

А. В. Яскевич, канд. техн. наук, нач. отдела, Andrey.Yaskevich@rsce.ru,  
ПАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С. П. Королева

## Уравнения динамики стыковочных механизмов. Часть 1. Алгоритмы для механических систем со структурой дерева

*Рассматриваются кинематические особенности механизмов для стыковки космических аппаратов. Для механической системы со структурой дерева, образованной размыканием кинематических контуров этих механизмов, используются рекуррентные алгоритмы расчета уравнений динамики, сил и моментов, действующих на космический аппарат.*

**Ключевые слова:** космический аппарат, стыковочный механизм, уравнения динамики, алгоритм составного тела, алгоритм сочлененного тела

### Введение

Стыковка представляет собой управляемый механический процесс соединения космических аппаратов (КА) на орбите, который начинается в момент их первого контакта после завершающего этапа сближения. Она выполняется с помощью системы стыковки, включающей в себя активные и пассивные стыковочные агрегаты (СтА) и блоки управления. Конструкция таких систем, разработанных в 70-е годы прошлого века, наиболее полно описана в работе [1]. В настоящее время ведется активная разработка новых систем для различных применений — от малых спутников до пилотируемых программ освоения ближнего и дальнего космоса. СтА непосредственно реализуют механический процесс соединения с помощью трех типов управляемых механизмов — стыковочного, сцепки и герметизации стыка. Механизмы сцепки (предварительного соединения) и герметизации стыка (окончательно- жесткого соединения), хотя и распределены по окружностям с центрами на продольной оси СтА, являются плоскими, малоинерционными и их собственная динамика не оказывает существенного влияния на процесс стыковки. Наиболее сложными являются пространственные стыковочные механизмы (СтМ). Они устанавливаются на активных СтА и обеспечивают устранение рассогласований между стыкуемыми агрегатами для их сцепки, поглощение энергии относительного движения КА, выравнивание СтА и КА, совмещение стыковочных плоскостей. СтМ могут быть центрального [1—4 и др.] или периферийного [1, 5—7 и др.] типов. В механизмах первого типа буферные звенья, непосредственно контактирующие с пассивным СтА, и их вспомогательные кинематические цепи (КЦ) скомпонованы вдоль продольной оси и радиально.

В периферийных СтМ такие КЦ распределены по периферии, по периметру переходного тоннеля СтА.

Масса КА не менее, чем на два порядка превышает массу звеньев СтМ, поэтому движение механизма можно описывать отдельными уравнениями динамики (УД) с учетом переносного движения его основания. КА можно рассматривать как свободное тело, на которое действуют силы и моменты, в том числе со стороны основания механизма. Колебания элементов его конструкции практически не влияют на его движение как твердого тела и описываются отдельными дифференциальными уравнениями [8].

На проектной стадии качество каждого нового процесса стыковки обычно оценивается математическим моделированием на множестве от нескольких сотен до нескольких тысяч вариантов случайных начальных условий в момент первого контакта, реализуемых системой сближения активного КА. В отдельных задачах необходимо выполнять моделирование в реальном времени. Поэтому должна быть обеспечена высокая вычислительная эффективность программ расчета движения.

Алгоритмы вычислительной механики для моделирования динамики систем твердых и деформируемых тел отражены в обзорах [9, 10 и др.]. В данной работе описывается применение и модификация наиболее эффективных из них для УД в замкнутой [11, 12 и др.] и рекуррентной [13—15 и др.] формах. Первый часто называют алгоритмом составного тела (Composite Rigid Body Algorithm), второй — алгоритмом сочлененного тела (Articulated Body Algorithm). Их сравнительная вычислительная эффективность при относительно небольшом числе тел определяется структурой конкретной механической системы (МС). УД в замкнутой форме позволяют эффективно учитывать кинематические контуры, рекуррентные — непосредственно вычислять силу и момент, действующие на основание СтМ.

Расположение буферных звеньев и число степеней их подвижности определяются типом СтМ, а для механизмов центрального типа, возможно, еще и реализуемой процедурой стыковки.

В СтМ периферийного типа сцепка обеспечивается при совмещении стыковочных колец двух агрегатов и зацеплении трех защелок с тремя ответными упорами. Поэтому стыковочное кольцо (единственное буферное звено) СтМ с периферийными направляющими элементами должно иметь шесть степеней свободы, которые обеспечиваются расположенными на периферии направляющими КЦ. Это ограничивает число возможных кинематических схем (основой большинства является платформа Гью—Стюарта [16, 17], реже платформа Ханта [18]). Необходимость совмещения трех пар точек усложняет сцепку, но платформенный механизм позволяет реализовать управляемое движение для ее улучшения [5—7].

В СтМ центрального типа сцепка обеспечивается при попадании головки штыря СтМ в гнездо приемного конуса пассивного агрегата. Совмещение только одной пары точек двух СтА упрощает сцепку, но приводит к необходимости демпфирования кинетической энергии сближения и выравнивания при свободных угловых перемещениях агрегатов относительно центра зацепления. Это обуславливает использование нескольких типов буферных звеньев, разнообразие их расположения и соответственно кинематических схем СтМ этого типа.

Движение каждого буферного звена СтМ обеспечивается одной или несколькими вспомогательными КЦ, которые соединяются с ним вращательными шарнирами и не изменяют числа его степеней свободы, определяемого функциональным назначением. Так как вращательный шарнир, соединяющий буферное звено и  $k$ -ю вспомогательную КЦ, налагает  $m_k$  связей на их относительное перемещение, то число степеней свободы этой цепи равно  $n_k = m_k$ . Для пространственных КЦ  $n_k = m_k \in \{3, 4\}$ , для плоских  $n_k = m_k = 2$ . Число структур, удовлетворяющих этому условию, ограничено. Пространственные КЦ могут быть вида  $R_2P_1R_3$ ,  $R_2C_2R_2$ ,  $R_1R_2R_3$  и  $R_2R_2R_2$ ,  $R_3P_1R_2$ ,  $R_1R_3R_2$ , плоских — только  $R_1P_1R_1$  и  $R_1R_1R_1$ . Здесь  $R$  обозначает вращательный шарнир,  $P$  — поступательный,  $C$  — цилиндрический, нижний индекс — число степеней его подвижности, последовательность шарниров указана от корня к терминальному телу.

Стыковочные механизмы, в которых буферные звенья и их вспомогательные КЦ образуют кинематические контуры, являются параллельными механизмами [19]. При их проектировании размеры звеньев выбираются таким образом, чтобы исключить сингулярные конфигурации. Поэтому класс МС, покрывающий существующие и потенциально

возможные кинематические схемы СтМ, имеет следующие особенности:

- при наличии кинематических контуров разделение шарнирных переменных на независимые и зависимые является фиксированным, при этом отсутствуют сингулярные конфигурации, в которых уравнения контурных связей не имеют решения;
- каждый кинематический контур может быть разделен на две ветви, начинающиеся от общего для них корневого тела, — независимую, управляемую, движение которой описывается только независимыми шарнирными переменными, и полностью зависимую, в которой все шарнирные переменные являются зависимыми;
- корневое тело контура может быть основанием механизма (в этом случае оно имеет номер 0) или подвижным звеном независимой КЦ (его номер больше нуля);
- независимые ветви могут иметь структуру дерева, они могут замыкать контуры своими нетерминальными (далее — замыкающими) телами, т. е. они могут иметь "открытые" КЦ вне кинематических контуров;
- все зависимые ветви имеют структуру простой КЦ, в которой терминальное тело замыкает соответствующий контур;
- контуры могут быть независимыми, когда корневое тело одного расположено на независимой КЦ дальше от основания, чем замыкающее тело другого, параллельными (имеющими одинаковые корневые и замыкающие тела) и внутренними (когда корневое и терминальное тела одной зависимой ветви находятся между корневым и терминальным телами другой зависимой ветви, которая по отношению к первой является независимой).

При моделировании движения исходная МС заменяется преобразованной, в которой кинематические контуры размыкаются путем замещения уравнениями связей шарниров, соединяющих вспомогательные КЦ с управляемыми телами. Замещение именно этих шарниров уменьшает длины КЦ и объем вычислений для матрицы обобщенной инерции.

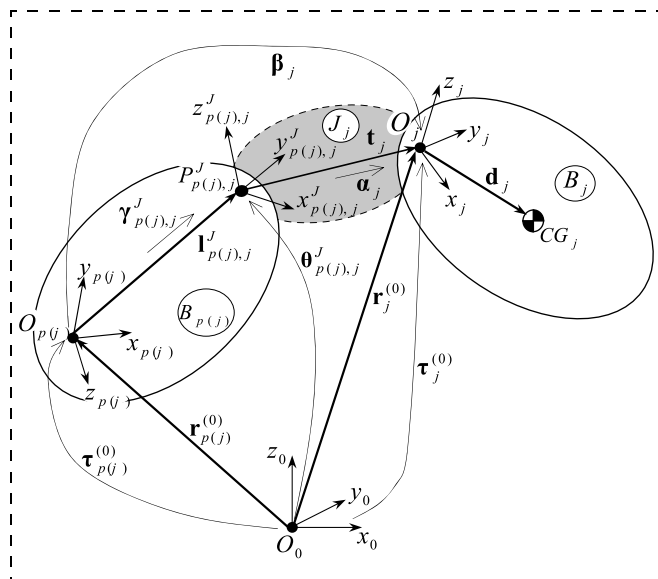
Преобразованная МС после размыкания кинематических контуров имеет структуру дерева с независимой (управляемой) и зависимыми ветвями. Независимая ветвь имеет нулевой индекс. Нумерация зависимых КЦ и замещаемых шарниров соответствует последовательности размыкания контуров и начинается с 1. Сначала размыкаются все внешние. Для параллельных и независимых контуров последовательность может быть произвольной. После этого размыкаются внутренние контуры, образованные только зависимыми КЦ. Если их вложенность превышает 1, то сначала размыкаются более внешние.

Свойства СтМ как МС описываются табличными структурами данных. Каждая строка в таблице описания древовидной структуры МС соответствует

номеру тела и его входного шарнира и содержит номер ветви и номер предшествующего тела. Нумерация тел и их входных шарниров начинается с независимой ветви и может быть произвольной в рамках древовидной структуры. Зависимые ветви являются простыми кинематическими цепями, нумерация тел в них последовательная. В таблицу описания тел заносятся их геометрические и инерционные параметры, а в таблицу описания шарниров — коэффициенты жесткости и демпфирования, признаки наличия внутренних активных сил и моментов. В таблице описания кинематических контуров каждая строка содержит номер корневого тела контура, номера первого и терминального тел в зависимой ветви, номер тела в независимой ветви, замыкающего контур, и тип замещаемого шарнира.

### Кинематика двух взаимодействующих твердых тел

Движение МС определяется относительно ее основания (тело 0) и связанной с ним системы координат (СК)  $x_0y_0z_0$ . В КЦ  $j$ -е тело  $B_j$  через шарнир  $J_j$  взаимодействует с непосредственно предшествующим ему телом  $B_{p(j)}$  (см. рисунок). Для простой КЦ  $p(j) = j - 1$ . С шарниром  $J_j$ , телами  $B_{p(j)}$  и  $B_j$  связаны полюса  $P_{p(j),j}^J$  и  $O_j$ , которые являются началами локальных СК  $x_{p(j),j}^J, y_{p(j),j}^J, z_{p(j),j}^J$  и  $x_jy_jz_j$ . Относительные поступательное и угловое перемещения в шарнире  $J_j$  описываются вектором  $\mathbf{t}_j$  и матрицей направляющих косинусов  $\alpha_j$ , элементы которых зависят от шарнирной координаты  $p_j$ . Относительно СК  $x_{p(j),j}y_{p(j),j}z_{p(j),j}$  положение СК  $x_{p(j),j}^J, y_{p(j),j}^J, z_{p(j),j}^J$  оп-



Геометрия и системы координат двух взаимодействующих твердых тел кинематической цепи МС

ределяется постоянными вектором  $\mathbf{l}_{p(j),j}^J$  и матрицей направляющих косинусов  $\gamma_{p(j),j}^J$ , а положение СК  $x_jy_jz_j$  — вектором  $\mathbf{r}_{p(j),j}$  и матрицей направляющих косинусов  $\beta_j$ . Центр масс (ЦМ)  $j$ -го тела относительно  $x_jy_jz_j$  задается постоянным вектором  $\mathbf{d}_j$ . Тензор инерции  $\mathbf{I}_j$   $j$ -го тела определяется в осях СК  $x_jy_jz_j$ .

Кинематические соотношения, как и рассматриваемые далее алгоритмы, записываются с использованием блочных матриц

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)} + \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{q}}_j + \boldsymbol{\eta}_j, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a}_j = [\dot{\mathbf{v}}_j^T, \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^T]^T$  —  $(6 \times 1)$ -блочный вектор абсолютного ускорения  $j$ -го тела;  $\mathbf{a}_j^{rel} = [(\dot{\mathbf{v}}_j^{rel})^T, (\dot{\boldsymbol{\omega}}_j^{rel})^T]^T$  —  $(6 \times 1)$ -блочный вектор относительного ускорения в шарнире;  $\mathbf{P}_j^{rel} = [(\mathbf{T}_j^{rel})^T, (\mathbf{R}_j^{rel})^T]^T$  —  $(6 \times 1)$ -блочная матрица парциальных скоростей;

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \beta_j & \beta_j \tilde{\mathbf{r}}_{p(j),j}^T \\ \mathbf{0} & \beta_j \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\eta}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)} \mathbf{r}_{p(j),j}) + 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)}^{(j)} \mathbf{v}_j^{rel} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)}^{(j)} \boldsymbol{\omega}_j^{rel} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$\beta_j = \alpha_j \gamma_{p(j),j}^J$ ;  $\mathbf{r}_{p(j),j} = \mathbf{l}_{p(j),j}^J + (\gamma_{p(j),j}^J)^T \mathbf{t}_j$ ;  $\boldsymbol{\omega}_{p(j)}^{(j)} = \beta_j \boldsymbol{\omega}_{p(j)}$  — угловая скорость предшествующего тела, выраженная в системе координат тела  $j$ ;  $\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{p(j)}^{(j)} + \boldsymbol{\omega}_j^{rel}$  — абсолютная угловая скорость  $j$ -го тела в его локальной СК;  $\mathbf{v}_j^{rel} = \mathbf{T}_j^{rel} \dot{p}_j$  и  $\boldsymbol{\omega}_j^{rel} = \mathbf{R}_j^{rel} \dot{p}_j$  — относительные скорости поступательного и углового движений в  $j$ -м шарнире;  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}$  — кососимметрическая матрица, образованная из компонент вектора  $\mathbf{a}$ .

### Модификация алгоритма составного тела для механических систем твердых тел со структурой дерева

Для описания движения преобразованной древовидной МС и последующего учета кинематических контуров используются УД в замкнутой форме  $\mathbf{A} \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{A}$  —  $(n \times n)$ -мерная матрица обобщенной инерции,  $\mathbf{b}$  —  $(n \times 1)$ -мерный вектор обобщенных сил,  $\ddot{\mathbf{p}}$  —  $(n \times 1)$ -мерный вектор относительных ускорений в шарнирах.

Наиболее эффективный алгоритм составного тела для расчета коэффициентов таких уравнений записывается обычно для МС со структурой простой КЦ на неподвижном основании. Ниже рассматривается его модификация для МС со структурой де-

рева на подвижном основании — космическом аппарате. В блочно-матричной форме записи алгоритма используются  $\mathbf{M}_j$  —  $(6 \times 6)$ -мерная матрица инерции тела в поступательном и угловом движении относительно полюса  $O_j$  и  $\mathbf{s}_j$  —  $(6 \times 1)$ -мерный вектор инерционных и активных внешних сил и их моментов относительно того же полюса:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} m_j \mathbf{1}_3 & m_j \tilde{\mathbf{d}}_j^T \\ m_j \tilde{\mathbf{d}}_j & \mathbf{I}_j \end{bmatrix}; \mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j^E \\ \mathbf{m}_j^E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{d}_j) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j (\mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $m_j$  — масса тела;  $\mathbf{d}_j$  — радиус-вектор положения центра масс относительно СК  $x_j y_j z_j$ ;  $\mathbf{I}_j$  — тензор инерции тела относительно этой же СК;  $\mathbf{f}_j^E$ ,  $\mathbf{m}_j^E$  — суммарные внешняя сила и внешний момент относительно точки  $O_j$ .

В древовидной МС в отличие от простой КЦ тело с меньшим номером может не предшествовать телу с большим номером на пути из основания. В этом случае между телами отсутствует непосредственная кинематическая связь. Далее принимается, что тело  $j$  является корневым для тела  $i$ , если оно лежит на пути из основания в тело  $i$  и находится ближе к основанию. Этот факт отмечается значением  $\mathbf{R}_B(i, j) = 1$  элемента матрицы  $\mathbf{R}_B$ , которая вычисляется однократно, до начала работы алгоритма по таблице описания структуры древовидной МС.

Алгоритм расчета элементов матрицы  $\mathbf{A}$  обобщенной инерции древовидной МС  $n$  тел с  $n$  степенями подвижности записывается в виде следующего псевдокода:

```

for  $j = 1$  to  $n$  do
   $\mathbf{a}_j^l = \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_j = \mathbf{P}_j^{rel}$ 
   $\mathbf{f}_j^l = \mathbf{M}_j \mathbf{a}_j^l$ 
  for  $i = j + 1$  to  $n$  do
    if  $\mathbf{R}_B(i, j) = 1$  then do
       $\mathbf{a}_i^l = \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{p(i)}^l$ 
       $\mathbf{f}_i^l = \mathbf{M}_i \mathbf{a}_i^l$ 
    end
  end
  for  $i = n$  to  $j$  do
    if  $\mathbf{R}_B(i, j) = 1$  then do
       $\mathbf{A}_{i,j} = (\mathbf{P}_i^{rel})^T \mathbf{f}_i^l$ 
      if  $p(i) \geq j$  then  $\mathbf{f}_{p(i)}^l = \mathbf{f}_{p(i)}^l + \mathbf{B}_i^T \mathbf{f}_i^l$ 
    end
  end
end
end

```

Абсолютное ускорение звеньев СтМ определяется суммой их ускорений относительно основания и

переносным ускорением этого основания. Поэтому силы и моменты инерции, обусловленные переносным движением, должны быть перенесены в правую часть УД, т. е. учтены при вычислении вектора  $\mathbf{b}$  обобщенных сил. Ускорения КА, на котором установлен активный СтА с СтМ, малы по сравнению с ускорениями звеньев механизма, но его угловая скорость может постепенно нарастать до относительно больших значений. Поэтому в УД СтМ учитываются переносные угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_{D,A}$  активного агрегата и обусловленные этой скоростью угловое и поступательное ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}_{D,A}$ ,  $\mathbf{w}_{D,A}$ . Вектор  $\boldsymbol{\omega}_{D,A}$ , выраженный в СК активного СтА, т. е. в СК  $x_0 y_0 z_0$  основания СтМ, определяется соотношением

$$\boldsymbol{\omega}_{D,A} = \boldsymbol{\alpha}_{CD,A}(\boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_{D,A}^f),$$

в котором  $\boldsymbol{\omega}_A$  — угловая скорость КА, на котором установлен активный СтА, и  $\boldsymbol{\omega}_{D,A}^f$  — скорость его изгибных колебаний в месте установки СтА, выраженные в СК, связанной с его ЦМ;  $\boldsymbol{\alpha}_{CD,A}$  — матрица преобразования из СК в ЦМ КА в СК СтА с учетом этих колебаний. Скорость  $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_{D,A}$  основания СтМ является начальной при рекуррентном определении  $\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\beta}_j \boldsymbol{\omega}_{p(j)} + \boldsymbol{\omega}_j^{rel}$  угловых скоростей его звеньев, которое предшествует вычислению блочных векторов  $\boldsymbol{\eta}_j$ ,  $\mathbf{s}_j$  и вектора  $\mathbf{b}$  обобщенных сил.

Переносное ускорение активного СтА нелинейно зависит от угловых скоростей КА, записывается в виде блочного вектора

$$\mathbf{a}_{D,A}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{CD,A}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_A \tilde{\boldsymbol{\omega}}_A^T \mathbf{r}_{CD,A} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_A \mathbf{v}_{D,A}^f) \\ \boldsymbol{\alpha}_{CD,A} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_A \boldsymbol{\omega}_{D,A}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{D,A} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{D,A} \end{bmatrix},$$

в котором  $\mathbf{r}_{CD,A}$  — вектор положения центра СтА относительно СК ЦМ с учетом упругих колебаний конструкции КА;  $\mathbf{v}_{D,A}^f$  — скорость колебаний этого центра. Подробнее модель упругих колебаний КА при стыковке описана в работе [8].

При рекуррентном вычислении вектора  $\mathbf{b}$  обобщенных сил по алгоритму составного тела учет инерционных сил переносного движения СтМ эквивалентен заданию начальных условий в виде  $\mathbf{a}_0^n = \mathbf{a}_{D,A}$ .

В отличие от традиционной записи алгоритма при вычислении очередной компоненты вектора  $\mathbf{b}$  к блочному вектору  $\mathbf{f}_j^n$  внешних и инерционных сил добавляется блочный вектор  $\mathbf{f}_j^J = [(\mathbf{T}_j^{rel})^T \mathbf{f}_j^J, (\mathbf{R}_j^{rel})^T \mathbf{m}_j^J]^T$  внутренних активных сил и моментов в шарнирах.

Вычисление вектора  $\mathbf{b}$  обобщенных сил реализуются последовательно для всех тел в соответствии с табличным описанием структуры МС:

$$\mathbf{a}_0^n = \mathbf{a}_{D, A}$$

for  $j = 1$  to  $n$  do

$$\mathbf{a}_j^n = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)}^n + \boldsymbol{\eta}_j$$

$$\mathbf{f}_j^n = \mathbf{M}_j \mathbf{a}_j^n - \mathbf{s}_j, \mathbf{f}_j^{n,0} = \mathbf{f}_j^n$$

end

for  $j = n$  to 1 do

$$\mathbf{b}_j = (\mathbf{P}_j^{rel})^T (\mathbf{f}_j^J - \mathbf{f}_j^n)$$

$$\text{if } p(j) \neq 0 \text{ then } \mathbf{f}_{p(j)}^n = \mathbf{f}_{p(j)}^n + \mathbf{B}_j^T \mathbf{f}_j^n$$

end

Вектор  $\mathbf{f}_j^{n,0} = \mathbf{f}_j^n$  используется далее при расчете реакций в шарнирах, силы и момента, действующих на основание СтМ.

#### Определение силы и момента, действующих на основание механизма

Уравнения динамики СтМ в замкнутой форме не позволяют определить силы и моменты, действующие на основание механизма и входящие в УД активного КА. Но после их разрешения относительно вектора  $\ddot{\mathbf{p}}$  шарнирных ускорений можно рассчитать абсолютные декартовы ускорения и скорости звеньев, силы и моменты инерции и с учетом внешних и внутренних активных сил определить искомые величины. Для этого предлагается рекуррентный алгоритм, основанный, как и алгоритм составного тела, на использовании только простейших шарниров с одной степенью подвижности.

Вычисление сил и моментов, действующих на основание МС, реализуется последовательно для всех тел МС в ходе прямого и обратного рекуррентных процессов. В первом, прямом по известным шарнирным ускорениям и векторам  $\mathbf{f}_j^{n,0}$  вычисляются суммарные векторы инерционных и внешних сил и моментов, действующих на каждое тело:

for  $j = 1$  to  $n$

$$\mathbf{a}_j^{rel} = \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_j$$

$$\mathbf{a}_j^I = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)}^I + \mathbf{a}_j^{rel}$$

$$\mathbf{f}_j^{IE} = -\mathbf{M}_j \mathbf{a}_j^I + \mathbf{f}_j^{n,0}$$

end

Во втором, обратном рекуррентном процессе вычисляются силы и моменты, действующие на все предшествующие тела всех КЦ и в итоге (при  $p(j) = 0$ ) на основание механизма:

for  $j = n$  to 1

$$\text{if } n_j^t = 1 \text{ then } \Delta \mathbf{f}_{p(j)}^{J(j)} = -\mathbf{P}_j^{rel} \mathbf{f}_j^J + \mathbf{P}_{c,j}^t (\mathbf{f}_j^{IE} + \mathbf{f}_j^S)$$

$$\text{else } \Delta \mathbf{f}_{p(j)}^{J(j)} = -\mathbf{P}_j^{rel} m_j^J + \mathbf{P}_{c,j}^r (\mathbf{f}_j^{IE} + \mathbf{f}_j^S)$$

$$\mathbf{f}_{p(j)}^S = \mathbf{f}_{p(j)}^S + \mathbf{B}_j^T \Delta \mathbf{f}_{p(j)}^{J(j)}$$

end

Перед началом этих вычислений для всех тел МС блочный вектор сил и моментов, действующих со стороны всех последующих тел,  $\mathbf{f}_j^S, j = \overline{1, n}$ , равен нулю.

Значение параметра  $n_j^t = 1$  определяет поступательный тип шарнира. Блочные  $(6 \times 6)$ -мерные матрицы единичных векторов реакций для поступательного и вращательного шарниров равны

$$\mathbf{P}_{c,j}^t = \text{diag}[\mathbf{E}_{k,j}, \mathbf{1}_3], \mathbf{P}_{c,j}^r = \text{diag}[\mathbf{1}_3, \mathbf{E}_{k,j}],$$

где  $\mathbf{E}_{k,j} = \mathbf{e}_{j,k \oplus 1} \mathbf{e}_{j,k \oplus 1}^T + \mathbf{e}_{j,k \oplus 2} \mathbf{e}_{j,k \oplus 2}^T - (3 \times 3)$ -мерная матрица, составленная из единичных векторов реакций, обусловленных  $k$ -й осью подвижности ( $k \in \{1, 2, 3\}$  в  $j$ -м шарнире;  $\mathbf{1}_3$  — единичная  $(3 \times 3)$ -мерная матрица;  $k \oplus 1$  и  $k \oplus 2$  означают значения индексов, следующих за  $k$ -м и  $(k \oplus 1)$ -м из  $\{1, 2, 3\}$  соответственно.

#### Моделирование кинематических цепей стыковочных механизмов без кинематических контуров

СтМ центрального типа могут иметь частично или полностью "открытую" КЦ со структурой простой цепи или дерева, которая не образует кинематических контуров. Если параметры этой цепи не приводят к жестким дифференциальным уравнениям, то ее динамика может быть рассчитана по алгоритму сочлененного тела, в котором последовательно выполняются три рекуррентных процесса. В ходе первого, прямого (от корневого тела  $n_R \geq 0$  к терминальным) в соответствии с выражениями (2) и (3) вычисляются вектор  $\boldsymbol{\eta}_j$  ускорений  $j$ -го тела и вектор  $\mathbf{s}_j$  действующих на него внешних и инерционных сил, определяемых обобщенными координатами и скоростями МС. Вторым выполняется обратный (от терминальных к корневому телу  $n_R$ ) рекуррентный процесс, в котором инерция, силы и моменты последующих тел приводятся к очередному  $j$ -му телу и ему предшествующему  $p(j)$ -му:

for  $j = n$  to  $n_R$

$$\mathbf{M}_j^* = \mathbf{M}_j + \Delta \mathbf{M}_j$$

$$\mathbf{s}_j^* = \mathbf{s}_j + \Delta \mathbf{s}_j$$

$$a_{I,j} = (\mathbf{P}_j^{rel})^T \mathbf{M}_j^* \mathbf{P}_j^{rel}$$

$$\mathbf{N}_j = \mathbf{M}_j^* - \mathbf{M}_j^* \mathbf{P}_j^{rel} a_{I,j}^{-1} (\mathbf{P}_j^{rel})^T \mathbf{M}_j^*$$

$$\mathbf{n}_j = \mathbf{N}_j \boldsymbol{\eta}_j + \mathbf{M}_j^* \mathbf{P}_j^{rel} a_{I,j}^{-1} (\mathbf{g} + (\mathbf{P}_j^{rel})^T \mathbf{s}_j^*) - \mathbf{s}_j^*$$

$$\Delta \mathbf{M}_{p(j)} = \Delta \mathbf{M}_{p(j)} + \mathbf{B}_j^T \mathbf{N}_j \mathbf{B}_j$$

$$\Delta \mathbf{s}_{p(j)} = \Delta \mathbf{s}_{p(j)} - \mathbf{B}_j^T \mathbf{n}_j$$

end

Здесь  $a_{I,j}$  — масса или момент инерции, приведенные к оси  $j$ -го шарнира;  $\mathbf{N}_j$  — блочный тензор инерции, которой не противодействуют внутренние активные сила или момент, приведенный к

осям СК  $j$ -го тела;  $\mathbf{n}_j$  — блочный вектор инерционных и активных сил и моментов, действующих со стороны  $j$ -го тела на предшествующее;  $\Delta \mathbf{M}_j$ ,  $\Delta \mathbf{s}_j$  — блочные матрица инерции, вектор инерционных и активных сил и моментов всех последующих тел, приведенные к очередному  $j$ -му.

Последним выполняется прямой рекуррентный процесс расчета ускорений  $\ddot{\mathbf{p}}_j$  под действием обобщенных активных сил  $\mathbf{g}_j^J$  в  $j$ -м шарнире:

for  $j = n_R$  to  $n$

$$\mathbf{a}_j^* = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)} + \boldsymbol{\eta}_j$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_j = \mathbf{a}_{L,j}^{-1} \{ (\mathbf{P}_j^{rel})^T [-\mathbf{M}_j^* (\mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)} + \boldsymbol{\eta}_j) + \mathbf{s}_j^*] + \mathbf{g}_j^J \}$$

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^* + \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_j$$

end

Корневое тело  $n_R$  такой КЦ является либо управляемым телом параллельного механизма ( $n_R > 0$ ), либо основанием СтМ ( $n_R = 0$ ).

### Заключение

Определены кинематические особенности существующих и потенциально возможных СтМ КА. Алгоритм составного тела модифицирован для расчета УД в замкнутой форме МС со структурой дерева, полученной при замыкании кинематических контуров механизма, с учетом переносного движения КА. Он дополнен алгоритмом расчета сил и моментов, действующих на этот КА со стороны СтМ. Далее УД в замкнутой форме для такой МС будут преобразованы с учетом имеющихся кинематических контуров механизма. Рассмотрено применение алгоритма сочлененного тела для моделирования "открытых" кинематических цепей СтМ.

### Список литературы

1. Сыромятников В. С. Стыковочные устройства космических аппаратов. М.: Машиностроение. 1984. 216 с.

2. Paine T. O., Fentress C. E. Expanding center probe and drogue. US Patent Office 3526372, 1 Sept., 1970.
3. Langley R. D. Apollo Experience report — the docking system // NASA Technical Note, NASA TN D-6854, June 1972, 53 P.
4. Tchoryk P., Pavlich Jr., Hays J. A., Wassick G., Ritter G. Michigan Aerospace Corporation. Docking system. Patent US 20110058892 A1, November 1, 2010.
5. Lewis J. L., Monty B. C., Le T. D. et al. NASA. Low-Impact Mating System. Patent US 7543799 B1, June 9, 2009.
6. IBDM — International Berthing & Docking Mechanism // VRI Newsletter. 2005, April. P. 3.
7. Ghofranian S., Chuang L.-P., Motaghedi P. The Boeing Company, Spacecraft Docking System. Patent US20150266595 A1, September 24, 2015.
8. Яскевич А. В. Комбинированные уравнения движения для описания динамики стыковки космических аппаратов с помощью системы "штырь-конус" // Изв. РАН. Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4. С. 325—336.
9. Featherstone R., Orin D. Robot Dynamics: Equations and Algorithms // Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, CA, April 2000, P. 826—834.
10. Погорелов Д. Ю. Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел // Изв. РАН, Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 5—15.
11. Степаненко Ю. А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью // Механика машин. 1974, Вып. 44, стр. 77—88.
12. Walker M. W., Orin D. E. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms // Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1982. Vol. 104. P. 205—211.
13. Верещагин А. Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1974. № 6. С. 89—94.
14. Armstrong W. W. Recursive solution to the equation of motion of an n-link manipulator // Proc. of 5<sup>th</sup> World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, (Montreal, July, 1979). 1979. P. 1343—1346.
15. Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias // Int. Journal of Robotic Research. 1983. Vol. 2, N. 1. P. 13—30.
16. Gough V. E., Whitehall S. G. Universal tyre test machine // Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress, May, 1962. 1962. P. 117—137.
17. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. 1965. Vol. 180, Part 1, No. 15. P. 371—386.
18. Hunt K. H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms // Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in design. 1983. Vol. 105. P. 705—712.
19. ParalleMIC — the Parallel Mechanisms Information Center. URL: <http://www.parallemic.org> (дата обращения: 04.09.2017).

## Dynamic Equations of Docking Mechanisms. Part 1. Algorithms for Mechanical Systems with Tree Structure

A. A. Yaskovich, Andrey.Yaskovich@rsce.ru,  
Rocket Space Corporation "Energia", Korolev, 141070, Russian Federation

Corresponding author: Yaskovich Andrey V., Ph. D., Head of Department of Docking Systems,  
Rocket Space Corporation "Energia", 141070, Korolev, Russian Federation,  
e-mail: Andrey.Yaskovich@rsce.ru

Accepted on September 19, 2017

*High computational efficiency of spacecraft docking dynamic simulation is needed for analysis based on a great number of random initial conditions, and sometimes for real time simulation. From the point of view of this dynamical process, a docking mechanism with many kinematical loops, in spite of its low mass, is more complex than a spacecraft. Some efficient simulation algorithms for such a class of mechanical systems are considered in this paper. For efficiency purposes, they are realized using a specialized symbolic manipulation system. Before simulation, a multi-loop mechanical system is transformed to a tree structure using constrain equations instead of individual joints. This paper states that a possibility of partitioning kinematical loops*

to controlled and dependent kinematical chains, and a limited number of structure types of the latter are typical for docking mechanisms. This paper proposes a modification to the Composite Rigid Body Algorithm (CRBA) for a transformed tree structure mechanical system with a moving base, and an additional recursive algorithm for the calculation of the force and moment acting on this base. Both of these supplements to CRBA allow linking of separate dynamic equations of a spacecraft and a mechanism. The Articulated Body Algorithm (ABA) is applied to partially open kinematical chains without kinematical loops, which occur in some central type docking mechanisms (the probe-cone type). The ABA calculates by itself the force and moment acting on the mechanism base and the spacecraft.

**Keywords:** spacecraft, docking mechanism, dynamic equations, Composite Rigid Body Algorithm, Articulated Rigid Body Algorithm

For citation:

**Yaskevich A. A.** Dynamic Equations of Docking Mechanisms. Part 1. Algorithms for Mechanical Systems with Tree Structure, *Mekhanika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 58–64.

DOI:10.17587/mau.19.58-64

## References

1. **Syromiatnikov V. S.** *Stykovochnye ustrojstva kosmicheskikh apparatov* (Docking units of spacecrafts), Moscow, Mashinostroenie, 1984, 216 p. (in Russian).
2. **Paine T. O., Fentress C. E.** Expanding center probe and drogue, US Patent Office 3526372, 1 Sept., 1970.
3. **Langley R. D.** Apollo Experience report — the docking system. NASA Technical Note, NASA TN D-6854, June 1972, 53 p.
4. **Tchoryk P., Pavlich Jr., Hays J. A., Wassick G., Ritter G.** Michigan Aerospace Corporation. Docking system, Patent US 20110058892 A1, November 1, 2010.
5. **Lewis J. L., Monty B. C., Le T. D. et al.** NASA. Low-Impact Mating System, Patent US 7543799 B1, June 9, 2009.
6. **IBDM** — *International Berthing & Docking Mechanism, VRI Newsletter*, 2005, April, p. 3.
7. **Ghofranian S., Chuang L.-P., Motaghedi P.** The Boeing Company, Spacecraft Docking System, Patent US20150266595 A1, September 24, 2015.
8. **Yaskevich A. V.** *Kombinirovannye uravneniya dvizheniya dlya opisaniya dinamiki sty-kovki kosmicheskikh apparatov s pomoshh'ju sistemy "shtyr'-konus"* (Combined equations of motion for description of spacecraft docking using the pin-cone system), *Izv. RAN. Kosmicheskie Issledovaniya*, 2007, vol. 45, no. 4, pp. 325–336. (in Russian).
9. **Featherstone R., Orin D.** Robot Dynamics: Equations and Algorithms, *Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, San Francisco, CA, April 2000, pp. 826–834.
10. **Pogorelov D. Y.** *Sovremennyye algoritmy komp'yuternogo sinteza uravnenij dvizheniya sistem tel* (Modern computer algorithms for synthesis of motion equations of body systems), *Izv. RAN, Teorija i Sistemy Upravleniya*, 2008, no. 4, pp. 5–15 (in Russian).
11. **Stepanenko Y. A.** *Algoritmy analiza dinamiki prostranstvennykh meha-nizmov s razomknutoj kinematicheskoy cep'ju* (An algorithm for dynamic analysis of spatial mechanisms with open kinematical chain), *Mehanika mashin*, Moscow, Nauka, 1974, iss. 44, pp. 77–88 (in Russian).
12. **Walker M. W., Orin D. E.** Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, *Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1982, vol. 104, pp. 205–211.
13. **Vereshhagin A. F.** *Metod modelirovaniya na CVM dinamiki slozhnykh mehanizmov robotov-manipulyatorov* (Computer simulation of complicated mechanisms of robot manipulators), *Izv. AN SSSR, Tehnicheskaja Kibernetika*, 1974, no. 6, pp. 89–94 (in Russian).
14. **Armstrong W. W.** Recursive solution to the equation of motion of an n-link manipulator, *Proc. of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms* (Montreal, July, 1979), 1979, pp. 1343–1346.
15. **Featherstone R.** The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias, *Int. Journal of Robotic Research*, 1983, vol. 2, no. 1, pp. 13–30.
16. **Gough V. E., Whitehall S. G.** Universal tyre test machine, *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, May, 1962, 1962, pp. 117–137.
17. **Stewart D.** A platform with six degrees of freedom, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1965, vol. 180, part 1, no. 15, pp. 371–386.
18. **Hunt K. H.** Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms, *Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in design*, 1983, vol. 105, pp. 705–712.
19. **ParalleMIC** — the Parallel Mechanisms Information Center, available at: <http://www.parallemic.org> (date of access: 04.09.2017)



28—30 мая 2018 г. в Санкт-Петербурге  
на базе АО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор" состоится

Юбилейная XXV Санкт-Петербургская

## МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ (МКИНС 2018)



Председатель программного комитета —  
Академик РАН, проф. В. Г. Пешехонов

### Тематика конференции

- ◆ Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- ◆ Интегрированные системы навигации и управления движением
- ◆ Глобальные навигационные спутниковые системы
- ◆ Средства гравиметрической поддержки навигации

На конференции не рассматриваются вопросы, затрагивающие военно-техническое сотрудничество, разработки военных технологий и образцов вооружений и военной техники. Программный комитет считает полезным представление обзорных докладов и докладов молодых ученых (до 33 лет).

Подробную информацию о конференции см. сайте:  
<http://www.elektropribor.spb.ru/icins2018/rindex>