УДК 681.513 DOI: 10.17587/mau.17.84-93

В. И. Ловчаков[1], д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,
Е. В. Ловчаков[2], канд. техн. наук, инженер, spartannez@rambler.ru,
Е. И. Кретов[1], аспирант, neitworld@ya.ru,
[1] Тульский государственный университет,
[2] ООО "Сервис-Софт", Тула

Синтез быстродействующих систем управления с использованием теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов

Для широкого класса объектов с полиномиальными и дробно-рациональными нелинейностями разрабатывается метод синтеза квазиоптимальных замкнутых систем управления высокого порядка по критерию быстродействия. Данный метод основан на замене решения задачи быстродействия решением соответствующей задачи аналитического конструирования оптимального регулятора для рассматриваемого объекта по заданному определенным образом функционалу качества. Для решения последней задачи модифицируется известный метод степенных рядов А. А. Красовского.

Ключевые слова: *нелинейный объект, критерий быстродействия, гладкая функция Беллмана, аналитическое конструирование оптимального регулятора*

Введение

Для повышения производительности многих технологических процессов, производственных агрегатов, электромеханических систем желательно, чтобы системы управления, входящие в их состав, отвечали критерию оптимальности по быстродействию, который непосредственно определяет эффективность их функционирования. Однако решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи, как показывает анализ известных работ [1—16], представляет серьезную теоретическую проблему даже для объектов относительно невысокого порядка (n = 3, 4, 5). Подчеркнем, что существует большое число, оцениваемое сотнями, работ, посвященных анализу и синтезу оптимальных по быстродействию систем управления (в списке литературы данной статьи указаны основные монографии, суммарная библиография которых отчасти отражает это множество работ). Анализ их установил, что задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [1—3, 5, 6]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных случаях, в частности, для трех последовательно соединенных интеграторов [2], соединения двух интеграторов и апериодического звена [1—3], соединения интегратора и двух апериодических звеньев [1, 3]. При этом существенным образом использовались геометрические методы (построения), например, проекции вынужденных траекторий объекта в трехмерном фазовом пространстве на соответствующие плоскости [1, 2]. Для объектов высокого порядка ($n \geqslant 4$) применение метода фазовой плоскости и геометрических построений существенно затруднено, и, как следствие, для них практически неизвестны аналитические решения задачи быстродействия [16]. В связи с этим многочисленные работы [4, 6—12] направлены на разработку различных способов нахождения аппроксимационного решения задачи оптимального быстродействия и, в частности, на определение разнообразных аппроксимаций поверхности переключения оптимального релейного регулятора [6, 7, 10, 12]. Результат такого решения называется *квазиоптимальным управлением*.

В настоящей работе для нелинейных объектов с полиномиальными или дробно-рациональными характеристиками предложен новый аппроксимационный метод нахождения квазиоптимальных по быстродействию управлений в форме гладких функций, варьирование определенных параметров которых (приближение их значений к предельно малым) позволяет повышать степень квазиоптимальности системы, имеющей асимптотически устойчивое тривиальное решение. Гладкость функций управления, аппроксимирующих оптимальные разрывные алгоритмы, позволяет:

1) к решению задачи оптимального управления математически обоснованно применить метод динамического программирования Р. Беллмана [17, 19] и теорию аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [19, 20];

2) существенно уменьшить объем вычислений при синтезе квазиоптимальных систем;

3) исключить скользящий режим работы системы, который нежелателен для многих объектов управления.

Метод основан на представлении (аппроксимации) единичной функции функционала быстродействия положительно определенными полиномиальными или дробно-рациональными функциями в целях трансформации задачи быстродействия в соответствующую задачу АКОР, которая далее решается известным методом — методом степенных рядов [19].

1. Постановка задачи быстродействия и обоснование подхода к ее решению

Рассмотрим класс нелинейных объектов, динамика которых в непрерывном времени t описывается дифференциальными уравнениями состояния вида

$$\dot{x}_i(t) = a_i[X(t)] + b_i[X(t)]u(t);$$
$$i = 1, 2, ..., n; |u(t)| \leqslant U_{max} = 1, \quad (1)$$

где $x_i(t)$ — фазовые координаты, составляющие вектор состояния X объекта и имеющие физический смысл отклонения переменных объекта от заданного режима; $u(t)$ — сигнал управления, ограниченный величиной U_{max}; $a_i(X) \equiv a_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $b_i(X) \equiv b_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ — однозначные полиномиальные или дробно-рациональные функции от компонент вектора состояния. Такие модели являются типичными, например, для электротехнических объектов, в частности, для электропривода при учете его характерных нелинейностей.

Для данных объектов исследуется классическая задача быстродействия, формулируемая следующим образом [1—3]: требуется найти алгоритм управления в форме обратной связи $u(X)$, переводящий объект (1) из начального состояния $X(0) = X_0$ в конечное нулевое с минимальным значением функционала быстродействия

$$I_1 = \int_0^T 1 \cdot dt = T \to \min. \quad (2)$$

При синтезе замкнутых систем оптимального управления часто используется метод динамического программирования Р. Беллмана [17], основное функциональное уравнение которого для задачи (1), (2) имеет вид

$$\min_{u \subset \Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} \cdot [a_i[X(t)] + b_i[X(t)]u(t)] \right\} = -1. \quad (3)$$

Минимизация выражения в фигурных скобках по управлению в указанной ограниченной области позволяет найти оптимальное управление

$$u(X) = -\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} b_i[X(t)] \right] \quad (4)$$

через функцию Беллмана $S(X)$. Подставив управление (4) в уравнение (3), получим уравнение в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} a_i(X) - \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} b_i(X) \right| = -1 \quad (5)$$

для определения функции $S(X)$, называемое уравнением Гамильтона—Якоби—Беллмана (ГЯБ). Если уравнение (5) с краевым условием $S[X(T)] = 0$ возможно аналитически решить, то в соответствии с соотношением (4) легко находится искомый закон оптимальной обратной связи. Однако отыскание аналитического решения уравнения (5), даже приближенного, встречает серьезные математические и вычислительные трудности — уравнение (5) решено только для отдельных объектов второго и третьего порядков [2, 17]. Последнее обстоятельство во многом определяется наличием в уравнении (5) нелинейности вида модульной функции, которая является не дифференцируемой в точке изменения знака переменной. Это приводит к тому, что функция Беллмана оказывается разрывной функцией при определенных значениях своих аргументов даже для линейных объектов управления. Данный факт ставит под сомнение правомерность применения динамического программирования в задаче быстродействия, так как при выводе соотношений (3), (4) и (5) априори предполагается дифференцируемость функции $S(X)$ [17]. По этой причине целесообразен переход к синтезу квазиоптимальных быстродействующих систем управления с гладкими функциями $S(X)$ и $u(X)$.

Серьезным результатом в указанном направлении является теория квазиоптимального быстродействия (ТКОБ), разработанная профессором Р. А. Нейдорфом и его учениками [10—12]. В работах Р. А. Нейдорфа задача оптимального по быстродействию управления рассматривается с точки зрения практической реализуемости асимптотически устойчивых систем с обратной связью. Исходным основополагающим результатом ТКОБ является утверждение, что для динамического объекта первого порядка

$$\dot{x}(t) = u(t), |u(t)| \leqslant U_{max}$$

можно построить математическую модель КОБ системы первого порядка

$$\dot{x} = S_{ran}(x, \varepsilon), S_{ran}(x, \varepsilon) = -U_{max}x/\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}, \varepsilon > 0, (6)$$

в виде дробно-радикальной функции Нейдорфа $S_{ran}(x, \varepsilon)$ [10, 11]. В ней малый параметр ε определяет заданную степень приближения квазиоптимального управления $u(x) = -U_{max}x/\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ к строго оптимальному закону управления объектом первого порядка $u(x) = -U_{max}\mathrm{sign}[x(t)]$.

Отталкиваясь от данного решения задачи быстродействия первого порядка, в указанных работах предлагаются варианты построения математических моделей систем КОБ более высокого порядка, проводятся исследования нелинейных параметрически настраиваемых функций, аппроксимирующих разрывные функции оптимального управления, доказывается свойство асимптотической устойчивости тривиального решения, а также анализируются способы направленного формирования ε-параметрической квазиоптимальности в системах. Так, в работе [12] предлагается и исследуется модель КОБ системы n-го порядка, построенная на основе функции Нейдорфа следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -u_m^1 S_{ran}(x_1 + \alpha_1 x_2, \varepsilon_1); \\ \dot{x}_2(t) = -u_m^2 S_{ran}(x_2 + \alpha_2 x_3, \varepsilon_2); \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = -u_m^{n-1} S_{ran}(x_{n-1} + \alpha_{n-1} x_n, \varepsilon_{n-1}); \\ \dot{x}_{n-1}(t) = -u_m^n S_{ran}(x_n, \varepsilon_n), \end{cases} \quad (7)$$

где $\alpha_i = \text{const} \neq 0$, $\varepsilon_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. При таком построении модели первая переменная состояний $x_1(t)$ обладает наибольшей инерционностью, а последняя переменная $x_n(t)$ строго подчиняется закону КОБ первого порядка. Свойства квазиоптимальности быстродействия последовательно передаются от $x_1(t)$ к $x_n(t)$, а интенсивность передачи определяется параметрами α_i, ε_i, u_m^i.

Предложенные законы обратной связи, реализующие движение замкнутой системы в соответствии с уравнениями (7), как утверждают их разработчики, придают системам управления не только свойство квазиоптимальности по быстродействию, но и свойства робастности, асимптотической устойчивости в целом и отличаются относительно простой структурой в сравнении со строго оптимальными управлениями. Отмеченные свойства исследуемых систем, на наш взгляд, в основном определяются гладкостью функций управления и, соответственно, будут присущи системам, синтезируемым предлагаемым далее методом.

В работах другого направления — работах профессора В. В. Суркова и его коллег [13—15] — при конструировании быстродействующих систем также отказались от определения разрывной функции Беллмана, а на каждом интервале управления находят непрерывную на нем функцию переключения $\psi_i(X)$, и найденные функции в дальнейшем сопрягаются в единую функцию переключения $\psi(X)$ оптимальной релейной системы управления. В основе предложенного в этих работах метода синтеза лежит теорема об интервалах управления [13, 14], которая при определенных условиях утверждает, что для оптимального по быстродействию управления нелинейным объектом (1) n-го порядка необходимо и достаточно не более n интервалов управлений вида $u_i = -\text{sign}(\psi_i(X))$. Эта теорему можно рассматривать как развитие и уточнение теоремы А. А. Фельдбаума [1—3] о n интервалах постоянства значений управления на нелинейные объекты. В работах указанного направления, в отличие от А. А. Фельдбаума, за интервал управления принимается промежуток времени, в течение которого изображающая точка движения объекта переходит на новую субповерхность переключения $\psi_i(X) = 0$, принадлежащую (вложенную) поверхности $\psi(X) = 0$. Подчеркнем, что понимаемый таким образом интервал управления может содержать, например для осциллирующих объектов, несколько интервалов постоянства значений управления ($u = +1$ или $u = -1$) — интервалов А. А. Фельдбаума. При этом каждая непрерывная функция $\psi_i(X)$, $i = 1, 2, ..., n$, находится решением соответствующего уравнения в частных производных первого порядка, составляемого с использованием основного функционального уравнения метода [13, 14]. Данный точный метод решения задач быстродействия сопряжен с большим объемом вычислений, связанных с необходимостью решения n уравнений в частных производных и дальнейшим сопряжением найденных решений.

В данной работе предлагается метод синтеза квазиоптимальных по быстродействию систем управления, исключающий необходимость решения большого числа указанных уравнений в частных производных и обеспечивающий обоснованное применение процедуры динамического программирования за счет видоизменения критерия быстродействия включением слагаемого $ru^2(t)$, ограничивающего энергию сигнала управления:

$$I_1 = \int_0^T (1 + ru^2(t))dt \to \min, \; r > 0. \quad (8)$$

Данный критерий при $r \to 0$ приближается к исходному функционалу (2), и его использование при достаточно малом значении параметра r позволяет определять квазиоптимальные по быстродействию управления.

Применение метода динамического программирования к задаче управления (1), (8) позволяет найти оптимальное управление

$$u(X) = -\text{sat}\left[\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} b_i[X(t)]\right], \quad (9)$$

в котором стандартная функция $y(x) = \text{sat}(x)$ определяется выражением

$$y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 1, \\ x, \text{ если } |x| \leqslant 1, \\ -1, \text{ если } x < -1. \end{cases}$$

В управлении (9) функция Беллмана в области линейности функции sat удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} \cdot a_i(X) - \frac{1}{4r}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} \cdot b_i(X)\right)^2 = -q$$
$$(q = 1). \quad (10)$$

Данное уравнение в отличие от уравнения (5), соответствующего строгой задаче быстродействия, имеет квадратичную нелинейность, дифференцируемую при любом значении аргумента. Это обеспечивает для объектов (1) с полиномиальными (дробно-рациональными) нелинейностями существование дифференцируемой функции Беллмана $S(X)$ в фазовом пространстве объекта. Последнее утверждение вытекает из известной теоремы Коши—Ковалевской [18], которая устанавливает существование единственного аналитического решения для аналитических дифференциальных уравнений в частных производных, т. е. для уравнений, в которых функции $a_i(X)$, $b_i(X)$ представляются степенными рядами, сходящимися в определенных областях. Очевидно, вывод теоремы справедлив и для уравнений с полиномиальными функциями, являющимися частным случаем аналитических. Указанная теорема определяет надежный теоретический фундамент предлагаемого подхода к конструированию быстродействующих систем управления, состоящего, в отличие от работ [13—15], в нахождении решения одного уравнения в частных производных (10), с последующим определением искомой обратной связи по выражению (9).

В настоящее время практически единственным общим методом решения уравнений в частных производных является метод степенных рядов (МСР). В теории оптимального управления МСР наиболее разработан [19, 20] для синтеза систем, оптимальных по квадратичному функционалу качества и функционалам с полиномиальной положительно определенной функцией $Q(X)$:

$$I_2 = \int_0^T (Q(X) + ru^2(t))dt. \tag{11}$$

При конструировании систем управления объектами (1) по критерию (11) оптимальное управление описывается выражением (9), в котором функция Беллмана определяется как решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i}\alpha_i(X) - \frac{1}{4r}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(X)}{\partial x_i}b_i(X)\right)^2 = -Q(X). \tag{12}$$

Данное уравнение отличается от уравнения (10) только правой частью — вместо константы q стоит положительно определенная функция $Q(X)$.

Метод степенных рядов решения уравнения (12) основан на определении функции Беллмана в форме ряда

$$S(X) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j + \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}x_ix_jx_k + \\ + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ijkl}x_ix_jx_kx_l + \ldots$$

с искомыми коэффициентами A_{ij}, A_{ijk}, A_{ijkl}, причем полиномиальные функции $a_i(X)$, $b_i(X)$, $Q(X)$ уравнения представляются в аналогичном виде. Метод предполагает выполнение следующих процедур.

1. Подстановка в уравнение (12) функций $S(X)$, $a_i(X)$, $b_i(X)$, $Q(X)$ в форме полиномов, выполнение операций перемножения и суммирования полиномов в целях приведения левой части (12) к результирующему полиному.

2. Составление системы алгебраических уравнений для определения искомых параметров A_{ij}, A_{ijk}, A_{ijkl} приравниванием коэффициентов при одинаковых произведениях координат объекта в левой и правой частях уравнения (12).

3. Решение полученной системы алгебраических уравнений, которая распадается на независимые подсистемы для коэффициентов A_{ij} при квадратичных членах функции Ляпунова, для коэффициентов A_{ijk} при кубических членах и т. д. Отметим, что число уравнений в указанных подсистемах совпадает с числом неизвестных, а уравнения для коэффициентов членов функции Беллмана третьей и выше степеней являются линейными и, как правило, имеют однозначные решения.

Однако данный стандартный МСР неприменим к уравнению (10), так как его правая часть не является отрицательно определенной функцией, равной нулю в начале координат. Чтобы иметь возможность использовать данный метод, необходимо приблизить единичную функцию критерия быстродействия $f1(X) = 1$ в заданной области фазового пространства X положительно определенной функцией, например, в форме полинома.

В связи с этим в данной работе предполагается исследовать способы задания функции $Q(X)$ в функционале качества (11), связанные с аппроксимациями выражения $f1(X) = 1$, которые обеспечили бы приближение свойств систем управления объектами (1), синтезированных по критерию (11), к свойствам систем, оптимальных по критерию (8). Разработка четких рекомендаций по заданию функции $Q(X)$ превратит предложенный подход конструирования в обоснованный метод синтеза квазиоптимальных по быстродействию систем.

2. Метод синтеза квазиоптимальных систем управления

2.1. Аппроксимации функции критерия. При выборе положительно определенной функции $Q(X)$ функционала (11) необходимо учитывать два основных требования, обеспечивающих близость решений указанных задач управления: 1) данная функция должна быть как можно ближе к функции $f1(X) = 1$ во всем фазовом пространстве X объекта за исключением точки $X = 0$, в которой $Q(0) = 0$ (это обеспечивает повышение быстродействия системы); 2) функция $Q(X)$ должна иметь соответствующую структуру, обеспечивающую возможность применения стандартного метода степенных рядов в решении задачи АКОР.

Второе требование непосредственно выделяет два класса функций, в которых следует искать зависимость $Q(X)$: 1) класс полиномов и 2) класс дробно-рациональных функций. Именно эти функции позволяют применить описанный метод степенных рядов в исследуемой задаче управления.

В соответствии с результатами работы [21] для объектов, имеющих канонический базис

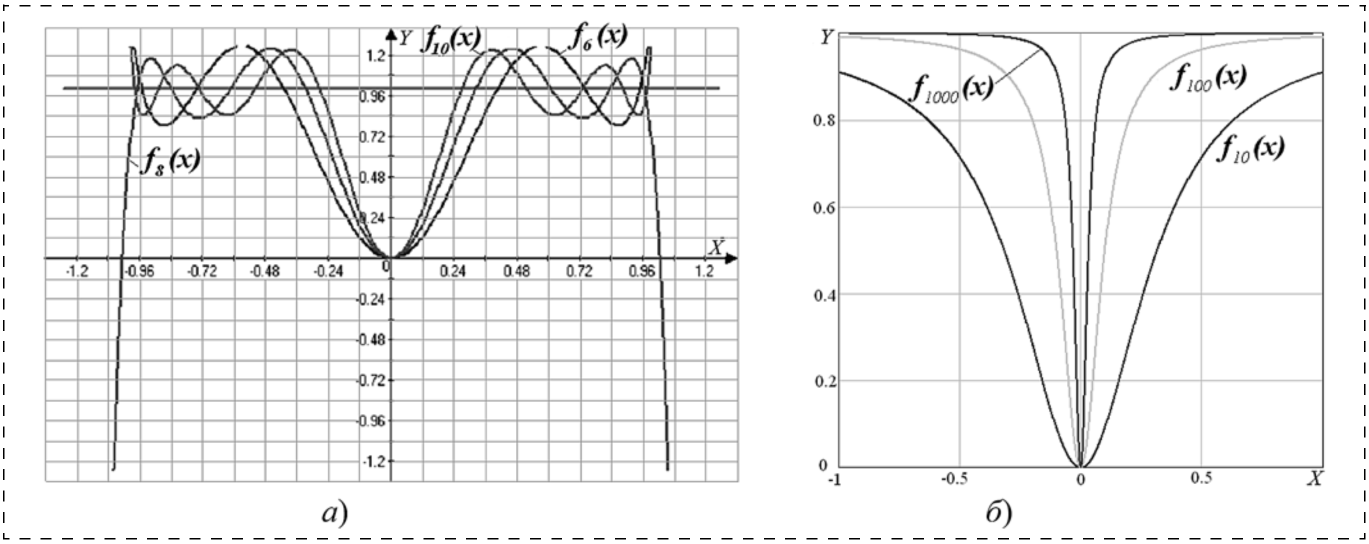

Рис. 1. Аппроксимации функции $f1(X) = 1$:
а — полиномиальная степеней 6, 8, 10; *б* — дробно-рациональная с a = 10, 100, 1000

$X = (x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)})^{\mathrm{T}}$, функцию $Q(X)$ целесообразно задавать как функцию одной выходной переменной объекта $Q(X) = Q(x_1)$. В указанной работе для линейных объектов утверждается, что введение в квадратичный критерий составляющих $q_i x_i^2(t)$, $i = 2, 3, ..., n$, увеличивает время переходных процессов в оптимальной системе, так как это приводит к ограничению значений скорости, ускорения и т. д. выходной переменной. Если теперь учесть, что $f1(x_1) = 1$ является четной функцией своего аргумента, то приходим к выводу о необходимости искать функцию $Q(x_1)$ в структуре полинома

$$Q(x_1) = a_1 x_1^2 + a_2 x_1^4 + a_3 x_1^6 + ... \tag{13}$$

или дробно-рациональной функции

$$Q(x_1) = \frac{a_1 x_1^2 + a_2 x_1^4 + a_3 x_1^6 + \ldots}{1 + b_1 x_1^2 + b_2 x_1^4 + b_3 x_1^6 + \ldots} \tag{14}$$

с коэффициентами a_i, b_i, $i = 1, 2, 3, ...$.

Относительно просто коэффициенты полиномиальной аппроксимации (13) рассчитываются методом наименьших квадратов (МНК) [18], в котором искомые коэффициенты определяются из условий минимума среднеквадратичной ошибки аппроксимации

$$J = \int_{-d}^{d} \left(1 - \sum_{i=1}^{m} a_i x^{2i}\right)^2 dx,$$

т. е. решением системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{d^{2i}}{2(i+k)+1} a_i = \frac{1}{2k+1}, \; k = 1, 2, ..., m, \tag{15}$$

где $[-d, d]$ — рассматриваемый интервал определения функции.

Полиномиальные аппроксимации, построенные с использованием уравнений (15), с увеличением порядка довольно медленно приближаются к функции $f1(X) = 1$, причем только на принятом интервале аппроксимации; за пределами этого интервала аппроксимирующие функции неограниченно увеличиваются по модулю (рис. 1, *а*). Поведение же дробно-рациональных функций (14) принципиально иное. Например, простейшая дробно-рациональная аппроксимация

$$Q_1(x_1) = \frac{a x_1^2}{1 + a x_1^2} \tag{16}$$

при больших значениях аргумента практически совпадает с единицей, асимптотически приближаясь к ней (рис. 1, *б*). Поэтому она при определенных значениях параметра a обеспечивает меньшую среднеквадратическую ошибку приближения, чем полином восьмой степени, коэффициенты которого рассчитаны с помощью МНК.

По указанным причинам при решении задачи управления (1), (2) рекомендуется использовать, как правило, дробно-рациональные аппроксимации и, в частности, (16). Параметр a функции (16) можно также определить методом наименьших квадратов. Однако поскольку величина a в основном влияет на скорость монотонного приближения функции к единице и, соответственно, на величину интервала, в котором она существенно, например, более чем на 5 %, отличается от единицы, то значение a можно рассчитать из других соображений. Так, например, значение a целесообразно выбирать непосредственно в процессе синтеза (моделирования).

Заметим, что функция (16) пропорциональна квадрату функции Нейдорфа (6), что свидетельствует об идейной связи предлагаемого метода синтеза с методологией работ [10—12].

2.2. Этапы метода синтеза. Подытоживая вышеизложенное, сформулируем основные этапы предлагаемого метода синтеза квазиоптимальных по быстродействию систем.

1. Задаем в соответствии с рекомендациями раздела 2.1 положительно определенную функцию $Q(x_1)$ критерия (11) в форме полинома (13) или дробно-рациональной функции (14) (последнее часто предпочтительнее с точки зрения точности и, возможно, объема вычислений).

2. Определяем функцию Беллмана для задачи АКОР (1), (11) как решение уравнения ГЯБ вида (12) стандартным методом степенных рядов.

3. Определяем по формуле (9) квазиоптимальное управление.

4. При моделировании синтезированной системы управления уточняем значение параметра r критерия качества: значение r постепенно уменьшается до момента достижения системой максимального быстродействия с допустимым перерегулированием.

Если используется аппроксимация (16), то указанная процедура осуществляется совместно с уточнением значение параметра a аппроксимации для приближения к той же цели — увеличения быстродействия системы при требуемом перерегулировании.

5. Если желаемого быстродействия синтезируемой системы не удается достичь, то увеличивается степень полинома, аппроксимирующего функцию Беллмана, и/или изменяется аппроксимация функции $Q(x_1)$ критерия и далее этапы 2—5 повторяются.

6. На заключительном этапе оценивается точность решения задачи управления, определяемая величиной $[S(X_0) - J(X_0)]/S(X_0)$, где $J(X_0)$ — значение функционала (11), вычисленное на траектории движения синтезированной системы из начального состояния X_0 до конечного $X = 0$. Если она не устраивает проектировщика, то пп. 1—6 повторяются при повышенной точности аппроксимации функций $Q(x_1)$, $S(X_0)$.

Подчеркнем, что анализ результатов синтеза по пп. 5 и 6, как правило, выполняется одновременно.

2.3. Анализ работоспособности метода синтеза. Применим данный метод к решению задачи быстродействия для простейшего объекта второго порядка

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = u(t),\ |u(t)| \leqslant 1, \tag{17}$$

для которого известен оптимальный по быстродействию закон управления [1, 2]

$$u(X) = -\mathrm{sign}(x_1 + 0{,}5x_2|x_2|). \tag{18}$$

В дальнейшем сравнение управления (18) с управлением, найденным с применением предложенного метода синтеза, позволит сделать определенные выводы о работоспособности и особенностях исследуемого метода.

2.3.1. Применение метода при полиномиальной аппроксимации функций. Предположим, что проектировщика СУ интересует движение объекта (17) при изменении координаты x_1 в интервале $[-2.5, 2.5]$.

В соответствии с изложенным методом квазиоптимальное по быстродействию управление объектом (17) находим по выражению

$$u(X) = -\mathrm{sat}\left[\frac{1}{2r}\cdot\frac{\partial S(X)}{\partial x_2}\right], \tag{19}$$

в котором функция Беллмана $S(X)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial S(X)}{\partial x_1}x_2 - \beta\left(\frac{\partial S(X)}{\partial x_2}\right)^2 = -\alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_1^4 - \alpha_3 x_1^6, \tag{20}$$

где $\beta = 1/4r$, $\alpha_1 = 1{,}440$, $\alpha_2 = -0{,}507$, $\alpha_3 = 0{,}0502$ (параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ найдены решением уравнений (15)).

Уравнение (20) решаем методом степенных рядов

$$S(X) = A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{111}x_1^3 + \\ + A_{112}x_1^2x_2 + A_{122}x_1x_2^2 + A_{222}x_2^3 \dots .$$

Подставляем этот ряд в уравнение (20):

$$(2A_{11}x_1 + 2A_{12}x_2 + \dots)x_2 - \beta(2A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + \dots)^2 = \\ = -\alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_1^4 - \alpha_3 x_1^6. \tag{21}$$

Приравниванием коэффициентов при квадратичных слагаемых уравнения (21) получаем систему уравнений

$$x_1^2\colon -4\beta A_{12}^2 = \alpha_1,\ x_1x_1\colon 2A_{11} - 8\beta A_{12}A_{22} = 0, \\ x_2^2\colon 2A_{12} - 4\beta A_{22}^2 = 0.$$

Ее решением определяем искомые коэффициенты при квадратичных членах функции Беллмана:

$$A_{12} = 0{,}5\sqrt{\alpha_1/\beta},\ A_{22} = \sqrt{A_{12}/2\beta},\ A_{11} = 2\beta A_{12}A_{22}.$$

Для указанных исходных параметров задачи управления $d = 2{,}5$, $r = 0{,}1$ эти коэффициенты принимают значения $A_{11} = 1{,}045$, $A_{12} = 0{,}379$, $A_{22} = 0{,}275$.

Соответственно, приравниванием коэффициентов при слагаемых уравнения (21) третьей степени получаем систему однородных уравнений (их правые части равны нулю). Так как матрица параметров этой системы линейных уравнений является невырожденной, то получаем $A_{111} = A_{112} = A_{122} = A_{222} = 0$. Аналогичным образом устанавливаем, что $A_{11111} = A_{11112} = A_{11122} = A_{11222} = A_{12222} = A_{22222} = 0$, и последующие коэффициенты функции Беллмана при членах полинома нечетной степени также равны нулю.

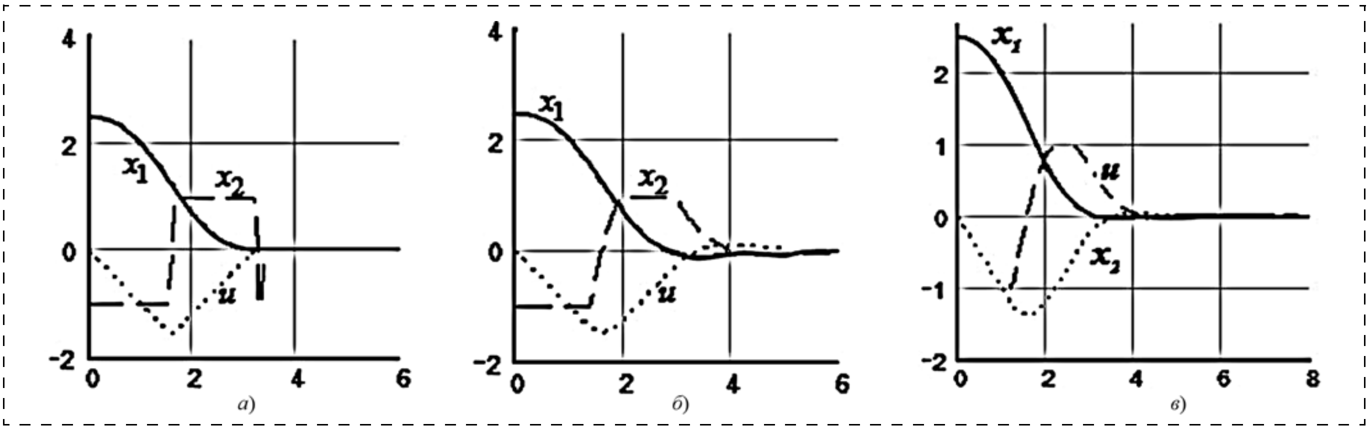

Рис. 2. Переходные процессы в оптимальной и квазиоптимальных системах:
а — управление (18) — $t_{\text{п.п}}$ = 3,16 с; *б* — управление (22) — $t_{\text{п.п}} \approx$ 4,0 с; *в* — управление (26) — $t_{\text{п.п}} \approx$ 3,3 с

Приравниванием коэффициентов при слагаемых уравнения (21) четвертой степени получаем систему уравнений

$$x_1^4: -4\beta A_{12}A_{1112} = -\alpha_2,$$

$$x_1^3 x_2^2: 4A_{1111} - \beta(8A_{12}A_{1122} + 4A_{22}A_{1112}) = 0,$$

$$x_1^2 x_2^2: 3A_{1112} - \beta(12A_{12}A_{1222} + 8A_{22}A_{1122}) = 0,$$

$$x_1 x_2^3: 2A_{1122} - \beta(16A_{12}A_{2222} + 12A_{22}A_{1222}) = 0,$$

$$x_2^4: A_{1222} - 16\beta A_{22}A_{2222} = 0.$$

Численным решением данной системы линейных алгебраических уравнений находим значения коэффициентов $A_{1112} = -0{,}134$, $A_{1122} = -0{,}0386$, $A_{1222} = -0{,}0165$, $A_{2222} = -0{,}0015$ функции Беллмана.

Аналогичным образом, численным решением системы уравнений, полученной приравниванием коэффициентов при слагаемых уравнения (21) шестой степени, находим значения коэффициентов $A_{111112} = 0{,}0132$, $A_{111122} = 3{,}43 \cdot 10^{-3}$, $A_{111222} = 4{,}15 \cdot 10^{-3}$, $A_{112222} = -4{,}814 \cdot 10^{-8}$, $A_{122222} = -1{,}398 \cdot 10^{-8}$, $A_{222222} = -8{,}458 \cdot 10^{-10}$ искомой функции Беллмана и, соответственно, управления

$$u(X) = -\text{sat}\left[\frac{1}{2r}(A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + A_{1112}x_1^3 + \ldots + A_{222222}x_2^5)\right]. \quad (22)$$

Квазиоптимальные системы управления объектом (17) с законами обратной связи $u_1(X)$, $u_3(X)$, $u_5(X)$, получаемыми из соотношения (22), соответственно, удержанием только линейных слагаемых, только слагаемых до третьей степени и только слагаемых до пятой степени, были промоделированы с использованием математического пакета MathCAD. Отдельные переходные процессы перевода объекта их начального состояния $X_0 = (2.5,\ 0)^{\text{т}}$ в конечное нулевое состояние представлены на графиках рис. 2. При моделировании систем управления значение параметра r = 0,1 было выбрано из условия наилучшего приближения переходных процессов системы с законом $u_5(X)$ к оптимальным процессам. Однако быстродействие данной системы $t_{\text{п.п}} \approx$ 4 с (рис. 2, *б*) существенно отличается от оптимального $t^*_{\text{п.п}}$ = 3,16 с, и переходной процесс имеет перерегулирование.

Подчеркнем, что система управления с законом $u_3(X)$ оказалась неработоспособной — неустойчивой, и поэтому ее переходные процессы не указаны на рис. 2. Явление неустойчивости системы с управлением $u_3(X)$ в отличии управлений $u_1(X)$, $u_5(X)$ можно объяснить тем, что используемая при синтезе управления $u_3(X)$ функция $f_3(x) = (65/3)x^2 - 130x^4$, аппроксимирующая $f1(x) = 1$, в отличие от функций $f_1(x) = (65/3)x_2$ и $f_5(x) = (65/3)x^2 - 130x^4 + (2210/7)x^6$, при больших значениях аргумента функция не является положительно определенной из-за отрицательности слагаемого с наибольшей используемой степенью, что нарушает условия теоремы устойчивости Ляпунова [20].

Обобщим и уточним отмеченный факт о неустойчивости некоторых систем управления, синтезируемых предлагаемым методом. С использованием системы уравнений (15) в общем случае получается аппроксимация функции $f1(X) = 1$ в форме полинома

$$f_m(x) = C_1x^2 - C_2x^4 + C_3x^6 - C_4x^8 + \ldots + C_mx^{2m} = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_kx^{2k}, \quad (23)$$

причем, что принципиально важно, с положительными коэффициентами C_k. Предположим, что при синтезе квазиоптимального регулятора мы ограничиваемся определением полиномиальной функции Беллмана (она же является функцией Ляпунова для синтезируемой системы), содержащей члены с наибольшей степенью $N_s = 2k$. Если значение k — четное, то согласно (23) коэффициент $(-1)^{k-1}C_k$ будет отрицательным, т. е. функция (23), а соответственно и функция Беллмана как решение уравнения ГЯБ (12), не являются положительно определенными в области больших отклонений системы, а сама система управления, согласно теореме Ляпунова, неустойчивой в этой области. Таким образом, доказано ***утверждение:*** для обеспечения устойчивости системы, синтезируемой предложенным методом, необходимо задавать максимальное значение степени $N_s = 2k$ слагаемых полиномиальной функции Беллмана, соответствующее нечетному значению k, т. е. устойчивость обеспечивается управлениями $u_1(X)$, $u_5(X)$, $u_9(X)$, ..., $u_{2k-1}(X)$.

Это утверждение, исключающее из рассмотрения половину неудовлетворительных управлений, имеет важное прикладное значение.

2.3.2. Применение метода при дробно-рациональной аппроксимации функций. Существенно более высокое качество системы управления было получено при использовании представления единичной функции критерия быстродействия выражением

$$Q_2(x_1) = (bx_1^2 + a^2x_1^4)/(1 + ax_1^2)^2 \qquad (24)$$

с параметрами $a = 25$, $b = 55{,}5$ и аппроксимации функции Беллмана также дробно-рациональным выражением

$$S(X) = A(X)/(1 + ax_1^2), \qquad (25)$$

где $A(X)$ — искомый полином:

$$A(X) = A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{1111}x_1^4 + $$
$$+ A_{1112}x_1^3x_2 + A_{1122}x_1^2x_2^2 + A_{1122}x_1x_2^3 + \ldots .$$

Его коэффициенты при $r = 1{,}55$ были найдены методом степенных рядов: $A_{11} = 32{,}086$, $A_{12} = 18{,}55$, $A_{22} = 5{,}362$, $A_{1111} = 165{,}128$, $A_{1112} = 104{,}448$, $A_{1122} = 24{,}5$, $A_{1222} = -18{,}014$, $A_{2222} = -1{,}302$.

Согласно уравнениям (19), (24), (25) искомый закон обратной связи принимает вид

$$u_3(X) =$$
$$= -\mathrm{sat}\left[\frac{A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + A_{1112}x_1^3 + 2A_{1112}x_1^2x_2 + 3A_{1122}x_1x_2^2 + 4A_{1111}x_2^3}{2r(1 + ax_1^2)}\right]. \qquad (26)$$

Данный алгоритм управления по структуре является более простым в сравнении с алгоритмом (22): число полиномиальных слагаемых в управлении (26) в два раза меньше (5 в отличие от 10). В то же время он является и более близким к оптимальному: длительность переходного процесса по координате x_1 согласно рис. 2, *в* приблизительно равна $t_{\text{п.п}} = 3{,}3$ с и близко к оптимальному значению $t_{\text{п.п}}^* = 3{,}16$ с. В связи с этим управление (26) более перспективно для практического использования.

Отметим, что предложенный вариант метода синтеза с использованием дробно-рациональных функций (24), (25), показавший свою работоспособность в решении задачи быстродействия второго порядка, был также протестирован в решении задач третьего порядка. Так, например, с использованием описанного варианта метода синтеза для объекта с тройным интегрированием (единичные параметры) при значениях $a = 25$, $b = 2{,}22a$, $r = 3$ был получен следующий закон управления:

$$u(X) = \mathrm{sat}\left(\frac{1}{1 + 25x_1^2}\{0{,}7093x_3^3 + 6{,}9212x_3^2x_2 + \right.$$
$$+ 7{,}8529x_1x_3^2 + 109{,}8462x_1x_2^2 + 23{,}6460x_3x_2^2 +$$
$$+ 28{,}309x_2^3 + 57{,}1858x_1x_3x_2 + 0{,}1667[(19{,}515 +$$
$$+ 262{,}192x_1^2)x_3 + (143{,}302x_1^2 - 31{,}737)x_2] -$$
$$\left. - 0{,}1667(145{,}3095x_1^2 + 25{,}8070)x_1\}\right) \qquad (27)$$

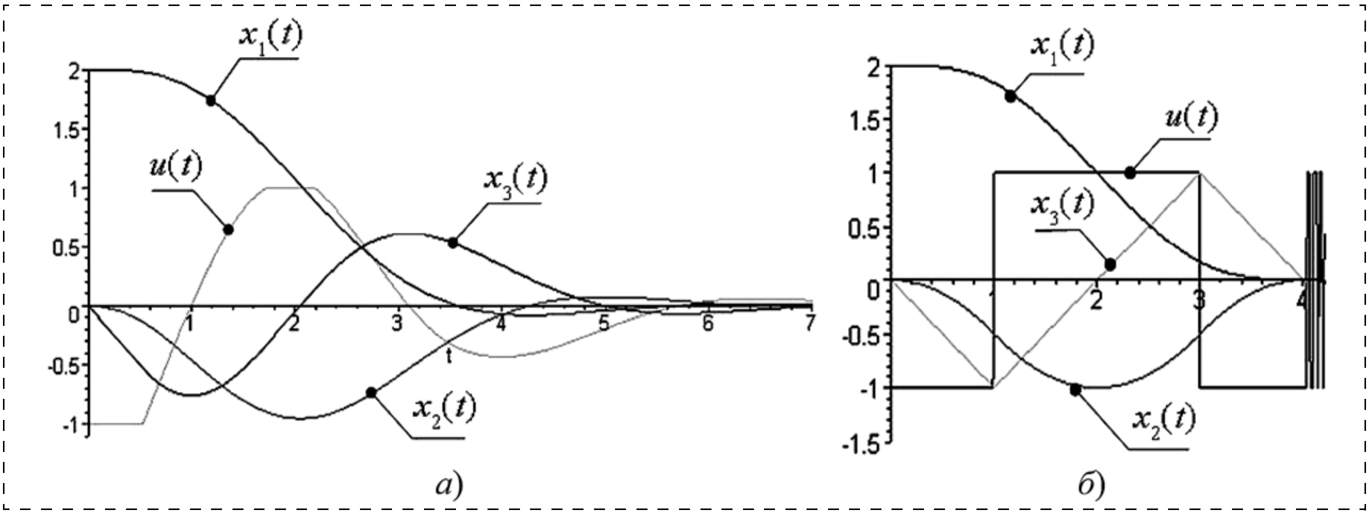

Рис. 3. Переходные процессы систем управления третьего порядка:
а — квазиоптимальное управление (27); *б* — оптимальное управление [3]

(числитель функции Беллмана (25) определялся в виде полинома 4-й степени).

Результаты моделирования квазиоптимальной и оптимальной систем приведены на рис. 3.

Как видно из представленных графиков, переходный процесс в квазиоптимальной системе имеет большую длительность и перерегулирование. Однако, если длительность процессов в системе измерять по координате $x_1(t)$ и пренебречь перерегулированием по этой координате, то получим $t_{\text{п.п}} \approx 4$ с, т. е. значение, близкое к строго оптимальному. При этом подчеркнем, что сложность структуры закона управления (27), оцениваемая числом используемых математических операций, приблизительно эквивалентна сложности строго оптимального управления [3].

Необходимо также отметить, что в задачах оптимального быстродействия очень остро стоит проблема порядка объекта, связанная со стремительным ростом объема вычислений в определении поверхности переключения оптимального релейного регулятора при увеличении порядка объекта управления. Хотя в данной работе приведены примеры применения предложенного метода синтеза квазиоптимальных регуляторов для объектов не выше третьего порядка, но важно указать, что теория синтеза формально применима для объектов произвольного порядка с указанными полиномиальными и дробно-рациональными нелинейностями, причем метод синтеза допускает относительно простую алгоритмизацию с использованием современных систем компьютерной математики. Так, например, в математической среде Maple с приемлемой точностью и за приемлемое время был синтезирован квазиоптимальный регулятор для объекта шестого порядка.

Заключение

В работе разработан и строго обоснован метод синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для объектов высокого (n) порядка с полиномиальными и дробно-рациональными нелинейностями, имеющий следующие принципиальные особенности: 1) представление единичной функции критерия быстродействия положительно определенными полиномиальными или дробно-рациональными функциями обеспечивает гладкость функции Беллмана и применимость метода динамического программирования к решению исследуемой задачи быстродействия при значительном уменьшении объема вычислений (для объекта n-го порядка в n раз); 2) закон управления определяется в форме дробно-рационального выражения от координат объекта, что в сравнении с методом степенных рядов А. А. Красовского существенно увеличивает точность приближения к строго оптимальному управлению при одинаковом числе параметров; 3) метод синтеза, имеющий итерационный характер, допускает относительно простую алгоритмизацию; 4) метод применим для решения как задач быстродействия, так и задач энергосберегающего управления; 5) получаемое непрерывное, нерелейное управление исключает скользящие и автоколебательные режимы работы, которые нежелательны для исследуемых объектов.

Список литературы

1. **Павлов А. А.** Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966. 390 с.
2. **Атанс М., Фалб П. Л.** Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. **Техническая** кибернетика. Теория автоматического управления. Кн. 3. Ч. II. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / Под ред. проф. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.
4. **Антомонов Ю. Г.** Синтез оптимальных систем. Киев: Наукова думка, 1972. 320 с.
5. **Иванов В. А., Фалдин Н. В.** Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
6. **Фалдин Н. В.** Синтез оптимальных по быстродействию замкнутых систем управления. Тула: ТулГУ, 1990. 100 с.
7. **Клюев А. С., Колесников А. А.** Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
8. **Колесников А. А., Гельфгат А. Г.** Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. М.: Энергоатомиздат, 1993. 304 с.
9. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3—9.
10. **Нейдорф Р. А.** Нелинейное ускорение динамических процессов управления объектами первого порядка с учетом ограниченности воздействий // Вестник ДГТУ. Управление и диагностика в динамических системах. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 1999. С. 13—21.
11. **Нейдорф Р. А., Чан Н. Н.** Рекуррентно-диффеоморфный синтез квазиоптимальных по быстродействию ограниченных законов управления // Информатика и системы управления. 2006. № 2. С. 119—128.
12. **Чан Нгуен Нгок.** Синтез законов квазиоптимального по быстродействию управления объектами высокого порядка: дис. ... кан. техн. наук. Ростов-на-Дону, 2007. 212 с.
13. **Сурков А. В., Сухинин Б. В., Сурков В. В.** Количество интервалов управления оптимальных по быстродействию систем // Изв. ТулГУ. Сер. Технические науки. ТулГУ. 2010. № 1. С. 138—148.
14. **Соловьев А. Э., Сухинин Б. В., Сурков В. В.** Синтез оптимальных по быстродействию систем на основе теоремы об интервалах управлений // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2010. № 2. С. 57—63.
15. **Соловьев А. Э.** Частные случаи решения задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Изв. ТулГУ. Сер. Вычислительная техника. Информационные технологии. Системы управления. Вып. 3. Системы управления. Т. 2. ТулГУ. 2006. С. 173—176.
16. **Ловчаков В. И.** Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3—5.
17. **Ванько В. И.** Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 488 с.
18. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
19. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
20. **Современная** прикладная теория управления. Т. 1. Оптимизационный подход в теории управления / Под ред. А. А. Колесникова. М.: ООО "ИСПО-Сервис", 2000. 408 с.
21. **Садовой А. В., Сухинин Б. В., Сохина Ю. В.** Системы оптимального управления прецизионными электроприводами. Киев: ИСИМО, 1996. 298 с.

Synthesis of Fast-Acting Control Systems using the Theory of Analytical Design of Optimal Controllers

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru✉, Tula State University, department of electrical engineering and equipment,
E. V. Lovchakov, spartannez@rambler.ru, "Service-Soft LLC", Tula,
E. I. Kretov, neitworld@ya.ru, Tula State University, department of electrical engineering and equipment

Corresponding author: **Lovchakov Vladimir I.,** D.Sc., Professor,
Tula State University, department of electrical engineering and equipment,
e-mail: Iovvi50@mail.ru

Received on May 25, 2015
Accepted on June 15, 2015

The method for synthesis of closed loop quasi-time-optimal high-order (n-order) control systems is developed for a wide class of objects with polynomial and rational nonlinearities. This method is based on the transition from the problem of time-optimal control to the corresponding problem of analytical design of an optimal controller for the considered object using the specifically given performance index. Well-known A. A. Krasovsky's power series method is modified to solve the latter problem, that allows to obtain the sequence of approximations to the optimal control with increasing accuracy. The proposed synthesis method has the following principal features: 1) the representation of the unit function in the time-optimal criterion by a positively defined polynomial or rational function, that ensures the smoothness of a Bellman function and applicability of the dynamic programming method to the solution of the time-optimal control problem with a significantly lower amount of computations (n times reduction for a n-th order object); 2) the control law is defined in the form of a rational expression of object coordinates, that significantly increases accuracy of optimal control approximation in comparison with A. A. Krasovsky 's method under the same number of parameters; 3) the synthesis method has an iterative character and allows a relatively simple implementation; 4) the method is applicable for solution of both problems of time-optimal and energy-saving control design; 5) the obtained control is continuous, not relay one, which eliminates sliding and oscillatory modes that are undesirable for considered objects.

Keywords: *nonlinear object, time-optimal criterion, smooth Bellman function, analytical design of optimal controllers*

For citation:

Lovchakov V. I., Lovchakov E. V., Kretov E. I. Synthesis of Fast-Acting Control Systems using the Theory of Analytical Design of Optimal Controllers, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 2, pp. 84—93.

DOI: 10.17587/mau/17.84-93

References

1. **Pavlov A. A.** *Sintez relejnyh sistem, optimal'nyh po bystrodejstviju* (Synthesis of relay time optional systems), Moscow, Nauka, 1966, 390 p. (in Russian).
2. **Atans M., Falb P. L.** *Optimal'noe upravlenie* (Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications), Moscow, Mashinostroenie, 1968, 764 p. (in Russian).
3. **Solodovnikov V. V.** ed. *Tehnicheskaja kibernetika. Teorija avtomaticheskogo upravlenija. Kn. 3. Ch. II. Teorija nestacionarnyh, nelinejnyh i samonastraivajushhihsja sistem avtomaticheskogo regulirovanija* (Technical cybernetics. Theory of automatic control. Book 3. Part II. Theory of nonstationary, nonlinear, self-tuning systems of automatic control), Moscow, Mashinostroenie, 1969, 368 p. (in Russian).
4. **Antomonov Ju. G.** *Sintez optimal'nyh system* (Synthesis of optimal systems), Kiev, Naukova dumka, 1972, 320 p. (in Russian).
5. **Ivanov V. A., Faldin N. V.** *Teorija optimal'nyh sistem avtomaticheskogo upravlenija* (Theory of optimal automatic control systems), Moscow, Nauka, 1981, 336 p. (in Russian).
6. **Faldin N. V.** *Sintez optimal'nyh po bystrodejstviju zamknutyh sistem upravlenija* (Syntheis of time optimal closed-loop control systems), Tula, TulGU, 1990, 100 p. (in Russian).
7. **Kljuev A. S., Kolesnikov A. A.** *Optimizacija avtomaticheskih sistem upravlenija po bystrodejstviju* (Time optimization of automatic control systems), Moscow, Jenergoizdat, 1982, 240 p. (in Russian).
8. **Kolesnikov A. A., Gel'fgat A. G.** *Proektirovanie mnogokriterial'nyh sistem upravlenija promyshlennymi ob#ektami* (Design of multiobjective control systems for industrial objects), Moscow, Jenergoatomizdat, 1993, 304 p. (in Russian).
9. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Gibridnaja shema reshenija zadachi linejnogo bystrodejstvija na osnove formalizma polijedral'noj optimizacii* (Hybrid solution scheme for linear time optimization problem using polyhedral optimization formalism), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3—9 (in Russian).
10. **Nejdorf R. A.** *Nelinejnoe uskorenie dinamicheskih processov upravlenija ob#ektami pervogo porjadka s uchetom ogranichennosti vozdejstvij* (Nonlinear acceleration of dynamical control processes of 1st order objects utilizing influence boundness), *Vestnik DGTU. Upravlenie i Diagnostika v Dinamicheskih Sistemah*, 1999, pp. 13—21 (in Russian).
11. **Nejdorf R. A., Chan N. N.** *Rekurrentno-diffeomorfnyj sintez kvaziontimal'nyh po bystrodejstviju ogranichennyh zakonov upravlenija* (Recurrent-diffeomorphic synthesis of time-suboptimal bounded control laws), *Informatika i Sistemy Upravlenija,* 2006, no. 2, pp. 119—128 (in Russian).
12. **Chan Nguen Ngok.** *Sintez zakonov kvazioptimal'nogo po bystrodejstviju upravlenija ob#ektami vysokogo porjadka: dis. ... kan. tehn. nauk* (Synthesis of time-suboptimal control for second-order objects. Ph. D. thesis), Rostov-na-Donu, 2007, 212 p. (in Russian).
13. **Surkov A. V., Suhinin B. V., Surkov V. V.** *Kolichestvo intervalov upravlenija optimal'nyh po bystrodejstviju sistem* (Number of control intervals for time-optimal control systems), *Izv. TulGU. Ser. Tehnicheskie nauki. TulGU.* 2010, no. 1, pp. 138—148 (in Russian).
14. **Solov'ev A. Je., Suhinin B. V., Surkov V. V.** *Sintez optimal'nyh po bystrodejstviju sistem na osnove teoremy ob intervalah upravlenij* (Synthesis of time-optimal systems using theorem of control intervals), *Vesti Vysshih Uchebnyh Zavedenij Chernozem'ja*, 2010, no. 2, pp. 57—63 (in Russian).
15. **Solov'ev A. Je.** *Chastnye sluchai reshenija zadachi analiticheskogo konstruirovanija optimal'nyh reguljatorov* (Special solutions of problem of analytical construction of optimal regulators), *Izv. TulGU. Ser. Vychislitel'naja tehnika. Informacionnye tehnologii. Sistemy upravlenija Sistemy Upravlenija*, 2006, vol. 2, iss. 3, pp. 173—176 (in Russian).
16. **Lovchakov V. I.** *Funkcii perekljuchenija optimal'nogo po bystrodejstviju reguljatora dlja chetyrehkratnogo integratora* (Switching functions of time-optimal regulator for fourfold integrator), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 3—5 (in Russian).
17. **Van'ko V. I.** *Variacionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* (Variation calculus and optimal control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Baumana, 2006, 488 p. (in Russian).
18. **Bronshtejn I. N., Semendjaev K. A.** *Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vtuzov* (Handbook on mathematics for engineers and students), Moscow, Nauka, 1986, 544 p. (in Russian).
19. **Krasovskij A. A.** ed. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Handbook on theory of automatic control), Moscow, Nauka, 1987, 712 p. (in Russian).
20. **Kolesnikov A. A.** *Sovremennaja prikladnaja teorija upravlenija. T. 1. Optimizacionnyj podhod v teorii upravlenija* (Modern applied control theory), Moscow, OOO "ISPO-Servis", 2000, 408 p. (in Russian).
21. **Sadovoj A. V., Suhinin B. V., Sohina Ju. V.** *Sistemy optimal'nogo upravlenija precizionnymi jelektroprivodami* (Control systems for precision electrical drives), Kiev, ISIMO, 1996, 298 p. (in Russian).