торможения предельно максимальным является управляющий момент $\mathbf{M}$ (условие (11) переходит в строгое равенство), а на отрезке между разгоном и торможением выполняются уравнения (10) и равенство $|\mathbf{L}| = \text{const} = L_{\max}$. В результате траектория вращения КА $\Lambda(t)$ разделяется на три составляющие: $\Lambda(0)$ — $\Lambda(t_{\text{р}})$, $\Lambda(t_{\text{р}})$ — $\Lambda(t_{\text{т}})$ и $\Lambda(t_{\text{т}})$ — $\Lambda(T)$. Кватернион разворота представим в виде

$$\Lambda_{\text{р}} = \tilde{\Lambda}_{\text{н}} \circ \Lambda_{\text{к}} = \Delta\Lambda_{\text{р}} \circ \Delta\Lambda_{\text{ном}} \circ \Delta\Lambda_{\text{т}},$$

где $\Delta\Lambda_{\text{р}} = \tilde{\Lambda}_{\text{н}} \circ \Lambda(t_{\text{р}})$ — кватернион поворота КА за время разгона; $\Delta\Lambda_{\text{т}} = \tilde{\Lambda}(t_{\text{т}}) \circ \Lambda_{\text{к}}$ — кватернион поворота КА за время торможения; $\Delta\Lambda_{\text{ном}} = \tilde{\Lambda}(t_{\text{р}}) \circ \Lambda(t_{\text{т}})$ — кватернион поворота за время вращения КА с максимальным кинетическим моментом $L_{\max}$. Начальная и конечная угловые скорости равны нулю, и длительность этапов разгона и торможения будет одинакова в силу того, что величина управляющего момента постоянна $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$. Оптимальное решение $\mathbf{L}(t)$ на участке номинального движения (между разгоном и торможением) обладает свойствами (9), векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ ортогональны, величина кинетического момента максимальна и постоянен $|\mathbf{L}| = \text{const} = L_{\max}$.

Для нулевых граничных условий $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ оптимальный по времени разворот КА включает две фазы, в течение которых величина момента $\mathbf{M}$ максимально возможная — фаза разгона (увеличение модуля кинетического момента) и торможения (гашение кинетического момента до нуля) и фаза номинального движения, при котором справедливы уравнения (9), (10). На участке разгона векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ имеют одинаковое направление, а на участке торможения векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ имеют противоположные направления; вектор кинетического момента $\mathbf{L}$ имеет постоянное направление в инерциальном пространстве, но меняется по величине (на участке разгона он увеличивается с нуля до максимального значения $L_{\max}$, а на участке торможения — уменьшается до нуля). Движение КА во время разворота происходит по следующей программе изменения кинетического момента: увеличение модуля вектора $\mathbf{L}$ с нуля до $L_{\max}$ с максимальной скоростью ($|\mathbf{M}| = m_0$) при неизменном направлении относительно опорного базиса $\boldsymbol{I}$; далее вращение вектора $\mathbf{L}$ с постоянной величиной $L_{\max}$ по оптимальному закону, определяемому уравнениями (5), (6) и, наконец, уменьшение модуля вектора $\mathbf{L}$ до нуля с максимальной скоростью ($|\mathbf{M}| = m_0$) при неизменном направлении относительно опорного базиса $\boldsymbol{I}$. Эта программа полностью определяет движение КА в процессе перехода из состояния $\Lambda = \Lambda_н$, $\mathbf{L} = 0$ в состояние $\Lambda = \Lambda_к$, $\mathbf{L} = 0$, так как имеют место уравнения (1).

Так как при торможении КА управляющий момент $\mathbf{M}$ направлен строго против кинетического момента $\mathbf{L}$, то момент начала торможения может быть спрогнозирован достаточно точно. Длительность остановки вращения равна $\tau = |\mathbf{L}|/m_0$. Момент начала участка торможения определяется условием

$$4\arcsin\frac{K\sqrt{q_2^2+q_3^2}}{\sqrt{(J_2\omega_2)^2+(J_3\omega_3)^2}} = \frac{K^2\sqrt{\omega_2^2+\omega_3^2}}{m_0\sqrt{(J_2\omega_2)^2+(J_3\omega_3)^2}},$$

где q_j — компоненты кватерниона рассогласования $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_к$ ($j = 0, 1, 2, 3$); ω_i — проекции вектора угловой скорости КА $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанной с КА системы координат; $K = |J\boldsymbol{\omega}|$ — величина кинетического момента КА. Гашение кинетического момента на участке торможения осуществляется по линейному закону: $|\mathbf{L}(t)| = L_{\max} - m_0(t - t_т)$, где $t_т$ — момент начала торможения.

Определение момента времени $t_т$ по фактическим (измеренным значениям) параметрам движения (угловому рассогласованию и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) повышает точность приведения КА в требуемое состояние $\Lambda = \Lambda_к$, $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Особенностью управления кинетическим моментом КА во время разворота КА за минимальное время является то, что при наличии возмущающих моментов $\mathbf{M}_в \neq 0$ значение ключевого параметра $L_{\max}$ алгоритма оптимального управления заранее не известно. Поэтому при практическом проектировании требуется предварительно решить задачу определения оптимального значения модуля кинетического момента КА на участке между разгоном и торможением.

Задача выбора оптимального модуля кинетического момента

Для КА с инерционными исполнительными органами (силовыми гироскопами) крайне важно определить такое значение параметра $L_{\max}$, чтобы во время движения КА вокруг центра масс эволюция вектора $\mathbf{G}$ суммарного кинетического момента системы гиродинов не привела к выходу его за пределы области S возможных значений ("насыщения" системы гиродинов не наступит), и "разгрузки", т. е. снятия накопленного кинетического момента системы гиродинов за счет приложения момента сил иной природы (магнитного, включением реактивных двигателей ориентации и др.) не потребовалось бы. Такие движения КА считаются допустимыми (в смысле управления ориентацией КА без "разгрузки" системы гиродинов). При этом запас кинетического момента системы гиродинов должен быть максимальным, что позволит уменьшить вероятность задействования других (кроме гиродинов) средств управления ориентацией (например, реактивных двигателей) даже при действии на КА возмущающего момента.

В случае нулевых граничных условий $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ реализуется только один единственный тип движения: первый участок — разгон КА с максимальным управляющим моментом $|\mathbf{M}| = m_0$ до наступления равенства $|\mathbf{L}| = L_{\max}$, далее участок движения КА с постоянным по модулю кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = L_{\max}$ (с выполнением равенств (9), (10)) и затем симметричный участок торможения КА с максимальным управляющим моментом $|\mathbf{M}| = m_0$ до полной остановки КА ($\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$). Изменение модуля кинетического момента $\mathbf{G}$ системы силовых гироскопов во время разворота таково, что на участках разгона и торможения $d|\mathbf{G}|/dt \approx \text{const}$ (так как момент $\mathbf{M}$ управляющих сил намного больше возмущающего момента $\mathbf{M}_в$), причем в большинстве случаев можно считать $|d|\mathbf{G}|/dt|_{t<t_р} = |d|\mathbf{G}|/dt|_{t<t_т}$, где $t_р$ — момент окончания разгона; $t_т$ — момент начала торможения. В гипотетическом случае, когда $\mathbf{M}_в = 0$, разгон КА можно осуществлять до наступления ситуации $|\mathbf{L}| = R_0$, так как в этом идеальном случае $|\mathbf{L}| = |\mathbf{G}|$ и в интервале между разгоном и торможением $|d|\mathbf{G}|/dt| = 0$ (напомним, R_0 — радиус сферы, вписанной в область S возможных значений кинетического момента $\mathbf{G}$ системы силовых гироскопов).

В реальных условиях полета $\mathbf{M}_в \neq 0$ и поэтому $\mathbf{L} + \mathbf{G} \neq 0$, а значит на участке номинального вращения (когда $|\mathbf{L}(t)| = \text{const}$) в общем случае $|d|\mathbf{G}|/dt| \neq 0$. При наличии возмущающих моментов $\mathbf{M}_в \neq 0$ возникает проблема — каким должно быть значение $L_{\max}$, чтобы до окончания маневра возможное увеличение величины $|\mathbf{G}|$ было меньше $R_0 - L_{\max}$. Хотя возмущения $\mathbf{M}_в$ могут "помогать" развороту КА (при этом $d|\mathbf{G}|/dt < 0$), но гарантировать, что такое положение вещей будет продолжаться на всем отрезке времени $[0, t_т]$, никак нельзя. Поэтому при выборе оптимального значения $L_{\max}$ необходимо учитывать наихудший сценарий — считать возмущения $\mathbf{M}_в$ максимально возможными по величине и направленными против кинетического момента $\mathbf{L}$ корпуса КА. Тогда $d|\mathbf{G}|/dt = |\mathbf{M}_в|$ и $\max\limits_{t_р<t<t_т} d|\mathbf{G}|/dt = M_{в\,рас}$, где $M_{в\,рас}$ — максимально возможная величина возмущающего момента $\mathbf{M}_в$ (т. е. $|\mathbf{M}_в| \leqslant M_{в\,рас}$). Поведение модуля кинетического момента $\mathbf{G}$ гиросистемы, когда $d|\mathbf{G}|/dt \geqslant 0$, следующее:

$$G(t) = |\mathbf{L}(t)| + \int_0^{t_т} |\mathbf{M}_в|\,dt,$$

а разница относительно $|\mathbf{L}(t)|$ составит $\Delta G \leqslant M_{в\,рас}\,t_т = (T - \tau_т)M_{в\,рас}$, где $\tau_т$ — длительность торможения; $G = |\mathbf{G}|$. Мы рассматриваем только отрезок времени

$[0, t_т]$ потому, что при торможении КА $dG/dt < 0$ (так как $|\mathbf{M}_в| \ll m_0$). "Насыщение" системы силовых гироскопов может наступить в предельном случае, если выполняется равенство $|\mathbf{L}(t_р)| + (T - \tau_т)M_{в\ рас} = R_0$. Таким образом, должно выполняться соотношение: $L_{max} < R_0 - (T - \tau_т)M_{в\ рас}$. Мы заинтересованы в том, чтобы L_{max} было как можно больше (для минимизации времени T). Однако с увеличением L_{max} запас $\Delta R = R_0 - L_{max}$ уменьшается, что в свою очередь повышает вероятность наступления "насыщения" гиросистемы (выполнения равенства $|\mathbf{G}| = R_0$). Здесь становится актуальной задача максимального использования запаса кинетического момента $R_0 - |\mathbf{L}|$ для компенсации предполагаемых возмущающих моментов $\mathbf{M}_в$. Запишем уравнение, устанавливающее связь между оценкой максимального значения возмущающих моментов $M_{в\ рас}$ и расчетным значением L_{max}. Нетрудно показать, что для вращений твердого тела, удовлетворяющих уравнениям (5), (7), справедливо равенство

$$\int_0^T |\mathbf{L}|dt = \mathrm{const} = S_L,$$

где величина S_L определяется исключительно кватернионом разворота $\Lambda_р = \widetilde{\Lambda}_н \circ \Lambda_к$ и инерционными характеристиками КА J_1, J_2, J_3 [6]. Если принять, что на участках разгона и торможения модуль кинетического момента изменяется по линейному закону $|d|\mathbf{L}|/dt| = m$, где m — максимальная скорость изменения модуля кинетического момента, то будут справедливы следующие соотношения:

$$\int_0^T |\mathbf{L}|dt = L_{max}(T - \tau_т) \text{ или } L_{max}(T - L_{max}/m) = S_L$$

$$(\text{так как } t_р \approx \tau_т = L_{max}/m).$$

Получили систему двух уравнений. Выпишем эти уравнения:

$$L_{max}(T - L_{max}/m) = S_L \text{ и } G_{max} \approx L_{max} + M_{в\ рас}(T - L_{max}/m) = L_{max} + M_{в\ рас}S_L/L_{max}.$$

Так как вращение КА без "разгрузки" системы гиродинов возможно, если $G_{max} < R_0$, то оптимальное значение параметра L_{max} находим из уравнения

$$L_{max} + M_{в\ рас}S_L/L_{max} = R_0.$$

Решением последнего уравнения относительно переменной L_{max} является

$$L_{max} = (R_0 + \sqrt{R_0^2 - 4S_L M_{в\ рас}})/2,$$

где R_0 — априорно известная величина (значения S_L и $M_{в\ рас}$ также известны).

Чтобы время разворота T было минимальным, оптимальным L_{max} будет наибольшее значение, удовлетворяющее условию $L_{max} + M_{в\ рас}S_L/L_{max} < R_0$ (очевидно $L_{max} < R_0$). Длительность маневра $T \approx S_L/L_{max} + L_{max}/m_0$. При $m_0 \to \infty$ величины $t_р \to 0$, $\tau_т \to 0$ и $S_L = L_{max}T$; поэтому $R_0 - L_{max} = M_{в\ рас}T = M_{в\ рас}S_L/L_{max}$.

Если мы не можем утверждать, что $|\mathbf{M}_в| \ll m_0$, то время разгона (торможения) τ оценивается величиной $\tau = L_{max}/(m_0 - M_{в\ рас})$. Критическим является значение $M_{в\ рас}$ (обозначим его $M_{кр}$), при котором разворот из положения $\Lambda_н$ в положение $\Lambda_к$ еще возможен без нарушения требования $|\mathbf{G}| \leqslant R_0$. Оно равно $M_{кр} = R_0^2/4S_L$. С учетом действия возмущающего момента $\mathbf{M}_в$, априорно неизвестного по величине, оптимальным значением будет $L_{max} = R_0/2$.

Компьютерная апробация алгоритма оптимального управления

Рассмотрим разворот КА на 150° из начального положения $\Lambda_н$, когда оси КА совпадают с осями опорного базиса $\boldsymbol{I}$, в заданное конечное положение $\Lambda_к$; элементы кватерниона $\Lambda_к$ равны: $\lambda_0 = 0{,}2598202$; $\lambda_1 = 0{,}6834345$; $\lambda_2 = 0{,}5913393$; $\lambda_3 = 0{,}3401890$. Считалось, что $R_0 = 60$ Н · м · с; $J_1 = 1760$ кг · м^2; $J_2 = 6320$ кг · м^2; $J_3 = 6010$ кг · м^2. Мощность исполнительных органов характеризуется величиной $m_0 = 2{,}5$ Н · м (управляющий момент $\mathbf{M}$ ограничен сферой (11)). После решения кинематической задачи разворота (задачи оптимального разворота в импульсной постановке) были получены следующие результаты: $\mathbf{p}_0 = \{0{,}107354; -0{,}031616; 0{,}993718\}$ и $\mathbf{c}_P = \mathbf{p}_0$ (так как $\Lambda_н = 1$). Интеграл $S_L = 10195$ кг · м^2.

Предположим, что по экспертным оценкам суммарный возмущающий момент $\mathbf{M}_в$ не превышает по величине $M_{в\ рас} = 0{,}05$ Н · м. Поэтому оптимальное значение оценим как $L_{max} < (R_0 + \sqrt{R_0^2 - 4S_L M_{в\ рас}})/2 = 49{,}75$ Н · м · с. Принимаем $L_{max} = 49{,}7$ Н · м · с. Расчетное время разгона (торможения) $\tau = 19{,}9$ с. Результаты численного моделирования процесса разворота при оптимальном управлении представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 изображены графики изменения оптимальных функций $L_1(t)$, $L_2(t)$, $L_3(t)$ по времени, на рис. 2 — графики изменения компонент кватерниона $\Lambda(t)$ текущей ориентации. По результатам моделирования

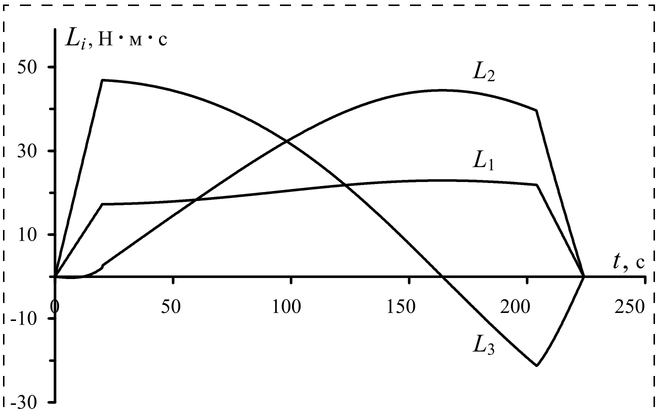

Рис. 1

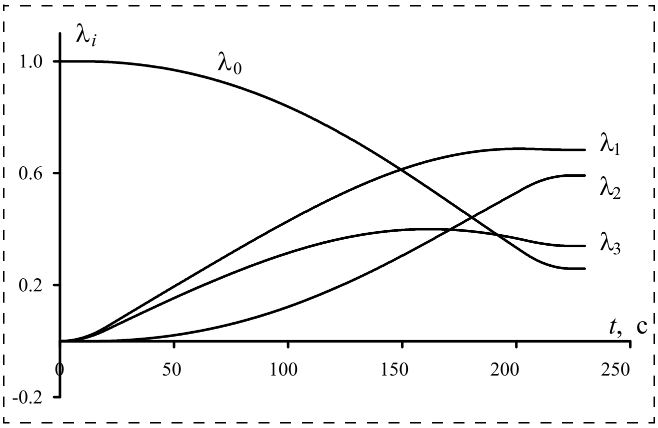

Рис. 2

момент окончания разгона $t_р$ = 19,9 с, момент начала торможения $t_т$ = 205,2 с. Общая длительность маневра составила T = 225,1 с. Необходимо отметить, что $L_1(t)$, соответствующая продольной оси КА, — знакопостоянная функция времени (это свойство наблюдается при любых сочетаниях граничных значений $\Lambda_н$ и $\Lambda_к$).

Заключение

В статье исследуется проблема повышения маневренности КА путем оптимизации управления кинетическим моментом при разворотах в требуемое положение. Выписаны условия оптимальности режима переориентации без "разгрузки" гиросистемы и изучены свойства оптимального пространственного (трехмерного) разворота. Решение задачи оптимального управления основано на кватернионном дифференциальном уравнении, связывающем кинетический момент КА с кватернионом ориентации связанной системы координат. Необходимые условия максимального быстродействия записаны в аналитическом виде. В общем случае оптимальный маневр делится на три характерных фазы: раскрутка КА до максимально допустимого кинетического момента L_{max}, вращение с постоянным по модулю кинетическим моментом и гашение угловой скорости до нуля. Задача управления ориентацией сводится к решению трех задач — наискорейшему сообщению КА требуемого кинетического момента, вращению КА с расчетной скоростью движения и максимально быстрому торможению (успокоению) КА. На участках разгона и торможения управляющий момент максимально возможный и параллелен вектору кинетического момента.

Главным отличием от известных публикаций является то, что хотя в задаче (1)—(2) L_{max} — постоянная величина, само значение L_{max} подлежит оптимизации. Даны ключевые соотношения и уравнения для оптимального движения, которые определяют программу изменения кинетического момента КА. Приводится условие для определения момента начала торможения, использующее текущие параметры движения (информацию об угловом положении и измерения угловой скорости КА), что существенно повышает точность приведения КА в требуемое положение. Подробно исследуется проблема нахождения оптимального модуля кинетического момента между разгоном и торможением, если КА разворачивается в условиях возмущений. Получены формализованные уравнения и найдены расчетные выражения для вычисления значения L_{max} при известных условиях разворота — начального и конечного положений КА и его инерционных характеристик. Параметр L_{max} закона управления рассчитывается так, чтобы запас кинетического момента системы гиродинов позволил исключить привлечение других органов управления (кроме гиродинов) для совершения маневра и его завершения с учетом действующих возмущений. Представлены результаты численного моделирования движения КА в соответствии с разработанным способом управления. Предлагаемый алгоритм управления переориентацией КА с инерционными исполнительными органами позволяет уменьшить время разворота на 25...35 %.

Список литературы

1. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. **Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.** Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974.
3. **Левский М. В.** Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53—59.
4. **Левский М. В.** К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1.
5. **Молоденков А. В., Сапунков Я. Г.** Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2.
6. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method // Mechanics of solids, 2009, Vol. 44, No. 2.
7. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of nonlinear analysis in engineering systems. 2015. Vol. 21, N. 2.
8. **Левский М. В.** Способ управления разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2093433 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1997. № 29.
9. **Платонов В. Н., Ковтун В. С.** Способ управления космическим аппаратом с помощью реактивных исполнительных органов при выполнении программного разворота. Патент на изобретение РФ № 2098325 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1997. № 34 от 10.12.1997.
10. **Сарычев В. А., Беляев М. Ю., Зыков С. Г., Сазонов В. В., Тесленко В. П.** Математические модели процессов поддержания ориентации орбитальной станции "Мир" с помощью гиродинов. М.: Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1989. № 10.
11. **Ковтун В. С., Митрикас В. В., Платонов В. Н., Ревнивых С. Г., Суханов Н. А.** Математическое обеспечение проведения экспериментов при управлении ориентацией космического астрофизического модуля "Гамма" // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 3.
12. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
13. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Philadelphia, London, Toronto: W. B. Saunders Company, 1969.

Optimization of Angular Momentum for Increase of Maneuverability of a Spacecraft with Inertial Actuators

M. V. Levskii, dp940@mail.ru, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, 141091, The Moscow region

Corresponding author: **Levskii Mikhail V.**, Ph. D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, 141091, The Moscow region**,** e-mail: dp940@mail.ru

Accepted on August 24, 2017

The problem of improvement of maneuverability of a spacecraft which is controlled by inertial actuators (system of powered gyroscopes, by gyrodynes) is considered. We suggest to increase speed of implementation of rotary maneuvers by optimization of control algorithms of spacecraft motion. The task of construction of optimal laws of variation in the angular momentum vector of a spacecraft as control function so as to ensure the transition of the spacecraft from an arbitrary initial attitude to the required final angular position at minimal time has been solved completely. Main difference is the necessity of determining during optimization the maximum admissible magnitude of the angular momentum since it is unknown a priori. The problem is solved by using Pontryagin's maximum principle, and solution is based on the quaternion differential equation relating the vector of spacecraft angular momentum to the quaternion of orientation of the body-fixed coordinate system.

The optimality conditions of reorientation regime without "unloading" of the gyro-system are written in analytical form, and the properties of optimal motion are studied. Key relations and the equations for construction of the optimal control program are given. The condition for determination of the moment of the beginning of the braking which uses current parameters of motion (information on angular position of a spacecraft and measurements of angular velocity) was given, it considerably improves accuracy of spacecraft transfer into a required position. The aspects of determination of optimal modulus of angular momentum between acceleration and braking if spacecraft rotates under disturbances are discussed in detail. The formalized equations are derived, and computational expressions for calculating the optimal value of the key parameter of control law are obtained. Results of the mathematical simulation of the spacecraft motion under the designed control method are presented.

Keywords: *spacecraft, attitude, powered gyroscopes, control function, optimal control, angular momentum*

For citation:

Levskii M. V. Optimization of Angular Momentum for Increase of Maneuverability of a Spacecraft with Inertial Actuators, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 1, pp. 65—72.

DOI: 10.17587/mau.19.65-72

References

1. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (The use of quaternions in problems of orientation of a rigid body), Moscow, Nauka, 1973. 320 c. (in Russian).
2. **Raushenbakh B. V., Tokar' E. N.** *Upravlenie orientatsiei kosmicheskikh apparatov* (Spacecraft attitude control), Moscow, Nauka, 1974 (in Russian).
3. **Levskii M. V.** *Ispol'zovanie universal'nykh peremennykh v zadachakh optimal'nogo upravleniya orientatsiei kosmicheskikh apparatov* (The use of universal variables in problems of optimal control concerning spacecrafts orientation), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2014, no. 1, pp. 53—59 (in Russian).
4. **Levskii M. V.** *K voprosu optimal'nogo uspokoeniya kosmicheskogo apparata* (On optimal spacecraft damping), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2011, no. 1 (in Russian).
5. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** *Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota osesimmetrichnogo kosmicheskogo apparata s ogranichennym i impul'snym upravleniem pri proizvol'nykh granichnykh usloviyakh* (A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2007, no. 2 (in Russian).
6. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2.
7. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation, *International Journal "Problems of nonlinear analysis in engineering systems"*, 2015, vol. 21, no. 2.
8. **Levskii M. V.** *Sposob upravleniya razvorotom kosmicheskogo apparata. Patent na izobretenie RF № 2093433* (A method of controlling a spacecraft turn. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2093433), *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i Patenty"*, 1997, no. 29 (in Russian).
9. **Platonov V. N., Kovtun V. S.** *Sposob upravleniya kosmicheskim apparatom s pomoschyu reaktivnyh ispolnitel'nyh organov pri vypolnenii programmnogo razvorota. Patent na izobretenie RF № 2098325* (A method of spacecraft control using jet executive devices during programmed turn performance. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2098325), *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i Patenty"*, 1997, no. 34 (in Russian).
10. **Sarychev V. A., Belyaev M. Yu., Zykov S. G., Sazonov V. V., Teslenko V. P.** *Matematicheskie modeli processov podderzhaniya orientatsii orbital'noi stantsii "Mir" s pomoschyu girodinov* (Mathematical models of processes for supporting orientation of the Mir orbital station with the use of gyrodynes), *Preprint IPM im. M. V. Keldysha AN SSSR,* 1989, no. 10 (in Russian).
11. **Kovtun V. S., Mitrikas V. V., Platonov V. N., Revnivykh S. G., Sukhanov N. A.** *Matematicheskoe obespechenie provedeniya experimentov pri upravlenii orientatsiei kosmicheskogo astrofizicheskogo modulya "Gamma"* (Mathematical support for conducting experiments with attitude control of space astrophysical module Gamma), *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1990, no. 3 (in Russian).
12. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* (The mathematical theory of optimal processes), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian), New York, Gordon and Breach, 1986.
13. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, Philadelphia, London, Toronto, W. B. Saunders Company, 1969.

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Е. В. Комиссарова.*

Сдано в набор 27.10.2017. Подписано в печать 11.12.2017. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ MH118. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.