УДК 519.7:681.31 DOI: 10.17587/mau.17.75-83

И. Ф. Чебурахин, д-р техн. наук, проф., logicifch@yandex.ru,
О. Н. Гавриш, аспирант, gavrish.o@gmail.com,
МАТИ — РГТУ имени К. Э. Циолковского

Уточнение оценок показателей сложности схем и автоматизация их эффективного применения

Исследуется задача реализации произвольной булевой функции в классе формул и схем из функциональных элементов в стандартном базисе и базисе Жегалкина. Предлагается конструктивный метод синтеза формул и схем на основе рекуррентных соотношений (функциональных уравнений), сопровождаемого получением заранее аналитических верхних оценок различных показателей сложности (по числу букв; числу подформул; по числу функциональных элементов; по глубине формулы и по глубине схемы), в том числе и для схем минимальной сложности. При необходимости уточнения верхних оценок сложности предлагается вычислительный алгоритм.

Ключевые слова: *булевы функции, синтез формул и схем, функционал, декомпозиция, сложность, минимизация, функциональные уравнения*

Введение

Одним из важнейших достижений науки и техники прошлого столетия явилось создание и широкое использование электронных вычислительных (цифровых) машин (ЭВМ). Понятно, что вопросы рационального проектирования таких машин привлекли внимание большого числа ученых и конструкторов. Появилась и стала успешно развиваться отрасль информационных (компьютерных) технологий, в задачи которых вошли: создание, развитие и эксплуатация информационных систем, в том числе различного типа преобразователей дискретной информации. Они называются дискретными, или цифровыми, автоматами. Для них простейшими математическими моделями являются булевы функции, привносящие в теорию и практику их реализации (в классах формул и схем из функциональных элементов) свои проблемы относительно сложности. Исследования сложности формул и схем ведутся в разных направлениях [1—7]: выбор базиса, метода, требований к показателям сложности—качества синтеза. При выборе базиса используются теорема о полноте системы булевых функций и теорема о двух системах, вследствие чего можно получать оценки сложности представления функций в других базисах [4, 8, 10, 12]. Точнее, с учетом свойств, в сформулированных двух теоремах о базисах, для каждого из них можно пересчитывать оценки сложности его представления через другой [4].

Особо важной является задача вывода оценки показателя сложности при представлении булевой функции в классах формул и схем. Например, для базиса G_1 и произвольной функции $f^{(n)}$ получена оценка сложности $L_A(n) \leqslant 2{,}25 \cdot 2^n - 4$, где A — специальный алгоритм, предназначенный для улучшения качества синтеза схем с меньшей трудоемкостью [4].

Для решения этой задачи в случае получения грубой оценки выбранного показателя сложности в работе применяется метод, основанный на функциональных уравнениях (рекуррентных соотношениях). Метод близок к применяемому ранее методу структурно-функциональной декомпозиции ("от функции", "от аргументов"). Если применяемый аналитический метод структурно-функциональной декомпозиции дает грубую оценку показателя сложности, то уточнение алгоритма для вычислительного метода позволяет ее улучшить [8—12].

Итак, рассматривается задача реализации булевых функций в классе формул и схем из функциональных элементов (ФЭ) в разных базисах. Получаемые при этом схемы применяются в дискретных логических устройствах обработки информации и управления, от сложности—качества которых зависят основные характеристики вычислительной и управляющей техники [1—5].

Используемые обозначения [8—12]:

$\lceil x \rceil$ — приближение числа x с избытком (наименьшее целое, не меньшее числа x); "&" или " $\cdot$ " — конъюнкция (точка — знак умножения — может также применяться для обозначения арифметического умножения).

Основные понятия

Пусть $f^{(n)}$ ($F^{(n)}$) — булева функция (формула), зависящая от n существенных переменных из мно-

жества $X = \{x_1, ..., x_n\}$ (обозначение функции и задающей ее формулы иногда совпадает, т. е. $F^{(n)}$ — это обозначение булевой функции и соответствующей формулы).

Под базисом G понимаем конечную функционально полную систему булевых функций. В теоретических исследованиях и приложениях для множества всех булевых функций часто рассматривают стандартный базис $G_1 = \{\&, \vee, \bar{\ }\}$ или базис Жегалкина $G_3 = \{\&, \oplus, 0, 1)$. При синтезе схем им соответствуют базисы из функциональных (логических) элементов (ФЭ). Считаем, что функция $f^{(n)}$ задается формулой $F^{(n)}$ в базисе G_3 или базисе G_1.

При представлении булевой функции $f^{(n)}$ суперпозиционной формулой $F^{(n)}_{\text{с.ф}}$ в определенном базисе применяются конструктивные операции [8—9]. В качестве меры сложности представления функции f формулой F или схемой S из ФЭ определяем соответствующие показатели (дискретные функционалы): $L_{\bar{0}}(f, G)$ — суммарное число вхождений символов переменных (букв) в формулу F; $L_F(f, G)$ — число базисных подформул в $F^{(n)}$; $L_S(f, G)$ — число ФЭ в схеме S; $\text{Dep}_F(f, G)$ — глубина формулы F; $\text{Dep}_S(f, G)$ — глубина схемы S, определяемая как наибольшее число ФЭ в цепочке среди всех цепочек, соединяющих вход с выходом.

По практическим соображениям показатели сложности (функционалы) минимизируем. При представлении булевых функций в классе формул (включая скобочные) для минимизации показателей сложности используются эквивалентные преобразования, а в классе схем для минимизации числа ФЭ дополнительно применяется ветвление некоторых их выходов [8—10].

Сложностью $L_S(f, G)$ функции f в классе схем S из ФЭ в базисе G называется минимальная сложность схемы S среди всех схем, реализующих f.

Декомпозиция, анализ и синтез логических моделей (формул и схем) на основе функциональных уравнений

Для минимизации показателей сложности синтеза формул список математических средств из теории булевых функций расширяется и используется в алгоритмах синтеза. Их удобно получать с помощью функциональных уравнений (ФУ) [9—12].

Определение 1. Пусть X — множество булевых переменных; $g^{(2)}$ — двухместная булева функция, задающая начальный член $f^{(2)}$ последовательности изучаемого класса функций $f^{(n)}(X)$, $n \geqslant 2$, и $h^{(2)}$ — функция рекурсии, входящие в базис G или представимые через базисные функции. Тогда рекуррентное соотношение, получаемое на основе операции суперпозиции,

$$f^{(n_1+n_2)}(X) = h(f^{(n_1)}(X_1), f^{(n_2)}(X_2)), \qquad (1)$$

где $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $n_1, n_2 \in N$, $n = n_1 + n_2$, назовем основным функциональным уравнением (ФУ), несмотря на частный характер местности функций $g^{(2)}$ и $h^{(2)}$. Данное определение ФУ отлично от приведенного в работах [6, 7].

Соотношение (1) применяется к аргументам функции h и так далее, позволяя получить суперпозиционную формулу $F^{(n)}_{\text{с.ф}}$, реализующую функцию $f^{(n)}$. Можно сказать, что ФУ представляет собой конструктивный метод построения булевых функций определенного класса на основе заданных с использованием соответствующего рекуррентного соотношения, а также разбиения данной функции в определенную композицию базисных функций.

На основе ФУ (1) предлагается в качестве примера следующая группа ФУ. При $n_1 = n - 1$, $n_2 = 1$ получаем ФУ типа 1:

$$f^{(n)} = h(f^{(n-1)}, x_n).$$

Для симметрических функций при $n = 2^s$, $s = 1, 2, ..., n_1 = n_2 = n/2$ получаем ФУ типа 2 (для параллельной декомпозиции):

$$f^{(n)}(X) = h(f^{(n/2)}(X_1), f^{(n/2)}(X_2)),$$

т. е. конечное n-множество аргументов разбивается пополам.

При $n_1 = n - 2$, $n_2 = 2$ это будет ФУ типа 3:

$$f^{(n)} = h^{(3)}(f^{(n-2)}, x_{n-1}, x_n),$$

где $h^{(3)}$ — трехместная булева функция.

Аналитический метод вывода верхних оценок сложности (базовый случай)

Применим метод ФУ для реализации произвольной булевой функции $f^{(n)} \in P_2$ формулой $F^{(n)}$ и получения при этом верхней оценки сложности L_F (в базисе G_3). Булева функция $f^{(n)}$ зависит от переменных из множества $X = \{x_1, ..., x_n\}$ и задается полиномом Жегалкина $F^{(n)} = K_1 \oplus ... \oplus K_i \oplus ... \oplus K_m$, где K_i — монотонная элементарная конъюнкция ранга r_i, причем $r_1 \geqslant ... \geqslant r_i \geqslant ... \geqslant r_m$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Такой полином Жегалкина называется каноническим, его элементарные конъюнкции расположены в соответствии с порядком "$\geqslant$". Вектор $\mathbf{r} = (r_1, ... r_i, ..., r_m)$ задает строение полинома Жегалкина. При этом определяем еще вектор $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_j, ..., p_n)$ повторяемости переменных из множества X в формуле $F^{(n)}$, т. е. переменная x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, повторяется в формуле $F^{(n)}$ p_j раз.

Находим j: $p_j = \max\limits_i (p_1, ..., p_i, ..., p_n)$. Тогда ФУ на основе набора методов (1) имеет вид

$$F^{(n)} = ((x_j \cdot F_0^{(n-1)}) \oplus F_1^{(n-1)}, \qquad (2)$$

где нижние индексы 0 и 1 — номера соответствующих остаточных функций, рассматриваемых на одном множестве $X' = X \backslash \{x_j\}$.

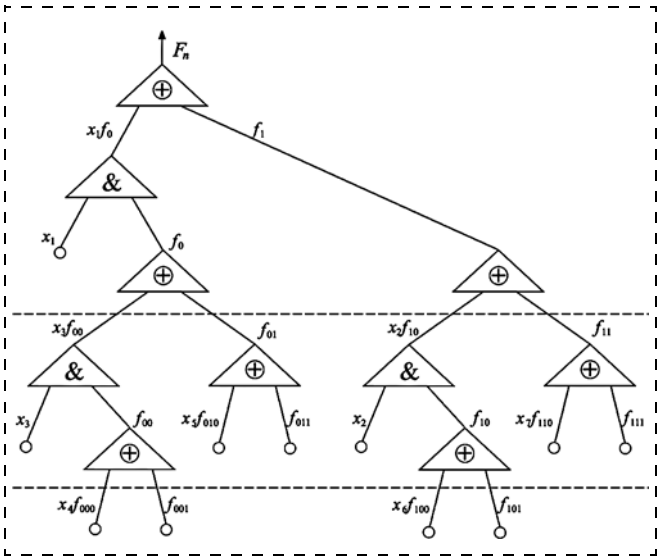

Рис. 1. Иллюстрация метода синтеза схемы на основе функциональных уравнений

Применяя к $F_0^{(n-1)}$ и $F_1^{(n-1)}$ ФУ (2) и так далее, получим суперпозиционную формулу $F_{\text{с.ф}}^{(n)}$. Каждое применение ФУ (2) порождает не более двух базисных функций из G_3 и не более двух остаточных функций $F_0^{(n-1)}$ и $F_1^{(n-1)}$. Используя последовательно ФУ (2) и суммируя оценки-значения сложности L_F, выводим верхнюю оценку сложности для общего случая:

$$\begin{aligned} L_F(F^{(n)}, G_3) &= [L_F(F_0) + L_F(F_1)] + 2 = \\ &= [L_F(F_{00}) + L_F(F_{01}) + L_F(F_{10}) + L_F(F_{11})] + 6 = \\ &= \ldots = \Sigma^*_j[(L_F(F_{0\ldots00}) + L_F(F_{0\ldots01}) + L_F(F_{0\ldots10}) + \\ &\quad + \ldots + L_F(F_{1\ldots11})] + 2\cdot(2^{j-1} - 1) \leqslant \\ &\leqslant 3\cdot 2^{n-2} + 2\cdot(2^{n-2} - 1) = \\ &= 5\cdot 2^{n-2} - 2 = (5/4)\cdot 2^n - 2, \end{aligned} \qquad (3)$$

т. е. $L_F(F^{(n)}, G_3) \leqslant (5/4)\cdot 2^n - 2$, где j — текущий номер шага декомпозиции (2) ($1 \leqslant j \leqslant n-2$); $\Sigma^*_j[(L_F(F_{0\ldots00}) + L_F(F_{0\ldots01}) + L_F(F_{0\ldots10}) + \ldots + L_F(F_{1\ldots11})]$ — суммирование значений показателя сложности по числу базисных функций, выполняемое для шага j, по всем остаточным функциям, число которых после каждого шага может удваиваться. На рис. 1 представлена иллюстрация метода (2).

Таким образом, исходная функция (и получаемые остаточные) $F^{(n)}$, в общем случае, разбивается на две более простые по сравнению с ней и две базисные (двухместные), соединяющие первые функции и выделяемую переменную x_i в одну формулу. Процесс продолжается, пока все остаточные функции таким образом (на основе декомпозиции) не перейдут в разряд реализованных. Так будет получена суперпозиционная формула $F_{\text{с.ф}}^{(n)}$ и оценка $L_F(F_{\text{с.ф}}^{(n)}, G_3)$. По формуле $F_{\text{с.ф}}^{(n)}$ изоморфным образом строится схема S без ветвления, не исключая возможности на следующем этапе синтеза устранить этот пробел.

Заметим, что вначале по мере выполнения алгоритма (2) число остаточных функций, как правило, удваивается, а сами функции упрощаются. При этом число базисных функций, соединяющих их в одну формулу, увеличивается. Обсуждаемый алгоритм на основе ФУ (2) относится к алгоритмам градиентного типа, он позволяет строить формулу $F_{\text{с.ф}}^{(n)}$, реализующую функцию $f^{(n)}$, возможно, с минимальным значением показателя L_F, за число шагов j, $1 \leqslant j < n$.

Рисунки, сопровождающие проектирование схем из ФЭ, помогают глубже осмысливать создаваемое и "оживляют" результат.

Рекуррентное соотношение (2) применяется для получения суперпозиционной формулы $F_{\text{с.ф}}^{(n)}$, а соотношение (3) — для получения соответствующей оценки сложности $L_F(F_{\text{с.ф}}^{(n)}, G_3)$. В общем случае оценка (3) может быть грубой, поэтому далее дополним ее оценкой, полученной вычислительным методом.

Для булевых функций из счетных классов нетрудно получаются следующие оценки сложности (используемые далее в алгоритме синтеза формулы) [8]:

- пусть полином Жегалкина $f^{(n)} = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \oplus x_n$, $n \geqslant 3$, $m = 2$, тогда $L_F(F^{(n)}, G_3) = n - 1$;
- пусть $f^{(n)} = (x_1 \cdot x_2) \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n$, $n \geqslant 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = \ldots = 1$, тогда $L_F(F^{(n)}, G_3) = n - 1$.

Для наглядности и удобства сравнения представим результаты в одной табл. 1.

Таблица 1

n — число переменных	$F^{(n)}$ — тип полинома	$L_б(F^{(n)})$ — сложность по числу букв	$L'_F(F^{(n)})(L_S(F^{(n)}))$ — сложность по числу базисных функций (ФЭ)	$L''_F(F^{(n)}) = (5/4)2^n - 2$
7	$F_4^{(7)}$	140	66	158
7	$F_2^{(7)}$	42	26 — схема без ветвления (класс формул) 16 — схема с ветвлением	158
7	$F^{(7)}$	10	6 (минимальное представление формулы/схемы)	158
9	$F^{(9)}$	15	8 (минимальное представление формулы/схемы)	638
10	—	—	—	1278

Примечание. $L'_F(F^{(n)})$ — уточненное значение показателя сложности по числу базисных функций для функции $F^{(n)}$ (или $L_S(F^{(n)})$ — ее схемы, если это отмечено),

$L''_F(F^{(n)}) = (5/4)2^n - 2$ (столбец 5) — значение аналитической оценки (3) показателя сложности по числу базисных функций (L_F) для булевой функции от n переменных.

Пример 1. В примере изучаются булевы функции $f^{(n)} \in P_2$ (в базисе Жегалкина G_3) из четырех счетных классов (табл. 1, столбец 2) и получены оценки показателя сложности для разных способов его представления в классе формул F и классе схем S.

Класс $F^{(7)}$ (обозначение функции и задающей ее формулы может совпадать, т. е. $F^{(7)}$ — это обозначение булевой функции и формулы). Пусть здесь функция $f^{(7)}$ задается полиномом Жегалкина:

$$F^{(7)} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \oplus x_3 \cdot x_6 \oplus x_7,$$

строения **r** = (4, 3, 2, 1). Требуется представить ее в классе скобочных формул, минимизируя значение показателя сложности $L_F(F^{(7)}_{\text{с.ф}})$.

Составим таблицу повторяемости переменных x_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, в формуле $F^{(7)}$ (табл. 2).

Таблица 2

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$p_i^{(7)}$	1	2	3	1	1	1	1	—	—
$p_i^{(9)}$	1	3	2	1	2	1	1	1	4

Выполним эквивалентные преобразования формулы $F^{(7)}$ в базисе G_3 в соответствии с ФУ (2):

$$F^{(7)} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \oplus x_3 \cdot x_6 \oplus x_7 =$$
$$= x_3 \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_5 \oplus x_6) \oplus x_7 =$$
$$= x_3 \cdot (x_2 \cdot (x_1 \cdot x_4 \oplus x_5) \oplus x_6) \oplus x_7 =$$
$$= x_3 \cdot (x_2 \cdot ((x_1 \cdot x_4) \oplus x_5) \oplus x_6) \oplus x_7 = F^{(7)}_{\text{с.ф}}.$$

При этом найдена декомпозиция функции $f^{(7)}$ в базисе G_3 и получена эквивалентная бесповторная скобочная формула $F^{(7)}_{\text{с.ф}}$ с минимальной сложностью $L_F(F^{(7)}_{\text{с.ф}})_{\min} = 6$. Также однозначно определен порядок вычисления формулы $F^{(7)}_{\text{с.ф}}$.

Класс $F_2^{(7)}$. Выбираем функцию из другого класса, задаваемую симметрическим полиномом Жегалкина $F_2^{(7)}$ (табл. 1, строка 2). Рассмотрим разные представления этой функции, получая соответствующие оценки показателей сложности (табл. 1, строка 2). Эти значения будут достигаться при представлении этого же полинома в классе схем, т. е. $L_F(F_2^{(7)}) = L_S(F_2^{(7)}) = 26$ (табл. 1, строка 2). Сложность представления этого же полинома Жегалкина (функции) можно еще уменьшить в классе схем. Для этого вначале минимизация состоит в приведении полинома Жегалкина в скобочную формулу на основе свойств булевой алгебры (применения эквивалентностей). Затем при синтезе завершающей схемы S, реализующей заданную функцию $F_2^{(7)}$, используем ветвление выходов определенных функциональных элементов и получаем схему из 16 функциональных элементов, т. е. $L_S(F_2^{(7)}) = 16$. Результаты ветвления выходов наглядно представляются рис. 2.

Аналогично получаем оценки для функций из класса $F_4^{(7)}$.

Замечание 1. На основе примера 1 можно строить счетные классы булевых формул определенного строения, характеризуемых минимальной сложностью $L_F(F^{(n)})$ представления (доказываемой методом математической индукции). В качестве простого ближайшего примера предлагается функция, задаваемая полиномом Жегалкина $F^{(9)}$ (**класс** $F^{(9)}$), строения **r** = (5, 4, 3, 2, 1), т. е.

$$F^{(9)} = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_9 \oplus x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_9 \oplus$$
$$\oplus x_2 \cdot x_7 \cdot x_9 \oplus x_8 \cdot x_9 \oplus x_1 =$$
$$= x_9 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot (x_4 \cdot x_5 \oplus x_6) \oplus x_7) \oplus x_8) \oplus x_1 = F^{(n)}_{\text{с.ф}}. \quad (4)$$

Минимальное значение показателя $L_F(F^{(9)})_{\min} = 8$.

Аналитически и из табл. 1 следует вывод: при возрастании n значения показателей $L_б(F^{(n)})$, $L'_F(F^{(n)})_{\min}$ и $L''_F(F^{(n)})$ сложности булевых функций $F^{(n)}$ соответственно синхронно увеличиваются (см. табл. 1, столбцы 1, 3—5), но прогнозируемые оценки сложности возрастают быстрее (столбец 5), когда необходимо наоборот [8—12].

Анализируя результаты, можно сказать, что при увеличении переменной n на единицу прогнозируемая оценка увеличивается приблизительно в два раза (см. табл. 1, строки 3—5).

Замечание 2. Выведенные оценки сложности представления булевых функций полезно использовать для автоматизации синтеза булевых формул и логических схем, представляя получаемые результаты в виде табл. 1.

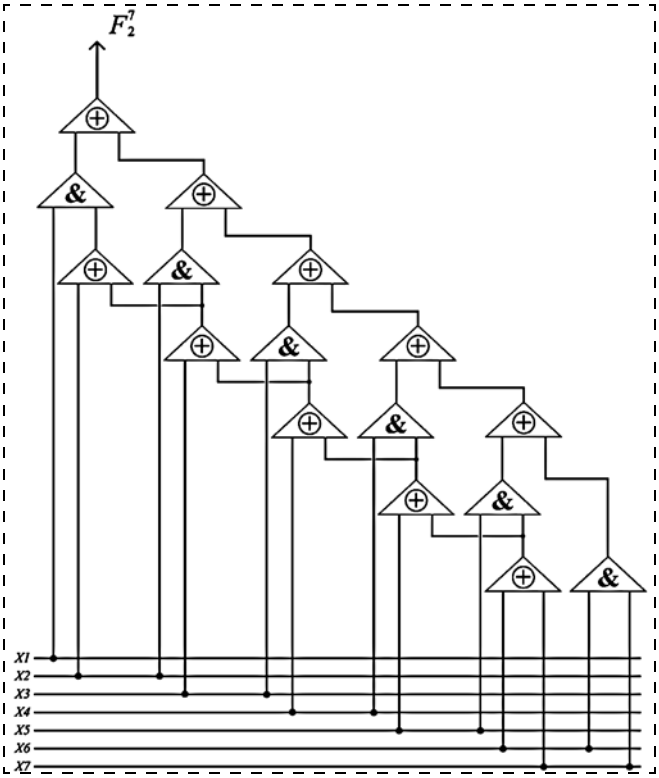

Рис. 2. Минимальная по сложности $L_F(F^{(n)})_{\min}$ схема, реализующая функцию $F_2^{(7)}$

При создании программ для интеллектуализации алгоритма синтеза формул и схем предусматривается возможность самомодификации (и настройки) применительно к конкретной булевой формуле. Используемые средства (после применения эквивалентностей): в классе формул — скобки, в классе схем S — ветвление выходов отдельных функциональных элементов.

Применим обсуждаемые методы синтеза формул и схем в целях определения оценок сложности функции $F^{(9)}$, задаваемой полиномом Жегалкина $F^{(9)}$. Для этого вначале используем метод последовательной структурно-функциональной декомпозиции (можно применять метод ФУ (2)) и получаем следующие значения показателей сложности:

$$L_F(F^{(9)},\ G_3)_{\min} = L_S(F^{(9)},\ G_3)_{\min} = 8,$$

$$\mathrm{Dep}_F(F^{(9)},\ G_3)_{\min} = \mathrm{Dep}_S(F^{(9)},\ G_3)_{\min} = 8 \text{ (рис. 3, } a\text{)}.$$

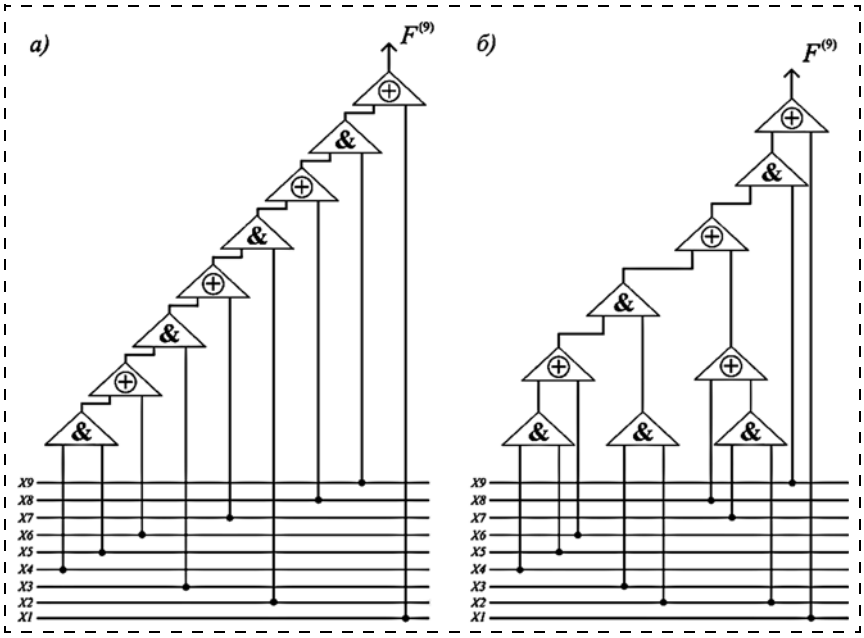

Рис. 3. Иллюстрация метода:
а — последовательной структурно-функциональной декомпозиции (можно применять также метод ФУ (2)); *б* — параллельной структурно-функциональной декомпозиции (можно применять также метод ФУ (2))

Затем используем метод параллельной структурно-функциональной декомпозиции (можно применять также метод ФУ (2)) и получаем следующие значения показателей сложности:

$$L_F(F^{(9)},\ G_3) = L_S(F^{(9)},\ G_3) = 9,$$

$$\mathrm{Dep}_F(F^{(9)},\ G_3) = \mathrm{Dep}_S(F^{(9)},\ G_3)_{\min} = 6 \text{ (рис. 3, } б\text{)}.$$

Вычислительный метод получения верхних оценок сложности

Погрешность получаемой оценки (3) может быть большой (см. пример 1 и табл. 1). Поэтому предлагается следующий вычислительный метод получения оценки L_F на основе оригинального матричного представления полинома Жегалкина. Метод отличается от предложенного в работе [12] и позволяет численно получать верхнюю оценку или минимальное значение сложности L_F на основе ФУ (2) в базисе G_3 [8—10].

Алгоритм определения сложности булевой функции в базисе Жегалкина

Используемые понятия и подготовка начальных данных для алгоритма синтеза формулы $F^{(n)}_{\text{с.ф}}$ и соответствующей схемы S

Пусть $X = \{x_1, ..., x_j, ..., x_n\}$ — множество булевых переменных. Произвольная булева функция $f^{(n)}$ задается полиномом Жегалкина $F^{(n)} = K_1 \oplus ... \oplus K_i \oplus \oplus ... \oplus K_m$ в базисе $G_3 = \{\&, \oplus, 0, 1\}$, где n — число переменных, m — длина полинома Жегалкина, K_i — монотонная элементарная конъюнкция ранга r_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\mathbf{r} = (r_1, ... r_i, ..., r_m)$ — вектор рангов полинома Жегалкина, упорядочивается для алгоритма один раз (!) отношением "$\geqslant$". При дальнейших преобразованиях этот порядок сохраняется, позволяя уменьшать трудоемкость. Получаем $r_1 \geqslant ... \geqslant r_i \geqslant ... \geqslant r_m$.

Матричная модель полинома Жегалкина и ее свойства (достаточность для вычисления, преобразований и др.)

В целях рационального представления булевой функции $f^{(n)}$ предлагается следующая новая модель для полинома Жегалкина $F^{(n)} = K_1 \oplus ... \oplus K_i \oplus ... \oplus K_m$, где K_i — монотонная элементарная конъюнкция ранга r_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Полином $F^{(n)}$ представляется с помощью матрицы $(k_{i,j})$ размером $m \times n$, включаемой в табл. 3 с числом строк $(m + 1)$ и столбцов $(n + 1)$. Определяются матрица и таблица следующим образом. После заполнения матрицы $(k_{i,j})$ размером $m \times n$ в табл. 3 с числом строк $(m + 1)$ и столбцов

Таблица 3

x / K	x_1	...	x_j	...	x_n	$\mathbf{r}$
K_1	...	...	...	...	...	r_1
...	...	...	...	...	...	...
K_i	...	...	$k_{i,j} = 1$	...	...	r_i
...	...	...	...	...	...	...
K_m	...	...	...	...	...	r_m
$\mathbf{p}$	p_1	...	p_j	...	p_n	$L = L$

$(n + 1)$ подсчитать по формулам числовые характеристики полинома: векторы рангов конъюнкций **r** и повторяемости **p** переменных, а также исходную сложность $L_б(F^{(n)})$ полинома.

Элемент матрицы $k_{i,j} = 1$, если $x_j \in \{K_i\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, иначе $k_{i,j} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, где под символом $\{K_i\}$ понимаем множество переменных, образующих элементарные конъюнкции K_i.

Заполнение и использование основных таблиц алгоритма

Помимо матрицы $(k_{i,j})$ размером $m \times n$, в табл. 3 присутствуют столбец $n + 1$ и строка $m + 1$, которые заполняются следующим образом:

- вычисляется и записывается в столбец $(1 \leqslant i \leqslant m,\ n + 1)$ ранг

$$r_i = r_{i,n+1} = \sum_{t=1}^{n} k_{it},\ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

элементарной конъюнкции K_i;

- в строку $(m + 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ вычисляется и записывается число p_j повторений переменной x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, в формуле $F^{(n)}$, подсчитывается

$$p_j = p_{m+1,j} = \sum_{t=1}^{m} k_{ij},\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

и получается вектор $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_j, ...p_n)$ повторяемости переменных из множества $X = \{x_1, ... x_j, ..., x_n\}$ в формуле $F^{(n)}$ (переменная x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, повторяется в формуле $F^{(n)}$ p_j раз).

Также вычисляется и записывается $L_б = \sum_{i=1}^{m} r_i$ — число букв в формуле $F^{(n)}$.

Рассматриваемая выше табличная модель (табл. 3) допускает ее дальнейшее изучение, развитие и применение в алгоритме минимизации показателя сложности $L_б(f^{(n)}, G_3)$ для формулы F. С помощью табл. 3 выделяем три различных случая для аналитического изучения формулы F:

1. Если $p_1 = m$ и $p_j < m$, $2 \leqslant j \leqslant n$, то функция $f^{(n)}$ задается следующей формулой:

$$x_1 \cdot F^{(n-1)} = \\ = x_1 \cdot F_1^{(n-1)} \oplus x_1 \cdot F_2^{(n-1)} \oplus ... \oplus x_1 \cdot F_m^{(n-1)},$$

где $F^{(n-1)} = F_1^{(n-1)} \oplus F_2^{(n-1)} \oplus ... \oplus F_m^{(n-1)}$ — полином Жегалкина степени $(n - 1)$,

$$L'_б = \sum_{i=1}^{m} r_i - m + 1,$$

где $L'_б$ — значение показателя сложности по числу букв для текущего преобразования формулы $F^{(n)}$ $(x_1 \cdot F^{(n-1)})$.

2. Если $p_1 = p_2 = m$ и $p_j < m$, $3 \leqslant j \leqslant n$, то функция $f^{(n)}$ задается следующей формулой:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot F^{(n-2)} = x_1 \cdot x_2 \cdot F_1^{(n-2)} \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot F_2^{(n-2)} \oplus \\ \oplus ... \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot F_m^{(n-2)},$$

где $F^{(n-2)} = F_1^{(n-2)} \oplus F_2^{(n-2)} \oplus ... \oplus F_m^{(n-2)}$ — полином Жегалкина степени $(n - 2)$,

$$L''_б = \sum_{i=1}^{m} r_i - 2m + 2,$$

где $L''_б$ — значение показателя сложности по числу букв для текущего преобразования формулы $F^{(n)}$ $(x_1 \cdot x_2 \cdot F^{(n-2)})$.

Эти преобразования позволяют (минимизировать) уменьшить значение показателя сложности $L_б$ $(f^{(n)}, G_3)$ на величину

— для первого случая:

$$L_б - L'_б = \sum_{i=1}^{m} r_i - \left(\sum_{i=1}^{m} r_i - m + 1\right) = m - 1$$

и аналогично для второго случая:

$$L_б - L''_б = 2 \cdot m - 2.$$

3. Для оставшегося случая действуем следующим образом.

Определяем максимальную компоненту p_j вектора **p** и ее индекс j, т. е. $p_{j\max} = \max(p_1, ..., p_j, ..., p_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и j — индекс максимально повторяющейся переменной x_j. Итак, максимально повторяющаяся переменная x_j повторяется p_j раз (в случае нескольких одинаковых индексов выбираем один любой из них).

Множество $\{K_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m)$ ЭК полинома $F^{(n)}$ разбиваем на два подмножества F_0 и F_1: первое подмножество, ЭК которого содержат переменную x_j, обозначаем как $F'(F' = F_0)$; второе подмножество, ЭК которого не содержат переменную x_j, обозначаем F'' $(F'' = F_1)$. При выполнении перестановок в полиномах $F' = F_0$ и $F'' = F_1$ необходимо сохранять порядок не убывания ("$\geqslant$") по рангам элементарных конъюнкций. В множестве F' элементарных конъюнкций выносим переменную x_j за скобки, для остатка сохраняя обозначение F''.

Записываем полиномы F' и F'' и их числовые характеристики (аналогично предыдущему и сохраняя порядок "$\geqslant$") в табл. 4. На каждом шаге получаем две (или одну) такие строки (остаточные формулы — полиномы F' и F'') с результатами.

Таблица 4

n' или n''		m' или m''	Полиномы Жегалкина F' или F'', задаваемые табл. типа 3	Выводимые результаты L_F
1		2	3	4
1	$n' := n - 1$	$m' := p_{j\max}$	F'	$L_F := L_F + 1$
2	$n'' := n'$	$m'' := m - m'$	F''	$L_F := L_F + 1$
3	...	...	...	...

Таблица 5

№ по порядку записи	Вход 1	Вход 2	Логический элемент	Формула-функция
	1	2	3	4
6	x_1	x_4	&	f_{000}
5	x_5	f_{000}	$\oplus$	f_{00}
4	x_2	f_{00}	&	$x_2 f_{00}$
3	x_6	$x_2 f_{00}$	$\oplus$	f_0
2	x_3	f_0	&	$x_3 f_0$
1	$x_3 f_0$	x_7	$\oplus$	$F^{(7)} = F7$
			&	$F_{\&}$
			$\oplus$	$F_{\oplus}$

Для организации цикла чтения-записи табл. 4 в алгоритме используются переменные:

$t_1 = 1, 2, \ldots$ — начало и продолжение записи функций F' и F''; номер строки последней функции, прочитанной из табл. 4;

$t_2 = 1, 2, \ldots$ — начало и продолжение чтения табл. 4; номер строки последней функции, записанной в табл. 4. Цикл чтения-записи табл. 4 продолжается, пока выполняется условие $t_1 > t_2$. В случае истинности этого условия алгоритм переходит к чтению полинома из строки t_1 табл. 4 в табл. 3.

Табл. 5 служит для записи ФЭ для логической схемы *S*. Запись схемы в табл. 5 представлена на примере $F^{(7)}$.

Замечание. Для конструирования схемы используются только базисные двухместные ФЭ, обладающие свойствами коммутативности и ассоциативности. Поэтому порядок подачи сигналов на входы их ФЭ на этом этапе (!) безразличен (это значительно уменьшает трудоемкость синтеза схемы), но на этапе разработки топологии схемы важен.

В общем случае обозначение ФЭ складывается из обозначений сигналов, подаваемых на вход ФЭ с помощью операции конкатенации. Если на вход подаются сигналы *x1* и *f0*, то обозначение выхода этого ФЭ следующее: *x1f0* (слово из четырех букв), в начальном варианте — $x_1 f_0$; могут быть и такие варианты обозначений: *x5f110* (аналогично для начального варианта $x_5 f_{110}$). При этом сохраняется функционирование (эквивалентность) схем.

Фрагмент работы алгоритма
(в скобах даны комментарии)

Шаг 1. Подготовка начальных данных

Считать из файла n, m, $F^{(n)}$ (с помощью формального языка по правилам задается формат ввода формулы $F^{(n)}$, корректность которой при вводе проверяется).

Для исходной формулы $F^{(n)}$ заполнить табл. 3, получая векторы:

r — вектор рангов (правый столбец (с номером $n + 1$)),

p — вектор повторяемости переменных (нижняя строка (с номером $m + 1$)).

Присвоить $L_F := 0$, $t_1 := 1$, $t_2 := 0$.

Шаг 2. Проверка частных случаев

Шаг 2.1

Из табл. 3 получить значение m.

Из табл. 3 определить $p_{j\max} := \max(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и соответствующую переменную $x_{j\max}$ с индексом $j_{\max} = j$.

Шаг 2.2

Если $m = 1$, то

$L_F := L_F + r_1 - 1$,

построить параллельную схему в классе "&", записать полученную схему в табл. 5.

Переход к шагу 4 (чтение в табл. 3 из строки t_1 табл. 4).

Шаг 2.3

Если $p_{j\max} = 1$, то

$L_F := L_F + m - 1$,

построить параллельную схему в классе "$\oplus$", записать полученную схему в табл. 5.

Переход к шагу 4 (чтение в табл. 3 из строки t_1 табл. 4).

Шаг 3. Промежуточная итерация

Шаг 3.1

(Применить ФУ (2) и определить первую остаточную функцию $F' = F_0$.)

Если $p_1 = m$ и $p_j < m$, $2 \leqslant j \leqslant n$, то записать в вектор выносимых переменных переменную x_1.

Иначе:

если $p_1 = p_2 = m$ и $p_j < m$, $3 \leqslant j \leqslant n$, то записать в вектор выносимых переменных переменную x_1, $L_F := L_F + 1$.

Иначе записать в вектор выносимых переменных переменную $x_{j\max}$.

Из табл. 3 выбрать номера ЭК, содержащих выносимые переменные.

Переписать их в новую табл. 3 (для определенности назовем ее табл. 3.1), сохраняя порядок и исключая из их состава выносимые переменные.

Таким образом, получаем полином Жегалкина $F'(F_0)$, записанный в табл. 3.1.

Подсчитать векторы **r** и **p**.

$L_F := L_F + 1$.

$n' := n - 1$ (n' — число переменных полинома Жегалкина F')

$m' := p_j$ (m' — длина полинома Жегалкина F')

В строку с номером t_2 табл. 4 записать n', m', F'.

$t_2 := t_2 + 1$.

Шаг 3.2

(Определить вторую остаточную функцию $F'' = F_1$ — полинома Жегалкина $F'' = F_1$ из табл. 4.)

Вычислить $m'' := m - m' = m - p_j$ (m'' — длина полинома Жегалкина F'').

Если $m'' > 0$, то:

из табл. 3 выбрать номера ЭК, не содержащих выносимые переменные.

Сохраняя порядок, переписать выбранные ЭК в новую табл. 3 (для определенности назовем ее табл. 3.2).

Таким образом, получаем полином Жегалкина $F''(F_1)$, записанный в табл. 3.2.

Подсчитать векторы **r** и **p**.

Вычислить: $n'' := n'$

(n'' — число переменных полинома Жегалкина F''),

$L_F := L_F + 1$.

В строку с номером t_2 табл. 4 записать n'', m'', F''.

$t_2 := t_2 + 1$.

Записать текущее выражение в табл. 5.

Шаг 4. Проверка окончания итерации и чтение табл. 4

$t_1 := t_1 + 1$;

Если $t_2 > t_1$, то

считать в табл. 3 полином из строки t_1 табл. 4,

переход к шагу 2.

(Для результатов используется табл. 4, в которую с начала работы программы записываем не более двух полиномов Жегалкина F' и F'' за шаг, и затем, пока есть непрочитанные записи, из нее (табл. 4) считываем по одному полиному.)

Шаг 5. Формирование выходной информации

Вывод результата $L_F(F^{(n)})$ (суперпозиционной формулы $F^{(n)}_{\text{с.ф}}$).

На основе суперпозиционной формулы $F^{(n)}_{\text{с.ф}}$ строится схема S без ветвления, сопоставляя изоморфным образом каждой базисной формуле свой логический элемент.

КОНЕЦ

Заключение

В инженерной практике встречаются проблемы (задачи) автоматизированного синтеза эффективных дискретных устройств обработки информации и логического управления объектами и процессами. От их решения зависят достижения в различных областях науки и техники (информатики, энергетики, робототехники, транспорта и др.),

Простейшими математическими моделями для таких устройств являются булевы функции. Поэтому фактически решается сложная задача: реализация булевой функции $f^{(n)}$ в заданном базисе в классе формул (ДНФ, полиномов Жегалкина, скобочных формул) и в классе схем S из функциональных элементов (с ветвлением и без).

При этом сложность—качество реализации оценивается с помощью различных показателей:

- по числу $L_б(F^{(n)})$ символов переменных, по числу $L_F(F^{(n)})$ базисных функций (в классе формул);
- по числу $L_S(F^{(n)})$ ФЭ в схеме (в классе схем S).

Для повышения эффективности автоматизации синтеза важную роль играют получение и исследование верхних оценок сложности и включение их в алгоритмы автоматизации.

При сравнении результатов с помощью табл. 1 показаны зависимости от размерности функции и задания их формулами различного типа. Для случая, когда оценки показателей сложности заметно различаются, применяется вычислительный алгоритм.

Список литературы

1. **Журавлев Ю. И.** Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. 1962. № 8.
2. **Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А. С.** Введение в теорию интеллектуальных систем. М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2006. 208 стр.
3. **Лупанов О. Б.** О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Яблонский С. В.** Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. № 2.
5. **Поспелов Д. А.** Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974. 342 с.
6. **Теряев Е. Д., Петрин К. В., Филимонов Н. Б., Филимонов А. Б.** Агентные технологии в автоматизированных информационно-управляющих системах. Часть II. Агентные решения в задачах контроля и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 10. С. 11—21.
7. **Цурков В. И.** Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981. 324 с.
8. **Чебурахин И. Ф.** Синтез дискретных управляющих систем и математическое моделирование: алгоритмы, программы. М.: Физматлит, 2004. 247 с.
9. **Чебурахин И. Ф.** Преобразования функциональных уравнений и показатели сложности булевых функций // Матер. IX Междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения", посвященного 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова. М.: Изд-во МГУ, 2007. С. 126—129.
10. **Чебурахин И. Ф.** Математические модели для интеллектуализации синтеза дискретных логических управляющих устройств на основе цифровых интегральных схем // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 1. С. 68—77.
11. **Чебурахин И. Ф.** Сложность симметрических полиномов Жегалкина // XVII Междунар. школа-семинар "Синтез и сложность управляющих систем" им. акад. О. Б. Лупанова. Новосибирск, 2008. С. 180—185.
12. **Чебурахин И. Ф.** Математические модели для минимизации и автоматизации синтеза дискретных управляющих систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 4. С. 5—13.

Clarification of Difficulty Indexes of Digital Circuits and Automation their Efficient Application

I. F. Cheburakhin, logicifch@yandex.ru✉, **O. N. Gavrish,** gavrish.o@gmail.com,
MATI — Russian State Technological University named after K. E. Tsiolkovsky,
Moscow, 121552, Russian Federation

Corresponding author: **Cheburakhin Igor F.,** Ph. D., Professor,
MATI — Russian State Technological University named after K. E. Tsiolkovsky,
Moscow, 121552, Russian Federation, e-mail: logicifch@yandex.ru

Received on May 20, 2015
Accepted on July 06, 2015

An important feature of modern scientific and technological revolution is the rapid growth of collecting and processing information in almost all areas of science and technology. This gives rise to a large number of difficult tasks (problems) for a variety of reasons that people are not able to solve on their own because of their huge information capacity and complexity. It should be noted that in recent years there has been a steady trend of increasing the role of computers in the task, which is associated with problems of processing and presentation of data not only in quantitative terms but also in qualitative form — in the form of relationships, text description, obtained in economics, medicine, biology etc. The creation and distribution of software for data processing, which would allow users-nonprogrammers, working in various fields of science and technology, to solve problems on the basis of a computer, is also extremely relevant. Improving computer element base occurs with great predominance increase the degree of integration in comparison with other parameters. Therefore, the primary means of increasing productivity is to increase computer equipment — the number of gates used in it. In this paper we study the problem of implementing any Boolean function in the class of formulas and — circuits of functional elements in standard and Zhegalkin bases. An efficient method for the synthesis of formulas and schemes on the basis of the recurrence relations (functional equations), followed by obtaining advance analytically upper estimates of various indicators of complexity (the number of letters, number subformulas; on the number of functional elements over the depth of the formula and the depth of the circuit), including and schemes for the minimum of difficulty. If necessary to clarify the upper bounds for the complexity, the computational algorithm is being proposed.

Keywords: *Boolean function, syntheses formula and circuit, decomposition, difficulty, minimization, functional of the equation.*

For citation:

Cheburakhin I. F., Gavrish O. N. Clarification of Difficulty Indexes of Digital Circuits and Automation their Efficient Application, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 2, pp. 75—83.

DOI: 10.17587/mau/17.75-83

Referenses

1. **Zhuravlev Yu. I.** *Teoretiko-mnozhestvennye metody v algebre logiki* (Set-theoretic methods in the algebra of logic), *Problemy Kibernetiki*, 1962, no. 8 (in Russian).

2. **Kudpyavtsev V. B., Gasanov E. E., Podkolzin A. S.** *Vvedeniye v teoriyu intellektualnykh sistem* (Introduction to the Theory of Intelligent Systems), Moscow, Publishing house of FCMC MSU, 2006, 208 p. (in Russian).

3. **Lupanov O. B.** *O slozhnosti realizatsii funktsy algebry logiki formulami* (About the complexity of realization of Boolean functions by formulas), *Problemy Kibernetiki*, Iss. 3, Moscow, Fizmatgiz, 1960 (in Russian).

4. **Yablonsky S. V.** *Ob algoritmicheskikh trudnostyakh sinteza minimalnykh kontaktnykh skhem* (About algorithmic difficulties of synthesis of minimal contact circuits), *Problemy Kibernetiki*, 1959, no. 2 (in Russian).

5. **Pospelov D. A.** *Logicheskiye metody analiza i sinteza skhem* (Logical methods of analysis and synthesis of circuits), Moscow, Energiya, 1974, 342 p. (in Russian).

6. **Teryaev Ye. D., Petrin K. V., Filimonov N. B., Filimonov A. B.** *Agentnye tekhnologii v avtomatizirovannykh informatsionno-upravlyayushchikh sistemakh. Chast II. Agentnye resheniya v zadachakh kontrolya i upravleniya* (Agent-based technology in automated information control systems. Part II. Agent-based solutions to the problems of monitoring and control), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye,* 2010, no. 10, pp. 11—21 (in Russian).

7. **Tsurkov V. I.** *Dekompozitsiya v zadachakh bolshoy razmernosti* (Decomposition in problems of large dimension), Moscow, Nauka, 1981, 324 p. (in Russian).

8. **Cheburakhin I. F.** *Sintez diskretnykh upravlyayushchikh sistem i matematicheskoye modelirovaniye: algoritmy, programmy* (The synthesis of discrete control systems and mathematical modeling: algorithms, programs), Moscow, Fizmatlit, 2004, 247 p. (in Russian).

9. **Cheburakhin I. F.** *Preobrazovaniya funktsionalnykh uravneny i pokazateli slozhnosti bulevykh funktsy* (Conversion of functional equations and figures complexity of Boolean functions), *Proc. of the IX Intern. Seminar "Discrete Mathematics and its Applications", devoted to the 75th anniversary of academician O. B. Lupanova*, Moscow, Publishing house of MSU, 2007, pp. 126—129 (in Russian).

10. **Cheburakhin I. F.** *Matematicheskiye modeli dlya intellektualizatsii sinteza diskretnykh logicheskikh upravlyayushchikh ustroystv na osnove tsifrovykh integralnykh skhem* (Mathematical models for the intellectualization synthesis of discrete logic control devices based on digital integrated circuits), *Izv. RAN. TiSU,* 2008. no. 1, pp. 68—77 (in Russian).

11. **Cheburakhin I. F.** *Slozhnost simmetricheskikh polinomov Zhegalkina* (The complexity of symmetric polynomials Zhegalkin), *XVII Intern. School-seminar "Synthesis and complexity of control systems" named Acad. O. B. Lupanov.* Novosibirsk, 2008, pp. 180—185 (in Russian).

12. **Cheburakhin I. F.** *Matematicheskiye modeli dlya minimizatsii i avtomatizatsii sinteza diskretnykh upravlyayushchikh sistem* (Mathematical models for minimization and automation the synthesis of discrete control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye,* 2012, no. 4, pp. 5—13 (in Russian).