

И. В. Некрасов, канд. техн. наук, консультант по программным решениям, ivannekr@mail.ru,
ООО "ДжиИ Рус" (General Electric Company, GE Digital), г. Москва

Синтез интерполяционного цифрового регулятора для дискретной динамической системы

Анализируются современные алгоритмы цифрового управления с точки зрения вычислительной трудоемкости. Констатируется высокая алгоритмическая сложность основных процедур оптимизации, используемых в алгоритмах цифрового оптимального управления, что ограничивает применимость современных методов управления в контроллерах ограниченной производительности. Предложен подход, позволяющий адаптировать трудоемкие алгоритмы управления для реализации на вычислителях невысокой мощности, в основу которого положена идея разделения вычислительного процесса на два этапа: на первом этапе осуществляется предварительный расчет управляющих воздействий в узловых точках фазового пространства (offline-расчет); второй этап сводится к интерполяции рассчитанных управляемых воздействий в точке текущего состояния системы (online-расчет). В результате наблюдается снижение требований к мощности вычислителей (так как процедура интерполяции является "менее дорогой") при сохранении приемлемого качества регулирования.

Ключевые слова: дискретные системы, оптимальное управление, синтезирующая функция, сложность алгоритма, фазовое пространство, состояние системы, интерполяция, табличный регулятор

Введение

Современные цифровые методы управления во многом базируются на результатах, достигнутых в таких областях науки, как теория алгоритмов [1], дискретная математика [2] и математическое программирование [3]. Центральным компонентом любого современного метода управления является вычислительная процедура, которая *циклически выполняется управляющей ЭВМ в режиме реального времени* (или в режиме, близком к реальному времени) [4]. Указанная процедура осуществляет вычисление текущего управляющего воздействия на систему путем численного решения задачи управления (или ее аппроксимации) с учетом текущего и целевого состояния системы, критерия оптимальности (в случае его наличия), а также ограничений, накладываемых на состояние системы и управляющее воздействие. Разнообразии задач и объектов управления порождает значительное число частных алгоритмических решений, сложность которых напрямую зависит от применяемых вычислительных схем, а также собственно от детальности постановки задачи управления (порядок объекта управления, учет его нелинейностей, применяемые критерии оптимальности процесса управления, различные ограничения и т.п.). По своей сути современное понятие "*алгоритм цифрового управления*" для дискретных систем вполне соответствует термину "*синтезирующая функция*", применяемому в теории непрерывного оптимального управления [5].

На фоне усложнения алгоритмов управления особую важность приобретает проблема их реализации на ЭВМ ограниченной производительности [6]. Ограничения по вычислительной мощности управляющего контроллера могут существенно ограничивать сложность решаемой задачи управления. Данный факт заставляет разработчиков искусственно упрощать модели объектов, снижать точность

численного решения, загромождать область допустимых значений переменных состояния и управляющих сигналов. Однако упрощение постановки задачи управления до пределов, приемлемых для реализации на выбранном вычислителе, не всегда возможно [7]. В данной работе рассмотрен интерполяционный подход к реализации оптимального управления, позволяющий заранее рассчитать оптимальные управляющие воздействия на систему над заданным дискретным полем ее переменных состояния и, тем самым, вынести наиболее ресурсоемкие вычисления за рамки формата реального времени. На этапе функционирования контура управления задача сводится к корректной интерполяции заранее найденных управляющих воздействий в точке текущего состояния системы.

Цифровое управление по принципу синтезирующей функции. Обзор решенных задач и разработанных алгоритмов

В настоящее время в открытой печати описано значительное число алгоритмов цифрового управления, предназначенных для реализации в виде программного кода управляющих ЭВМ. Принцип работы подобных систем управления предполагает замыкание объекта обратной связью по его состоянию [4]. При этом собранные значения переменных состояния поступают на вход управляющей ЭВМ, которая в данной постановке задачи выступает в качестве регулятора обратной связи (ОС) по состоянию (рис. 1).

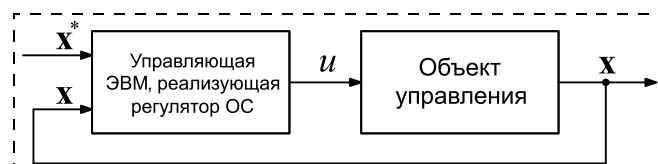


Рис. 1. Схема синтеза оптимальных управлений

На рис. 1. приняты следующие обозначения: $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор текущего состояния системы; $\mathbf{x}^* = \text{col}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ — вектор желаемого состояния системы; u — управляющее воздействие.

Вид алгоритма вычисления управляющего сигнала, реализованного в виде программного кода ЭВМ, определяется следующими факторами:

- постановкой задачи управления (видом уравнений, описывающих динамику системы; наличием и видом ограничений; наличием и видом критерия оптимальности и т.п.);
- выбранным методом решения задачи управления (постановкой оптимизационной задачи, вычислительной схемой, численным методом).

Заметим, что в данной дискретной постановке задачи алгоритм вычисления управляющего сигнала является аналогом синтезирующей функции в задаче непрерывного оптимального управления [5]. Основные постановки задачи дискретного оптимального управления и разработанные алгоритмы их решения приведены в работе [8]. Разнообразие применяемых вычислительных схем включает (но не ограничивается ими) процедуры линейного, квадратичного, дискретного и булева программирования, всевозможные алгоритмы направленного и ограниченного перебора, градиентного поиска, процедуры глобального поиска и пр.

Варианты снижения вычислительной сложности алгоритмов управления и оценка снижения качества решений

Очевидно, что при достаточной производительности управляющей ЭВМ задача управления может быть решена в режиме, близком к реальному времени. На практике решение задачи в режиме реального времени считается удовлетворительным, если выполняется следующее условие дискретности по времени:

$$\tau_p \ll \Delta t_y, \quad (1)$$

где τ_p — время решения задачи вычислителем на каждом такте управления; Δt_y — дискретность управления по времени (длительность одного такта управления).

При синтезе контуров управления допустимо пользоваться требованием (1) в менее строгой форме [4]:

$$\tau_p < \frac{\Delta t_y}{k}, \quad k \geq 1. \quad (2)$$

Ограничение мощности вычислителя приводит к увеличению времени решения τ_p численной задачи на такте управления. С учетом условия применимости вычислителя (2) вероятна ситуация, в которой выбранный алгоритм не может быть реализован с заданной дискретностью управления Δt_y . Заметим, что динамические характеристики контура управления ухудшаются при любом значении времени решения τ_p , так как процессы дискретизации

и последующего решения задачи управления на такте вносят в систему суммарное запаздывание ($\Delta t_y + \tau_p$) [9, 10]. Выполнение равенства $\tau_p = \Delta t_y$ является в данной ситуации границей применимости контура управления на заданной частоте дискретизации, когда управляющая ЭВМ не успевает выработать воздействие между двумя соседними во времени измерениями состояния объекта. Рассмотрим возможность обеспечения выполнения условия реализуемости (2) за счет изменения постановки и решения задачи управления.

1. **Увеличение дискретности** процесса управления Δt_y . Данный способ имеет границы применимости, продиктованные следующими факторами:

- *требуемая точность управления.* Увеличение Δt_y влияет на дискретную аппроксимацию объекта [11], снижая точность соответствия дискретной модели и исходного описания системы;
- *граница устойчивости системы.* Увеличение Δt_y влияет на вид переходных процессов системы. Как показано в работе [12], дискрета времени взаимно зависима с абсолютным горизонтом прогноза алгоритма (в секундах), что, в свою очередь, влияет на формирование суммарной фазовой траектории объекта. В частности, слишком большие значения дискреты времени порождают колебательные свойства и затягивают переходные процессы системы [6];
- *требования теоремы Котельникова.* Увеличение Δt_y для любой дискретной системы имеет фундаментальное ограничение в виде соотношений теоремы Котельникова. В частности, как показано в работе [9], частота квантования при переходе от непрерывного сигнала управления к цифровому ограничена снизу:

$$\left(v_y = \frac{1}{\Delta t_y} \right) > v_{\min}, \quad (3)$$

где v_y — частота квантования управляющего сигнала; v_{\min} — некоторая минимально допустимая частота, определяемая на основе динамических свойств объекта управления.

2. **Снижение времени решения** задачи вычислителем τ_p реализуемо двумя способами:

- *увеличение вычислительной мощности* управляющей ЭВМ позволяет осуществлять решение той же численной задачи за меньшее время. Данный вопрос вынесен за рамки настоящей работы, так как центральным вопросом считаем обеспечение регулирования в условиях имеющегося вычислителя ограниченной мощности.
- *снижение вычислительной трудоемкости* [13] решаемой задачи за счет:
 - ✓ *уменьшения горизонта прогноза* алгоритма управления. В работах [6, 10, 12] показано, что увеличение горизонта прогноза алгоритма при фиксированной дискретности по времени приводит к возрастанию размерности оптимизационной задачи, решаемой на каждом такте управления.

- Стремясь снизить размерность задачи, разработчик может уменьшить горизонт прогноза. Основным отрицательным эффектом в данном случае является повышение колебательности и затягивание переходных процессов системы [6];
- ✓ *упрощения модели.* К подобным упрощениям можно, например, отнести понижение порядка системы (редукция модели) [14], исключение или линеаризацию нелинейностей [15], в некоторых случаях (в частности, при использовании градиентных методов оптимизации) — снятие ограничений на переменные состояния и сигнал управления [3];
 - ✓ *загрубления сигнала управления* (прореживания поля возможных значений управляющего сигнала). Примером данного подхода может служить задача цифрового релейного управления, решаемая в работе [16]. Ограничение множества возможных управлений трехпозиционным реле дало возможность решить задачу управления прямым перебором, уложившись в разумные требования к вычислителю. Однако в зависимости от конкретной постановки задачи управления и применяемого метода оптимизации, сужение области допустимых значений сигнала управления может приводить к противоположному результату. Например, примененное в работе [17] ограничение множества управлений дискретным набором значений привело к необходимости преобразования задачи линейного программирования в более ресурсоемкую задачу целочисленного программирования;
 - ✓ *выбора менее ресурсоемкого вычислительного метода.* Данный подход относится к сфере проектирования системы управления и отражает умение проектанта выбирать разумные (субоптимальные) варианты. Очевидно, что корректно сформулированная задача линейного программирования [18] или градиентной оптимизации [19] при определенных условиях имеет меньшую алгоритмическую сложность, чем задача полного прямого перебора [20]. Однако при разумной постановке задачи методы ограниченного перебора (например, предложенный в работе [16]) могут оказаться приемлемыми как с точки зрения простоты реализации, так и с точки зрения ресурсоемкости;
 - ✓ *задания менее жестких требований по точности управления.* Данный подход относится к сфере использования выбранной вычислительной процедуры. Очевидно, что снижение требуемой точности минимизации уменьшает число итераций численного метода (см. в работе [19] на примере градиентной минимизации).
- Таким образом, перечисленные способы снижения вычислительной трудоемкости задачи управления имеют значительные ограничения по их применимости, что уменьшает ожидаемый эффект от их внедрения. Далее в данной статье предложен и проанализирован более радикальный метод со-

кращения вычислительных затрат алгоритма управления за счет вынесения наиболее "затратных" вычислительных операций на предварительный этап синтеза контура управления.

Идея предварительной оптимизации процесса управления с последующей интерполяцией в точке текущего состояния системы

Одним из очевидных способов понижения нагрузки на вычислитель является предварительное вычисление оптимального управляющего воздействия на систему для всех возможных сочетаний ее переменных состояния. В результате указанной операции задача управления сводится к следующей задаче выбора рассчитанного заранее управляющего воздействия, соответствующего текущему состоянию системы:

имея вектор текущего состояния системы $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и множество рассчитанных заранее оптимальных управляющих воздействий $U = \{u_{\mathbf{x}_1}, \dots, u_{\mathbf{x}_m}\}$, каждое из которых соответствует определенной точке фазового пространства $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, осуществить выбор управляющего воздействия u^ , соответствующего текущему состоянию системы.*

В общем случае объем предварительных вычисленийкратно возрастает, если объекту управления в качестве желаемого состояния может быть назначено более одной точки фазового пространства. В предельном случае (например, для следящей системы) желаемая точка может быть произвольной, т. е. множество целевых состояний может иметь бесконечную размерность.

Очевидно, что для практической задачи управления динамической системой подобный подход порождает бесконечномерное множество точек фазового пространства (как начальных, так и целевых), для которых необходимо выполнить вычисления. На практике для обеспечения разумного времени расчета поле опорных точек расчета необходимо "проредить". При этом также важно ограничить набор точек целевого состояния системы, так как каждому целевому состоянию системы соответствует отдельное интерполяционное множество точек фазового пространства. Иными словами, задачу управления необходимо решить для некоторого счетного подмножества точек, образованного от фазового пространства (рис. 2).

В случае, когда точка текущего состояния системы не является опорной, вычисление управляющего воздействия осуществляется n -мерной интерполяцией значений ближайших точек сетки [21], где n — порядок объекта управления (рис. 3).

На рис. 3 показан процесс последовательной трехмерной интерполяции значений точек сетки, состоящий из следующих этапов [21]:

- *шаг 1:* интерполяция исходных точек сетки (восемь точек, изображенных черным цветом) по переменной состояния x_3 (результат шага — четыре точки, изображенные темно-серым цветом);

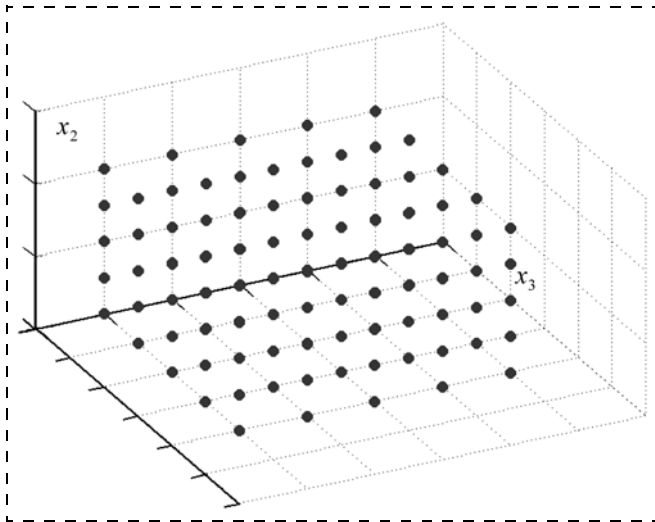


Рис. 2. Множество опорных точек фазового пространства (на примере системы третьего порядка)

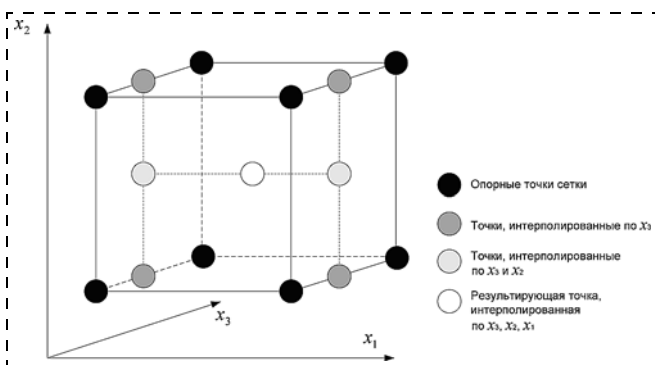


Рис. 3. Интерполяция управляющего сигнала на основе ближайших точек сетки (на примере системы третьего порядка)

- шаг 2: интерполяция точек, полученных на шаге 1, по переменной состояния x_2 (результат шага — две точки, изображенных светло-серым цветом);
- шаг 3: интерполяция точек, полученных на шаге 2, по переменной состояния x_1 (результат шага — одна результирующая точка, изображенная белым цветом).

Таким образом, окончательная постановка задачи примет следующий вид:

имея вектор текущего состояния системы $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и множество рассчитанных заранее оптимальных управляющих воздействий в опорных точках фазового пространства $U = \{u_{x_1}, \dots, u_{x_m}\}$, методом интерполяции ближайших рассчитанных значений определить оптимальное управляющее воздействие u^* , соответствующее текущему состоянию системы \mathbf{x} .

Обзор реализованных задач интерполяционного и табличного управления

Различные интерпретации описанного выше подхода широко применяются во многих областях техники (например, в энергетике [22], механообработке [23], автомобилестроении [24, 25] и пр.). Результаты отражены в значительном числе работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Среди

отечественных исследований в области цифрового табличного и интерполяционного управления наиболее близки к проблематике настоящей статьи работы, опубликованные в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете [26], Дальневосточном государственном техническом университете [27], МГТУ "Станкин" [28], Омском государственном техническом университете [29]. В частности, в работе [26] сформулирована пошаговая инструкция синтеза цифрового регулятора на основе определения поверхности переключения в табличной форме. Вопросы расчета поверхностей переключения, а также их последующей корректировки в режиме реального времени в зависимости от меняющихся внешних условий рассмотрены в работе [27]. В работе [29] для восстановления поверхности управления по табличным данным используется графический метод с привлечением многомерной интерполяции. Табличные методы управления внедрены на конкретных технических объектах в следующих работах:

- в работе [28] описано применение табличного регулирования в мехатронных приводах;
- в работе [30] представлена реализация системы управления двигателем внутреннего сгорания автономного роботизированного катера;
- в работе [31] рассмотрена реализация данных методов на примере двигателей телеуправляемого подводного аппарата.

Результаты зарубежных авторов по тематике настоящей статьи представлены в следующих работах:

- в работах [32, 33] коллективом авторов синтезированы алгоритмы интерполяционного цифрового управления (interpolative control) и исследованы их устойчивость и робастность;
- в работе [34] переменные состояния системы разделены на две группы: свободные и опорные. Процедура табличного расчета управления применяется только по первой группе переменных;
- в работе [35] схожая процедура расчета поверхности управления в качестве опорных точек задействует случайный набор точек пространства состояния системы;
- в работе [36] поверхность управления восстанавливается кубическим сплайном, результаты демонстрируются на примере системы первого и второго порядков;
- в работе [37] закон управления аппроксимируется кусочно-аффинными и непрерывными функциями состояния.

Апробация интерполяционного решения на модельном примере

Без ограничения общности решим задачу оптимального управления нелинейной системой с помощью алгоритма глобальной оптимизации, подробно рассмотренную в работе [38]. В указанной работе применен высокоэффективный метод минимизации — "метод случайного поиска". Из-за

Параметры моделирования (колебательное звено)

Обозначение и значение	Описание
$T = 0,1$ с	Постоянная времени колебат. звена
$\xi = 0,3$	Показатель колебательности
$\nu = 100$ Гц	Частота дискретизации системы
$M = 5$	Ресурсные ограничения $u \in [-M; +M]$
$\varepsilon_1 = 0,01$	Точность алгоритмов по переменной состояния x_1
$\varepsilon_2 = 0,1$	Точность алгоритмов по переменной состояния x_2
$N = 4$	Горизонт прогноза алгоритма
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,001$	Весовые коэффициенты критерия $J(\mathbf{x})$

чрезвычайной вычислительной трудоемкости данного метода [21] он не применяется в управляющих ЭВМ реального времени. В работе [38] метод случайного поиска использован только в режиме расчетов "offline" на стенде проверки корректности работы менее ресурсоемких субоптимальных алгоритмов управления, основанных на процедурах локальной оптимизации. Имея в распоряжении вычислительные ресурсы, многократно превосходящие производительность управляющих ЭВМ, используем данный алгоритм для предварительных расчетов управляющего сигнала в опорных точках фазового пространства. Перепишем постановку задачи, приведенную в работе [38].

Пример 1. Управление колебательным звеном. Объект описывается передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{x_1(s)}{u(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

что эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$Ob: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T^2}x_1 - \frac{2\xi}{T}x_2 + \frac{1}{T^2}u; \end{cases}$$

начальные условия $(x_1(0) \ x_2(0))^T = (x(0) \ \dot{x}(0))^T$; целевое состояние $(x_1^* \ x_2^*)^T = (x^* \ \dot{x}^*)^T = (0 \ 0)^T$; функционал качества $J(\mathbf{x}) = \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2 + \alpha_2(x_2 - x_2^*)^2$; управление ограничено по модулю: $u \in [-M; +M]$.

В работе [38] для целей определения эталонных оптимальных фазовых траекторий системы реализован алгоритм управления, в основе которого лежит вычислительная процедура метода случайного поиска [21]. Данный алгоритм позволяет найти глобальный минимум целевой функции $J(\mathbf{x})$ и обеспечить оптимальное управление системой на каждом такте управления. Однако, как было упомянуто ранее, высокая вычислительная трудоемкость данного метода не позволяет реализовать его напрямую в управляющей ЭВМ. Для интерполяционной аппроксимации результатов применения алгоритма случайного поиска зададимся полем опорных точек фазового пространства, для которых будет осуществлен расчет оптимального управляющего воздействия $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \rightarrow U = \{u_{\mathbf{x}_1}, \dots, u_{\mathbf{x}_m}\}$. Применим алгоритм расчета управляющего воздействия, разработанный в работе [38], к множеству опорных точек $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ и сведем результаты расчетов в интерполяционную таблицу. В силу большого числа точек полученной таблицы приведем только параметры ее размерности, а также минимальные и максимальные значения переменных состояния:

$$P_{43 \times 83} = \{(x_1; x_2)_1, \dots, (x_1; x_2)_{3569} \mid x_1 = (-5, \dots, 5), \\ x_2 = (-25, \dots, 25).$$

Поверхность управления, построенная над фазовой плоскостью системы по точкам $P_{43 \times 83}$, приведена на рис. 4 (см. вторую сторону обложки). За-

метим, что данная графическая интерпретация аналогична представлению релейного закона управления в виде линии переключения на фазовой плоскости [39].

В нашем случае управляющий сигнал может принимать значения из непрерывного ограниченного множества, вследствие чего концепцию линий переключения, применяемую в работе [39] для релейного случая, естественно обобщить поверхностью управления (рис. 4, см. вторую сторону обложки).

Сравним графики переходных процессов в системе при модельной реализации исходного алгоритма случайного поиска и его интерполяционной аппроксимации (рис. 5, 6 для различных начальных условий, см. вторую сторону обложки). Параметры моделирования приведены в табл. 1.

Пример 2. Управление неустойчивой системой второго порядка

$$W(s) = \frac{x_1(s)}{u(s)} = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s - 1)};$$

начальные условия $(x_1(0) \ x_2(0))^T = (x(0) \ \dot{x}(0))^T$; целевое состояние $(x_1^* \ x_2^*)^T = (x^* \ \dot{x}^*)^T = (0 \ 0)^T$; функционал качества $J(\mathbf{x}) = \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2 + \alpha_2(x_2 - x_2^*)^2$; управление ограничено по модулю: $u \in [-M; +M]$.

По аналогии с примером 1 зададимся полем опорных точек фазового пространства и соответствующим множеством рассчитанных управляющих воздействий $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \rightarrow U = \{u_{\mathbf{x}_1}, \dots, u_{\mathbf{x}_m}\}$. Предельные значения переменных состояния и множество опорных точек оставим без изменений относительно примера 1.

Поверхность управления, построенная над фазовой плоскостью системы по точкам $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$, приведена на рис. 7 (см. третью сторону обложки). Графики переходных процессов и соответствующие сигналы управления для алгоритма случайного поиска и его интерполяционной аппроксимации приведены на рис. 8, а–в (см. третью сторону обложки).

Для проведения сеансов расчета примем параметры моделирования и перечень начальных условий, приведенные в табл. 2.

Параметры моделирования (неустойчивый объект)

Обозначение и значение	Описание
$T_1 = 0,1$ с	Постоянная времени
$T_2 = 0,2$ с	Постоянная времени
$\nu = 100$ Гц	Частота дискретизации системы
$M = 5$	Ресурсные ограничения $u \in [-M; +M]$
$\varepsilon_1 = 0,01$	Точность алгоритмов по переменной состояния x_1
$\varepsilon_2 = 0,1$	Точность алгоритмов по переменной состояния x_2
$N = 4$	Горизонт прогноза алгоритма
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,001$	Весовые коэффициенты критерия $J(x)$
$(x(0) \dot{x}(0))^T = (4 - 1)^T$	Начальные условия моделирования

Переходные процессы, изображенные на рис. 5, 6 и 8 (см. третью сторону обложки), показывают достаточную близость решений задачи оптимального управления прямым оптимизационным и интерполяционными методами. Отклонения значений управляющего сигнала, полученные в результате вычисления по интерполяционной таблице (представление таблицы в виде поверхности показано на рис. 4 и рис. 7, см. третью сторону обложки), вызваны ограниченной точностью операции интерполирования. Заметим, что точность интерполяции напрямую зависит от шага сетки [21] и может быть повышена за счет увеличения числа опорных точек поверхности (см. рис. 2).

Заключение

В данной статье рассмотрена проблема реализации алгоритмов оптимального цифрового управления динамическими объектами. Современный уровень развития теории управления позволяет без упрощений учитывать реальные особенности современных объектов управления. К таким особенностям относятся:

- высокий порядок системы уравнений объекта;
- наличие нелинейностей;
- нестационарность параметров объекта;
- высокое быстродействие и частота квантования;
- сложные критерии оптимальности и т. п.

Платой за эффективность получаемых решений является чрезвычайно высокая вычислительная трудоемкость алгоритмов и повышенные требования к производительности управляющих ЭВМ. Нередко реализация разработанных алгоритмов управления невозможна на современной элементной базе. В настоящей работе предложена идея обеспечения реализуемости указанных алгоритмов за счет вынесения наиболее трудоемких расчетов на этап предварительного синтеза контура управления с последующим их сохранением в памяти управляющей ЭВМ. В режиме реального времени работа алгоритма заменяется интерполяцией управляющего сигнала на основе проведенных ранее расчетов.

Применение предложенного подхода продемонстрировано на примере алгоритма оптимального управления, основанного на процедуре случайного поиска. Трудоемкость указанного алгоритма не позволяет организовать его прямое применение в режиме реального времени [38]. Преобразования алгоритма, проведенные в настоящей работе, позволили получить идентичные работе [38] результаты, одновременно понизив трудоемкость задачи управления до уровня, приемлемого для реализации на стандартном управляющем микроконтроллере. Результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенного подхода.

Список литературы

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов: Пер. с англ. А. О. Слисенко. М.: Мир, 1979. 536 с. (с. 57–92).
2. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 744 с.
3. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование: Пер. с англ. под ред. Я. З. Цыпкина. М.: Наука, 1975. 280 с.
4. Острём К., Витгенмарк Б. Системы управления с ЭВМ: Пер. с англ. под ред. к. ф.-м. н С. П. Чеботарева. М.: Мир, 1987. 480 с.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
6. Некрасов И. В. Исследование эффективности алгоритма оптимального управления динамической системой при варьировании периода квантования дискретной аппроксимации объекта // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 1. С. 16–23.
7. Воропай Н. И. Упрощение математических моделей динамики электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.
8. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления: Учеб. в 5 т.: под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова, М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 744 с. (с. 142–150, с. 165–176).
9. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования: учеб. пособ. для вузов. М.: Машиностроение, 1985. 536 с.
10. Findeisen R. Nonlinear Model Predictive Control: A Sampled-Data Feedback Perspective. Institut für Systemtheorie technischer Prozesse der Universität Stuttgart, Deutschland, 2004. 153 p.
11. Стрейтс В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления: Пер. с англ. под ред. Я. З. Цыпкина. М.: Наука, 1985. 295 с.
12. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7 (160). С. 3–9.
13. Адигеев М. Г. Введение в теорию сложности. Методические указания для студентов механико-математического факультета. Ростов-на-Дону: Изд. Ростовского государственного университета, 2004. 35 с.
14. Тетельбаум И. М., Шнейдер Ю. Р. Практика аналогового моделирования динамических систем. Справ. пособ. М.: Энергоатомиздат, 1987. 384 с. (с. 12–18).
15. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1979. 256 с.
16. Кукин Н. С., Некрасов И. В. Применение стратегии перебора состояний при оптимизации релейного управления дискретной системой // Известия института инженерной физики. 2011. Т. 2, № 20. С. 28–32.
17. Некрасов И. В. Оптимизация ступенчатого управления дискретной системой методом частично-целочисленного про-

граммирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 3 (156). С. 9—13.

18. **Банди Б.** Основы линейного программирования: Пер. с англ. О. В. Шихеевой под ред. В. А. Волинского. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

19. **Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С.** Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 440 с.

20. **Odlyzko A. M.** Asymptotic Enumeration Methods. — University of Minnesota, USA. 192 p. URL: <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/asymptotic.enum.pdf>

21. **Калиткин Н. Н.** Численные методы / Под ред. А. А. Самарского. М.: Наука, 1978. 512 с. (с. 49—52; с. 214).

22. **Dale S., Bara A., Gabor G.** Interpolative Control Structure Design for a Heat Exchanger in a Geothermal Power Plant // Journal of Computer Science and Control Systems. 2008. N. 1. P. 131—134.

23. **Kimura Y., Mukai R., Kobayashi F., Kobayashi M.** Interpolative variable-speed repetitive control and its application to a deburring robot with cutting load control // Advanced Robotics. 1992. V. 7, Iss. 1. P. 25—39.

24. **Balas M. M., Balas V. E.** Optimizing the Distance-Gap between Cars by Fuzzy-Interpolative Control with Time to Collision Planning // Mechatronics, 2006 IEEE International Conference on. P. 215—218.

25. **Lin Chih-Min, Chun-Fei Hsu.** Self-learning fuzzy sliding-mode control for antilock braking systems // Control Systems Technology, IEEE Transactions on. 2003. V. 1. Iss. 1. P. 273—278.

26. **Ростов Н. В.** Синтез и многокритериальная оптимизация нелинейных квазиоптимальных по быстродействию цифровых регуляторов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. "Информатика. Телекоммуникации. Управление". 2014. № 6 (210). С. 59—66.

27. **Змеу К. В., Дьяченко П. А., Ноткин Б. С.** Релейное нейросетевое управление существенно неопределенным объектом в задаче максимального быстродействия // Интеллектуальные системы. 2009. № 2 (20). С. 93—105.

28. **Лукинов А. П., Махонин А. К.** Цифровые табличные регуляторы в следящих приводах // Автоматизация. Современные технологии. 2010. № 3. С. 37—41.

29. **Горохов А. А.** Графический метод формирования макета процесса управления по экспериментальным данным // Омский научный вестник. 2006. № 7 (43). С. 54—57.

30. **Береснев А. Л., Береснев М. А., Гуренко Б. В.** Способы управления ДВС с искровым зажиганием в составе автономного роботизированного катера // Инновации в науке. 2014. № 38. С. 34—38

31. **Каракаев А. Б., Тарасенко А. А.** Синтез алгоритма управления маршевыми движителями телеуправляемого необитаемого подводного аппарата // Эксплуатация морского транспорта. 2013. № 2 (72). С. 40—44.

32. **Dale S., Dragomir T.-L.** Design Procedures of Some Interpolative Control Structures With Robustness Properties and Limitations // CEAI. 2008. V. 10, N. 1. P. 3—14.

33. **Dale S., Silaghi H. M.** Procedural and software development of a Liapunov-based stability analysis method for interpolative-type control systems. // System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2013 17th International Conference. P. 156—159.

34. **Raibert M. H., Wimberly F. C.** Tabular control of balance in a dynamic legged system // 1984. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on. Vol. "SMC-14", Iss. 2. P. 334—339.

35. **Van der Smagt P. P.** Interpolative robot control with the nested network approach // Proc. of the 1992 IEEE International Symposium. Intelligent Control. 1992. P. 475—480.

36. **Yang Wen-guang.** Fuzzy Control Algorithm based on Spline Interpolation // Fuzzy Systems and Mathematics. 2009-03. Jiaotong University, Chengdu, China. URL:http://en.cnki.com.cn/Article_en/CJFDTotal-MUTE200903025.htm

37. **Nguyen H. N., Gutman P. O., Oлару S.** Control with constraints for linear stationary systems: An interpolation approach // Automation and Remote Control. Vol. 75, Iss. 1. P. 57—74.

38. **Некрасов И. В., Кукин Н. С.** Расчет эталонных переходных процессов и оценка оптимальности управления в динамической системе // Известия института инженерной физики. 2013. Т. 2, № 28. С. 12—20.

39. **Симоньянц Р. П.** Динамика релейной стабилизации: учеб. пособ. по курсу "Динамика движения и системы управления". М.: МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1987. 52 с.

Development of a Digital Control Algorithm Based on Interpolation of the Previously Calculated Optimal Solution

I. V. Nekrasov, ivannekr@mail.ru✉,

GE Rus Ltd. (General Electric Company, GE Digital), Moscow, Russian Federation

Corresponding author: Nekrasov I. V., Ph.D., Software Solution Consultant, GE Rus Ltd. (General Electric Company, GE Digital), Moscow, Russian Federation, e-mail: ivannekr@mail.ru

Received on November 03, 2015

Accepted on November 17, 2015

In this paper the authors analyze a variety of modern discrete control algorithms from the point of view of their computational complexity. The outcome of their analysis revealed high complexity of the major optimization procedures employed in the discrete algorithms of the optimal control. This uncovered disadvantage concerns implementation of the modern control algorithms in the digital real-time controllers of a limited computational power. The article suggests an approach how to adopt the time-consuming algorithms to the low productivity controllers. This approach is based on the idea to divide the computation process into two stages: the first stage includes preventive offline calculation of the optimal control values for a defined set of points in the system's state space; the second stage involves an online interpolation of the previously calculated control values for the current state of the system (only the second stage is realized in a real-time controller). As a result we observe reduction of the requirements to the controller processing power (assuming that the interpolation procedure is less time-consuming than the investigated optimization methods) accompanied with an insignificant decrease of the transient performance of the system. A practical analysis of the obtained results was conducted for the sample optimal control loop based on the numerical procedure of a random search. The random search procedure belongs to the top computation-consuming algorithms and in most cases is not available for implementation in the real-time controllers. Adaptation of this algorithm to the above-described two-steps computational process simplifies the on-line calculations down to the interpolation operation which can be performed by the modern digital controllers of a modest capacity. The findings of this paper were proved by the results of computer simulation.

Keywords: discrete systems, optimal control, control function, computational complexity, phase space, state space, system state, interpolation, tabular control, interpolative control

For citation:

Nekrasov I. V. Development of a Digital Control Algorithm Based on Interpolation of the Previously Calculated Optimal Solution, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 3, pp. 158–165.

DOI: 10.17587/mau/17.158-165

References

1. **Aho A., Hopcroft J., Ullman J.** The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
2. **Belousov A. I., Tkachev S. B.** *Diskretnaya matematika* (Discrete Mathematics), Moscow: Publishing house of Moscow State Technical University after N. E. Bauman, 2006, 744 p. (in Russian).
3. **Tabak D., Kuo B. C.** Optimal Control by Mathematical Programming. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
4. **Åström Karl J., Wittenmark B.** Computer Controlled Systems. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1987, 480 p.
5. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow, Nauka, 1976, 392 p. (in Russian).
6. **Nekrasov I. V.** *Issledovanie effektivnosti algoritma optimal'nogo upravleniya dinamicheskoi sistemoi pri vap'ovanii perioda kvantovaniya diskretnoi approksimatsii ob'ekta* (Testing a Control Algorithm for Dynamic System at Various Quantization Periods of the Discrete Approximation of the Plant), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, no. 1, pp. 16–23 (in Russian).
7. **Voropai N. I.** *Uproshchenie matematicheskikh modelei dinamiki elektroenergeticheskikh sistem* (Simplifications in mathematical models of electro-energy systems), Novosibirsk, Nauka, 1981, 112 p. (in Russian).
8. **Pupkov K. A. and Yegupov N. D.** ed. *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya. T. 4. Teoriya optimizatsii sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Methods of classical and modern control theory. Vol.4. Optimization theory of automatic control systems), Moscow, Publishing house of Moscow State Technical University after N. E. Bauman, 2004, 744 p. (pp. 142–150, pp. 165–176) (in Russian).
9. **Solodovnikov V. V., Plotnikov V. N., Jakovlev A. V.** *Osnovy teorii i jelementy sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. Uchebnoe posobie dlja VUZov* (Basics of control theory and elements of control systems. Studying material for universities), Moscow, Mashinostroyeniye, 1985, 536 p. (in Russian).
10. **Findeisen R.** Nonlinear Model Predictive Control: A Sampled-Data Feedback Perspective, Institut für Systemtheorie technischer Prozesse der Universität Stuttgart, Deutschland, 2004, 153 p.
11. **Strejc V.** State-space theory of discrete linear control, *Translated by R. Major*, Prague, ACADEMIA, 1981, 295 p.
12. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Gibridnaya skhema resheniya zadachi lineinogo bystrodeystviya na osnove formalizma poliedral'noi optimizatsii* (Hybrid Scheme of Solution to the Problems of Linear Acting on the Basis of Polyhedral Optimization Formalism), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, vol. 7 (160), pp. 3–9. (in Russian).
13. **Adigeev M. G.** *Vvedenie v teoriyu slozhnosti. Metodicheskie ukazaniya dlya studentov mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta* (Introduction into computational complexity. Studying material for students of mechanics-and-mathematics faculty), Rostov-na-Donu, Publishing house of Rostovskii Gosudarstvennyi Universitet, 2004, 35 p. (in Russian).
14. **Tetel'baum I. M., Shneider Yu. R.** *Praktika analogovogo modelirovaniya dinamicheskikh sistem. Spravochnoe posobie* (Practical materials on analog simulation of dynamic systems. Reference manual), Moscow, Energoatomizdat, 1987, 384 p. (pp. 12–18) (in Russian).
15. **Popov E. P.** *Teoriya nelineinykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya i upravleniya* (Theory of Nonlinear Regulating and Control Systems), Moscow, Nauka, 1979, 256 p. (in Russian).
16. **Kukin N. S., Nekrasov I. V.** *Izvestiya instituta inzhenernoi fiziki* (Proceedings of the "Engineering Physics Institute"), Publishing house of the "Engineering Physics Institute", 2011, vol. 2, no. 20, pp. 28–32 (in Russian).
17. **Nekrasov I. V.** *Optimizatsiya stupenchatogo upravleniya diskretnoi sistemoi metodom chastichno-tselochislennogo programmirovaniya* (Implementing a Mixed-Integer Programming Procedure for Optimization of Step Mode Control Process in a Discrete System), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 3(156), pp. 9–13 (in Russian).
18. **Bunday B. D.** Basic Linear Programming. School of Mathematical Sciences, University of Bradford, 1984.
19. **Attetkov A. V., Galkin S. V., Zarubin V. S.** *Metody optimizatsii* (Optimization methods), Moscow, Publishing house of Moscow State Technical University after N. E. Bauman, 2003, 440 p. (in Russian).
20. **Odlyzko A. M.** Asymptotic Enumeration Methods, University of Minnesota, USA, available at <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/asympotic.enum.pdf>, 192 p.
21. **Kalitkin N. N.** *Chislennyye metody* [Numerical Methods], Moscow, Nauka, 1978, 512 p. (p. 49–52; p. 214) (in Russian).
22. **Dale S., Bara A., Gabor G.** Interpolative Control Structure Design for a Heat Exchanger in a Geothermal Power Plant, *Journal of Computer Science and Control Systems*, 2008, no. 1, pp. 131–134.
23. **Kimura Y., Mukai R., Kobayashi F., Kobayashi M.** Interpolative variable-speed repetitive control and its application to a deburring robot with cutting load control, *Advanced Robotics*, 1992, vol. 7, iss. 1, pp. 25–39.
24. **Balas M. M., Balas V. E.** Optimizing the Distance-Gap between Cars by Fuzzy-Interpolative Control with Time to Collision Planning, *Mechatronics*, 2006 IEEE International Conference on, pp. 215–218.
25. **Lin Chih-Min, Chun-Fei Hsu.** Self-learning fuzzy sliding-mode control for antilock braking systems. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 2003, vol. 1, iss. 1, pp. 273–278.
26. **Rostov N. V.** *Sintez i mnogokriterialnaya optimizatsiya nelineynykh kvaziopimalnykh po bystrodeystviyu cifrovyyh regulyatorov* (Synthesis and multiobjective optimization of non-linear quasi time-optimal digital controllers), *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. "Computer Science. Telecommunications and Control Systems"*, 2014, no. 6 (210), pp. 59–66 (in Russian).
27. **Zmeu K. V., Dyachenko P. A., Notkin B. S.** *Releynoe nejrosetevoe upravlenie sushchestvenno neopredelennym obektom v zadache maksimal'nogo bystrodeystviya* (Relay neural network control for a significantly undefined system with the maximum speed criterion), *Intellektualnye Sistemy*. 2009, no. 2 (20), pp. 93–105 (in Russian).
28. **Lukinov A. P., Machonin A. K.** *Cifrovyye tablichnyye regulyatory v sledyashchih privodakh* (Digital tabular regulator for tracking drive), *Avtomatizatsiya. Sovremennyye Tekhnologii*, 2010, no. 3, pp. 37–41 (in Russian).
29. **Gorohov A. A.** *Graficheskij metod formirovaniya maketa protsessa upravleniya po ehksperimental'nym dannym* (Graphical method of creating a maquette of the process of experimental data management), *Omskij Nauchnyj Vestnik (Scientific Digest of Omsk)*, 2006, no. 7 (43), pp. 54–57 (in Russian).
30. **Beresnev A. L., Beresnev M. A., Gurenko B. V.** *Sposoby upravleniya dvs s iskrovym zazhiganiem v sostave avtonomnogo robotizirovannogo katera* (Approaches to control internal-combustion engine of an autonomous robotic vessel), *Innovacii v Nauke*, 2014, no. 38, pp. 34–38 (in Russian).
31. **Karakaev A. B., Tarasenko A. A.** *Sintez algoritma upravleniya marshevymi dvizhityami teleupravlyаемого neobitaемого подводного аппарата* (Synthesis of algorithm managements by mid-flight propellers of the long-distance uninhabited submersible), *Ehkspluatatsiya Morskogo Transporta*, 2013, no. 2 (72), pp. 40–44 (in Russian).
32. **Dale S., Dragomir T.-L.** Design Procedures of Some Interpolative Control Structures With Robustness Properties and Limitations, *CEAI*, 2008, vol. 10, no. 1, pp. 3–14.
33. **Dale S., Silaghi, H. M.** Procedural and software development of a Liapunov-based stability analysis method for interpolative-type control systems, *System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, 2013 17th International Conference, pp. 156–159.
34. **Raibert M. H., Wimberly, F. C.** Tabular control of balance in a dynamic legged system, *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on. Volume "SMC-14"*, 1984, iss. 2, pp. 334–339.
35. **van der Smagt P. P.** Interpolative robot control with the nested network approach, *Intelligent Control, Proceedings of the 1992 IEEE International Symposium on*, 1992, pp. 475–480.
36. **Yang Wen-guang.** Fuzzy Control Algorithm based on Spline Interpolation, Fuzzy Systems and Mathematics. 2009-03. Jiaotong University, Chengdu, China, available at http://en.cnki.com.cn/Article_en/CJFDTotat-MUTE200903025.htm
37. **Nguyen H. N., Gutman P. O., Oлару S.** Control with constraints for linear stationary systems: An interpolation approach, *Automation and Remote Control*, vol. 75, iss. 1, pp. 57–74.
38. **Nekrasov I. V., Kukin N. S.** *Izvestiya instituta inzhenernoi fiziki* (Proceedings of the "Engineering Physics Institute"), Publishing house of the "Engineering Physics Institute", 2013, vol. 2, no. 28, pp. 12–20 (in Russian).
39. **Simon'yants R. P.** *Dinamika releinoi stabilizatsii. Uchebnoe posobie po kursu "Dinamika dvizheniya i sistemy upravleniya"* (Dynamics of relay stabilization systems. Studying material for "Motion Dynamics and Control Systems" course), Moscow: Publishing house of Moscow State Technical University after N. E. Bauman, 1987, 52 p. (in Russian).