

М. В. Голицына, аспирант, Kulikovskaya-Mary@yandex.ru,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом

Рассматривается движение вибрационного робота, представленного жестким корпусом и физическим маятником, закрепленным в его центре, управление осуществляется за счет выбора углового ускорения маятника. Исследуется некоторый класс движений и управление, которое обеспечивает движение робота в желаемом направлении в рамках заданных ограничений. Приводится обоснование оптимальности с точки зрения максимизации скорости робота рассматриваемого закона управления в некотором классе движений.

Ключевые слова: вибрационный робот, управление, оптимальность, математическое моделирование, сухое трение

Введение

Современный мир уже невозможно представить без роботов, позволяющих решать поставленные человеком задачи. Отдельный класс роботов умеет перемещаться в пространстве, и существует множество механизмов, обеспечивающих его движение. Нередко для перемещения робота требуются внешние детали — колеса, ноги, гусеницы и пр. Однако есть и такие, которым не требуется никаких внешних устройств, их перемещение обеспечивается за счет колебаний составляющих робота, такие механизмы носят название вибрационные роботы.

Движение вибрационного робота по плоскости исследовалось в работах [1—5]. В работах [1, 2] среди внутренних тел присутствует вращающийся ротор. Движение робота в вязкой среде рассмотрено в работах [3, 4]. В этих статьях система представлена корпусом с двумя подвижными внутренними массами, перемещающимися вдоль горизонтальной оси симметрии корпуса.

Прямолинейное движение по горизонтальной плоскости вибрационных роботов, представленных телом и несколькими внутренними массами, двигающимися поступательно, рассмотрено в работах [6, 7].

Отдельно можно выделить вибрационные роботы с одной внутренней массой, которая перемещается по горизонтали. В работах [7—11] рассматриваются такие системы и исследуются периодические режимы управления. В том числе в этих работах происходит поиск оптимального управления с целью максимизировать скорость робота.

В данной работе также рассматривается движение робота с одним подвижным внутренним элементом.

Особенности исследуемой задачи

В статье анализируется управление вибрационным роботом, представленным жестким корпусом массы M в форме параллелепипеда и физическим

маятником массы m , закрепленным в его центре (рис. 1). Движение происходит с сухим трением по горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Длина от точки закрепления до центра масс маятника равна l .

Особенность рассматриваемой ниже модели заключается в том, что за счет вращательных движений внутренней массы управляющий момент может влиять не только на знак, но и на модуль силы трения. Такой робот также рассматривался в работах [12, 13]. В статье [12] предполагается, что угловая скорость маятника постоянна, проведен параметрический анализ системы, в работе [13] предполагается, что система представляет собой микроробот, и управление происходит за счет выбора угловой скорости.

В данной работе управление осуществляется посредством выбора углового ускорения маятника. В статье исследуется закон управления с симметричным ограничением на угловое ускорение маятника, рассмотренным в работе [14], и доказывается оптимальность такого управления в некотором классе движений.

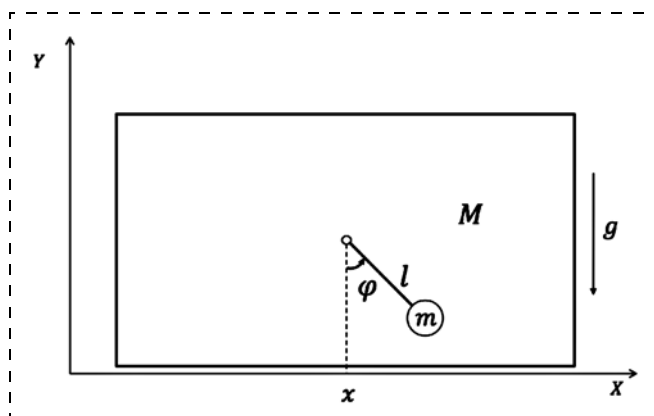


Рис. 1. Рассматриваемая конструкция вибрационного робота

Движение робота определяется углом φ отклонения маятника от направления ускорения свободного падения, отсчитываемым против часовой стрелки, и координатой центра масс корпуса x (рис. 1). Рассматривается система, для которой выполняются следующие условия:

1) размер корпуса робота достаточно велик, чтобы обеспечить неопрокидывание системы;

2) управление роботом осуществляется за счет выбора углового ускорения маятника $\ddot{\varphi}$.

Класс исследуемых управлений должен обеспечить движение робота, такое что:

1) сила реакции опоры неотрицательна, что обеспечивает безотрывное движение корпуса:

$$N \geq 0; \quad (1)$$

2) в течение одного оборота маятника движение робота проходит две фазы:

$\dot{x} > 0$ — фаза скольжения, $\dot{x} = 0$ — фаза покоя; (2)

3) угловая скорость маятника

$$\dot{\varphi} > 0; \quad (3)$$

4) движение робота периодическое с некоторым не заданным наперед периодом T , т. е. должны выполняться следующие условия:

$$\varphi(T) = \varphi(0) + 2\pi, \dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}(0), \dot{x}(T) = \dot{x}(0); \quad (4)$$

5) на модуль углового ускорения наложено ограничение:

$$|\ddot{\varphi}| \leq \ddot{\varphi}_{\max} \quad (5)$$

(характеризующее технические ограничения мотора, передающего момент вращения маятнику);

6) управление обеспечивает максимизацию средней скорости движения корпуса вибрационного робота.

Определим уравнения, характеризующие движение системы. Поскольку в рамках рассматриваемого класса движений корпус робота не совершает подскока, то движение системы определяется следующими уравнениями:

$$(m + M)\ddot{X}_{cr} = R; \quad (6)$$

$$R = \begin{cases} -\mu N \text{sign}(\dot{x}), \dot{x} \neq 0; \\ ml(\sin\varphi)''', \dot{x} = 0 \text{ и } ml|(\sin\varphi)''| \leq \mu|N|; \\ \mu N \text{sign}(\sin\varphi)'', \dot{x} = 0 \text{ и } ml|(\sin\varphi)''| > \mu|N|; \end{cases} \quad (7)$$

$$N = (m + M)g - ml(\cos\varphi)''. \quad (8)$$

Здесь $X_{cr} = \frac{Mx + m(x + l\sin\varphi)}{m + M}$ — координата центра масс всей системы, N — сила реакции опоры, μ — коэффициент силы сухого трения.

Выпишем уравнение движения центра масс системы вдоль оси x для случая $\dot{x} > 0$:

$$(m + M)\ddot{X}_{cr} = -\mu N. \quad (9)$$

Введем безразмерные и характерные величины:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\eta}, \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\phi}. \quad (10)$$

Здесь через (η, τ, ϕ) обозначены характерные, а через $(\tilde{}, \tilde{}, \tilde{})$ — безразмерные величины. Все дальнейшие выводы будут сделаны для безразмерных величин и " $\sim$ " в их обозначении будут опущены.

Характерные величины определим следующим

$$\text{образом: } \eta = \frac{ml}{m + M}, \tau = \sqrt{\frac{\eta}{g}}, \phi = 1 \text{ рад.}$$

После подстановки в уравнение (8) замен (10) получаем следующее выражение для силы нормальной реакции опоры:

$$N = 1 - (\cos\varphi)''. \quad (11)$$

Подставив выражения (11) в уравнение (9) и учитывая замены (10), получаем

$$(x + (\sin\varphi - \mu\cos\varphi))'' = -\mu. \quad (12)$$

Уравнение (12) — это уравнение движения на фазе скольжения. Как видно, в безразмерных величинах в уравнение движения входит один параметр — μ .

Аналогично можно рассмотреть уравнение движения центра масс в проекции на ось x для случая $\dot{x}' = 0$. Ниже представлены уравнения движения маятника, определенного конусом трения при покое корпуса робота, которые соответствуют движению, при котором трение имеет максимальное по модулю значение и направлено в сторону роста x (первое уравнение) и в сторону уменьшения x (второе уравнение):

$$(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)'' = \mu; \quad (13a)$$

$$(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)'' = -\mu. \quad (13b)$$

Закон управления

В статье [14] рассматривается управление, удовлетворяющее описанным ограничениям, его можно представить в виде системы

$$\varphi'' = \begin{cases} -\varphi''_{\max}, \varphi_0 < \varphi < \varphi_1; \\ \frac{-1 - (\varphi')^2 \cos\varphi}{\sin\varphi}, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2; \\ \varphi''_{\max}, \varphi_2 < \varphi < \varphi_3; \\ \frac{\mu + (\varphi')^2 (\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}, \varphi_3 < \varphi < \varphi_4; \\ \varphi''_{\max}, \varphi_4 < \varphi \leq 2\pi \cup 0 \leq \varphi \leq \varphi_0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь через углы $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ обозначены углы переключения между режимами, которые могут быть однозначно получены в зависимости от значения $\varphi''_{\max}$ при известном μ . Основная идея этого управления состоит в том, чтобы обеспечивать на наибольшем, при существующих ограничениях, участке движения нулевое значение силы трения ($N = 0$).

Нулевое трение при таком управлении обеспечивается и при вертикальном положении маятника $\varphi = \pi$, это позволяет однозначно из выражения (11) определить соответствующую угловую скорость $\dot{\varphi}' = 1$. Зная угол и угловую скорость, можно определить значения этих фазовых переменных на границах участка движения без трения, которые определяются выходом значения углового ускорения маятника за ограничение $|\varphi''| \leq \varphi''_{\max}$.

До участка без трения есть участок движения с $N > 0$ с управлением $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$ (первое уравнение системы (14)), как только это становится возможным, движение робота определяется равенством нулю трения (второе уравнение системы (14)), в тот момент, когда ускорение, требуемое для обеспечения $N = 0$, становится равным $\varphi''_{\max}$, происходит переключение на управление $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ (третье уравнение системы (14)). Далее в какой-то момент происходит остановка корпуса (при $\varphi = \varphi_3$), и система переходит в фазу покоя.

Управление на фазе покоя построено из соображения максимизации угловой скорости маятника на этом участке при условии, что начальные и конечные условия этой фазы заданы. Таким образом, сначала маятник совершает максимальный, в рамках ограничений, разгон, а потом торможение. Разгон сначала определяется условием покоя — уравнением (13а), определяющим конус трения с положительным направлением силы трения (четвертое уравнение системы (14)), а потом, когда это становится возможным, ограничением на угловое ускорение $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ (пятое уравнение системы (14)), после этого происходит торможение системы $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$, пока робот естественным образом не начнет движение (первое уравнение системы (14)).

Таким образом, первое уравнение системы (14) соответствует частично фазе покоя, частично фазе движения, следующие два — фазе движения, и последние два — фазе покоя. Отметим, что при движении без трения на робот не действуют никаких внешних горизонтальных сил ($X''_{cr} = 0$), при этом ограничения на максимум и минимум углового ускорения симметричны, поэтому $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$, $\varphi'_1 = \varphi'_2$ и $x'_1 = x'_2$.

Более подробно вывод этого управления рассмотрен в статье [14]. В данной работе рассматривается вопрос об оптимальности данного управления, т. е. задачу можно сформулировать следующим образом.

Для робота, движение которого определяется уравнениями (6)–(8), рассматриваются периодические режимы движения робота при ограничениях (1)–(5). Необходимо обосновать оптимальность управления (14) роботом в некотором классе движения с точки зрения максимизации средней скорости робота:

$$\dot{x}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) dt. \quad (15)$$

Замечание 1. В силу периодичности рассматриваемых решений максимизация средней скорости корпуса робота $\dot{x}_{av}$ и средней скорости центра масс $\dot{X}'_{crav}$ — эквивалентные задачи.

Обоснование оптимальности

При движении робота с управлением (14) для углов $\pi \leq \varphi \leq \varphi_3$ угловое ускорение маятника опре-

деляется ограничением: сначала $\varphi' = -\frac{1 + \varphi'^2 \cos \varphi}{\sin \varphi}$

(при $N = 0$), и если угловое ускорение окажется больше определенного этим уравнением, то робот будет вынужден совершить подскок. В тот момент, когда угловое ускорение, определенное уравнением $N = 0$, станет больше $\varphi''_{\max}$, максимально допустимое угловое ускорение маятника $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, которое и является управлением на оставшемся участке. Иными словами, для каждого набора (φ, φ') для исследуемых углов построенное управление обеспечивает максимум φ'' в заданных ограничениях задачи.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. Для рассматриваемого робота при заданных начальных условиях при движении корпуса ($x' > 0$) для всех положений маятника $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ максимально возможное ускорение обеспечивает максимум скорости центра масс $\dot{X}'_{cr}$.

Доказательство теоремы 1.

Предположим, что есть два разных управления: движение с максимальным угловым ускорением в имеющихся ограничениях задачи ($\varphi'' = \varphi''_{\max}$) и движение с ускорением φ''^* , где-то меньшим $\varphi''_{\max}$.

Отметим, что в общем случае $\varphi''_{\max}$ не равно $\varphi''_{\max}$, поскольку, например, условие $N \geq 0$ может накладывать более строгие границы на значение углового ускорения, чем $|\varphi''| \leq \varphi''_{\max}$.

Обозначим $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}'_0, \hat{x}'_0$ угол, угловую скорость маятника и скорость корпуса в момент, когда в первый раз управление $\varphi''^* \neq \varphi''_{\max}$.

Доказательство этой теоремы будет состоять из следующих шагов:

1. Сначала покажем, что управление вида $\varphi'' = a$ обеспечивает большую скорость центра масс, чем $\varphi'' = b$, где $a > b$, a, b — константы.

2. Покажем также, что управление вида $\varphi'' = a$ даст большую скорость центра масс, чем управление вида $\varphi'' = a$ до некоторого угла φ^* и $\varphi'' = b$ — после этого угла ($a > b$, a, b — константы).

3. Покажем, что управление вида $\varphi'' = a$ даст большую скорость центра масс, чем управление вида $\varphi'' = b$ до некоторого угла φ^* , и $\varphi'' = a$ — после этого угла ($a > b$, a, b — константы).

4. На основании ранее доказанных пунктов сделаем обобщение для доказательства утверждения теоремы 1.

Первый пункт доказательства рассмотрим в качестве отдельной леммы.

Лемма 1. При движении корпуса робота в положительном направлении, при заданных начальных условиях управление вида $\varphi'' = a$ обеспечивает большую скорость центра масс корпуса X'_{cr} для каждого угла $\hat{\varphi}_0 \leq \varphi \leq 2\pi$, чем управления вида $\varphi'' = b$, где $a > b$, a, b — константы.

Если уравнение (6) представить в безразмерных величинах (с помощью подстановок (10)), из него выразить ускорение центра масс и проинтегрировать, то получится, что скорость центра масс будет равна

$$X'_{cr} = -\mu(t + \varphi' \sin \varphi) + c. \quad (16)$$

Доказательство леммы 1 заключается в сравнении $X'_{cr_a} \vee X'_{cr_b}$ (здесь индексы отображают константы управления). Для доказательства $X'_{cr_a} > X'_{cr_b}$ нужно показать, что

$$t_a + \varphi'_a \sin \varphi < t_b + \varphi'_b \sin \varphi. \quad (17)$$

В уравнении (17) индексами отмечены величины, полученные при соответствующих константах управления. Детали сравнения из-за объемности рассуждений выходят за рамки данной статьи, отметим лишь, что доказательство не зависит от выбора $\hat{\varphi}_0$.

Если теперь положить, что после $\varphi = \hat{\varphi}_0$ управление $\varphi'' = a$, а потом для некоторого положения маятника $\varphi = \varphi^*$ происходит переключение на значение $\varphi'' = b$ (здесь $a > b$), то для каждого угла скорость центра масс будет не больше, чем для случая, где везде на этом участке движения управление равно a . Это следует из предыдущей леммы, поскольку доказательство не зависело от выбора угла $\hat{\varphi}_0$. Таким образом, был пояснен второй пункт доказательства теоремы 1.

Теперь рассмотрим случай, когда после $\varphi = \hat{\varphi}$ сначала движение робота совершается с ускорением $\varphi'' = b$ до угла φ^* , а потом происходит переключение на значение ускорения $\varphi'' = a$. Покажем, что этот случай также хуже с точки зрения средней скорости центра масс, чем управление вида $\varphi'' = a$ на всем участке торможения с трением.

Лемма 2. При движении корпуса робота в положительном направлении при заданных начальных условиях управление вида $\varphi'' = a$ обеспечивает большую скорость центра масс корпуса X'_{cr} для каждого угла $\hat{\varphi}_0 \leq \varphi \leq 2\pi$, чем управление вида $\varphi'' = b$ до некоторого угла $\varphi^* > \hat{\varphi}_0$ и управление вида $\varphi'' = a$ после, где $a > b$, a, b — константы.

Доказательство леммы 2.

Аналогично доказательству предыдущей леммы будем сравнивать скорости X'_{cr} , представленные через синус и время. Отбросим так же, как и там, константы интегрирования и домножение на $-\mu$ (так как они одинаковы) и будем сравнивать следующие величины:

$$t_{21} + \varphi'_{21} \sin \varphi < t_{22} + \varphi'_{22} \sin \varphi. \quad (18)$$

Слева в выражении (18) стоит величина, характеризующая скорость центра масс системы при управлении на всем рассматриваемом участке вида $\varphi'' = a$, а справа — величина, соответствующая скорости при втором варианте управления леммы. Здесь происходит сравнение для равных углов, поэтому времена и угловые скорости различны и помечены индексами. Случай, когда рассматриваемый угол меньше φ^* , рассмотрен в лемме 1, положим, что $\varphi > \varphi^*$.

Перенесем в левую часть выражения при синусах, а вправо — время:

$$(\varphi'_{21} - \varphi'_{22}) \sin \varphi \vee t_{22} - t_{21}.$$

Далее при доказательстве показывается, что с одной стороны $(\varphi'_{21} - \varphi'_{22}) > 0$, с другой стороны, $t_{22} > t_{11}$ (детали доказательства опущены в силу объемности). При этом $\sin \varphi \leq 0$ на рассматриваемом участке, поэтому неравенство (18) справедливо.

Это эквивалентно тому, что суммарное торможение системы для каждого из рассматриваемых углов оказывается меньше при $\varphi'' = a$. За торможение системы при движении отвечает сила трения, которая определяется значением силы нормальной реакции опоры N .

Благодаря лемме 2 можно также показать, что управление a - b - a хуже (с точки зрения скорости центра масс), чем управление a (a - b - a — это последовательность переключения углового ускорения) на рассматриваемом участке движения. Это следует из леммы 2, так как ключевым фактором при сравнении являлось равенство начальных условий для разных управлений.

Поскольку время движения по управлению b не играло никакой роли в доказательстве леммы 2, то его можно полагать сколь угодно малым, неравенство при этом сохранится.

Так как любое управление можно приблизить кусочно-постоянным, то, пользуясь леммами 1 и 2, можно показать, что управление вида $\varphi'' = \varphi''_{\text{maximum}}$ дает наилучший результат с точки зрения скорости центра масс робота.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для рассматриваемого робота при заданных начальных условиях при движении корпуса ($x' > 0$) для всех положений маятника $0 \leq \varphi \leq \pi$ минимально возможное ускорение обеспечивает максимум скорости центра масс X'_{cr} .

Доказательство следствия для участка движения робота от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ аналогично доказательству самой теоремы 1. Для доказательства используется переход в обратное время, остальные рассуждения такие же.

Рассмотрим случай, когда заданы граничные значения фазовых переменных, и определим управление между ними такое, что скорость центра масс системы максимальна. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Если для рассматриваемого робота:

1) при положении $\varphi = \varphi_2$ его угловая скорость $\varphi' = \varphi'_2$ и скорость корпуса $x' = x'_2$ такие, что $N(\varphi_2, \varphi'_2, \varphi''_{\max}) = 0$, $(\cos\varphi_2 + \mu\sin\varphi_2) > 0$ и $\varphi'_2 = \sqrt{2(1 + \cos\varphi_2)} |\operatorname{cosec}\varphi_2|$;

2) при положении $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$ угловая скорость маятника и скорость корпуса, равные φ'_1 и x'_1 , соответственно такие, что $N(\varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_{\max}) = 0$ и $\varphi'_1 = \sqrt{2(1 + \cos\varphi_1)} |\operatorname{cosec}\varphi_1|$;

3) x'_1 и x'_2 определяются управлением (14);

4) при управлении $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ для участка движения после угла φ_2 остановка корпуса происходит до вертикального положения маятника $\varphi = 2\pi$;

5) $\varphi''_{\max} > \mu$, то для каждого положения угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ максимальную скорость центра масс корпуса X'_{cr} будет обеспечивать следующее управление:

1) $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$;

2) $\varphi'' = \frac{\mu + \varphi'^2(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4$;

3) $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, $\varphi_4 \leq \varphi \leq \varphi_5$;

4) $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$, $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$.

Здесь углы переключения между участками управления те же, что и ранее, определенные управлением (14) ($\varphi_5 = \varphi_0 + 2\pi$).

Доказательство этой теоремы будет состоять из четырех шагов.

1. Покажем, что в фазе покоя при заданных граничных значениях управление строится из следующего соображения: сначала максимальный разгон маятника, потом — максимальное торможение.

2. Покажем, что выбор управления $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ будет давать наибольшее значение X'_{cr} для всех углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Рассуждения для последнего участка управления ($\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$) будут аналогичны.

3. Далее покажем, что при известных начальных условиях фазы покоя и при известном конечном угле и угловой скорости рассматриваемого участка (не обязательно конца фазы покоя) для всех промежуточных углов предложенное управление обеспечивает максимум скорости центра масс.

4. После этого с помощью доказанных пунктов обоснуем утверждение теоремы.

Первый пункт доказательства следует из следующей леммы.

Лемма 3. Во время фазы покоя управление (14) обеспечивает максимальную скорость вращения маятника на фазе покоя для каждого положения маятника и, соответственно, максимальную скорость центра масс системы X'_{cr} .

Доказательство данной леммы в данной статье приводиться не будет, оно подробно представлено в статье [14].

Рассмотрим второй пункт доказательства.

При рассматриваемых начальных условиях на момент t_2 (когда $\varphi = \varphi_2$) сила нормальной реакции опоры $N = 0$ при заданных $\varphi' = \varphi'_2$ и $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ (следует из первого пункта условий теоремы 2). Для углов $\varphi > \varphi_2$ при движении корпуса разрешенный максимум углового ускорения будет определяться ограничением $\varphi''_{\max} = \varphi''_{\max}$, N при этом станет положительной (для обеспечения нуля нормальной реакции опоры необходимо, чтобы $\varphi'' > \varphi''_{\max}$), и корпус робота начнет торможение.

Таким образом, можно воспользоваться теоремой 1, из которой следует, что вплоть до остановки корпуса ($\varphi_3 < 2\pi$ по условию) управление $\varphi''_{\max}$ будет обеспечивать максимум X'_{cr} для любого угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Вместе с тем, φ'_1 и x'_1 для угла $\varphi_1 + 2\pi$ определены таким образом, что до этого положения при движении корпуса нижнее ограничение на угловое ускорение равно минимально допустимому значению в рамках ограничений задачи $\varphi''_{\min} = -\varphi''_{\max}$. Управление, обеспечивающее максимум скорости X'_{cr} для каждого угла, на этом участке, согласно следствию 1, определяется минимальным значением углового ускорения $\varphi'' = \varphi''_{\min} = -\varphi''_{\max}$.

Таким образом, показано, что на каждом из участков движения по отдельности ($\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_5$ и $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$) предложенный закон управления обеспечивает максимум скорости центра масс системы X'_{cr} для всех промежуточных углов.

Рассмотрим теперь весь участок с остановки корпуса до $\varphi_1 + 2\pi$.

Лемма 4. Пусть выполняются следующие условия:

1) $\varphi''_{\max} \geq \mu$;

2) φ_3, φ'_3 — заданный угол и угловая скорость на начало фазы покоя, причем $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi_3 \leq 2\pi$;

3) φ_7, φ'_7 — заданный угол и угловая скорость конца рассматриваемого участка, причем $2\pi \leq \varphi_7 \leq \frac{5\pi}{2}$ и $N(\varphi_7, \varphi'_7, -\varphi''_{\max})$;

4) Участки управления 2—4 теоремы 2 могут перевести систему из начального состояния в конечное, при этом соответствующий угол переключения с 3 на 4 управления $\varphi_5 > 2\pi$.

Тогда управление 2—4 теоремы 2 для всех углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_7$ обеспечивает максимальную скорость центра масс системы.

Доказательство леммы 4.

Из доказательства леммы 3 (см. [14]) следует, что предложенное управление на всех углах $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_7$ обеспечивает максимум угловой скорости φ' .

Допустим, что $x'_7 > 0$ при угле φ_7 . Обозначим угол начала движения и соответствующую ему угловую скорость через φ_6 и φ'_6 , скорость корпуса в этот момент будет равна нулю по построению: $x'_6 = 0$.

Покажем, что любое другое управление обеспечит меньшую скорость центра масс системы для каждого угла.

Доказательство леммы состоит из следующих шагов:

1. Сначала рассматривается управление, при котором старт движения происходит до φ_6 . Для этого случая доказывается, что область пересечения положений маятника, при которых в заданных ограничениях задачи робот сможет сдвинуться с положения покоя, не пересекается с областью, в которой скорость центра масс робота больше, чем X'_{cr} при искомом управлении. Дальше на основании этого доказывается, что и на всем участке скорость центра масс окажется меньше при любом другом управлении, чем при искомом.

2. Затем рассматриваем случай, когда старт движения корпуса происходит при $\varphi_6^* > \varphi_6$. Обозначим скорость центра масс корпуса при искомом управлении для $\varphi = \varphi_6^*$ через X'_{cr62} , а при альтернативном — X'_{cr6^*} , соответственно. Покажем, что $X'_{cr62} > X'_{cr6^*}$. Это следует из того, что угловая скорость при искомом управлении по построению больше, чем при альтернативном, при этом скорость корпуса при искомом управлении больше нуля, т. е. каждое слагаемое, определяющее X'_{cr} ($X'_{cr} = x' + \varphi' \cos \varphi$) при искомом управлении больше. Далее рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

3. Осталось рассмотреть случай, когда при искомом управлении $x'_7 = 0$, тогда продолжим движение с имеющихся конечных условий при управлении $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$ вплоть до старта движения корпуса. Рассмотрим угол, следующий за углом для старта движения, и соответствующую ему угловую скорость как новые конечные условия. Доказательство выше показывает, что любое другое управление при любом угле будет давать меньшую скорость центра масс, в том числе и для угла φ_7 , который при данном подходе окажется промежуточным.

Детали доказательства леммы 4 выходят за рамки данной работы из-за большого объема.

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Угол φ_3 — это максимальный угол, при котором робот может продолжать движение с предложенным управлением. Если продолжить перемещение с управлением $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, то для углов $\varphi > \varphi_3$ робот будет вынужден скользить в обратную сторону, что невозможно в рамках рассматриваемого класса движений ($x' \geq 0$).

При этом при построенном управлении робот будет совершать остановку при меньшем угле, чем при любом другом управлении. Поясним это утверждение.

Если из уравнения (12) выразить x'' , то получается следующее выражение:

$$x'' = -\mu - \varphi''(\cos \varphi + \mu \sin \varphi) - \varphi'^2(\mu \cos \varphi - \sin \varphi). \quad (19)$$

Здесь коэффициент при $\varphi'' > 0$, в силу первого условия теоремы 2, положителен, кроме того, из

положительности $(\cos \varphi + \mu \sin \varphi)$ следует, что φ_2 находится в четвертой четверти, и коэффициент при φ'^2 также больше нуля. Таким образом, при больших значениях φ'' ускорение корпуса x'' уменьшается. Соответственно, угол остановки корпуса при $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ будет меньше, чем при любом другом управлении, где-то меньшем, чем ограничение.

Пусть X'_{cr3} — скорость центра масс корпуса для угла $\varphi = \varphi_3$ при управлении $\varphi'' = \varphi''_{\max}$. Допустим, существует некоторое другое управление φ''^* , где-то меньшее чем $\varphi''_{\max}$. Пусть X'_{cr3^*} — скорость центра масс для $\varphi = \varphi_3$ для этого управления. Тогда согласно теореме 1 $X'_{cr3^*} < X'_{cr3}$. При этом при рассматриваемом в теореме 2 управлении после остановки (после угла φ_3) скорость центра масс будет расти, а при управлении φ''^* будет продолжать падать вплоть до остановки корпуса, которая произойдет позже ($\varphi_3^* > \varphi_3$). Таким образом, и для любого угла $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_3^*$ скорость центра масс $X'_{cr3} < X'_{cr}$ (здесь X'_{cr3} соответствует скорости центра масс при управлении, отличном от рассматриваемого в теореме 2).

При положении маятника $\varphi = \varphi_3^*$ при управлении из теоремы 2 обозначим угловую скорость φ'_{31} , скорость центра масс — X'_{cr31} , а при альтернативном управлении — φ'_{31^*} и X'_{cr31^*} , соответственно. Выше показано, что $X'_{cr31^*} < X'_{cr31}$. Поскольку скорость корпуса при обоих управлениях для этого угла равна нулю, то это означает, что $\varphi_{31}^* < \varphi_{31}$.

Согласно лемме 4 управление, переводящее систему в состояние $\varphi_7 = \varphi_1 + 2\pi$, $\varphi'_7 = \varphi'_1$ из условий $(\varphi_3^*, \varphi'_{31^*})$, будет строиться аналогично искомому: сначала максимальный разгон маятника, потом максимальное торможение. При этом точка переключения с третьего участка управления на четвертый из условий теоремы 2 будет левее φ_5 , поскольку на всем участке разгона маятника траектория при управлении с $(\varphi_3^*, \varphi'_{31^*})$ будет идти ниже траектории, соответствующей начальным условиям $(\varphi_3^*, \varphi'_{31})$ (следует из единственности решения задачи Коши).

На рис. 2 представлена зависимость (φ, φ') для участка $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$. Заштрихованной области соответствует покой при искомом управлении. По построению предложенное управление для каждого угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ обеспечивает максимальное значение угловой скорости.

На рис. 2 цифрам соответствуют участки управления из условий теоремы 2. Точка φ_5^* — точка переключения с третьего на четвертое управление при начальных условиях на участке покоя $(\varphi_3^*, \varphi'_{31^*})$. Угол φ_5^* будет больше, чем φ_5 — угол соответствующего переключения при начальных условиях фазы покоя $(\varphi_3, \varphi'_{31})$. Отметим, что точка $(\varphi_5^*, \varphi_5'^*)$ будет принадлежать траектории и при искомом управлении (рис. 2). Это связано с тем, что точка $(\varphi_5^*, \varphi_5'^*)$ лежит на траектории, задаваемой четвертым участком управления теоремы 2, и имеет одни и те же

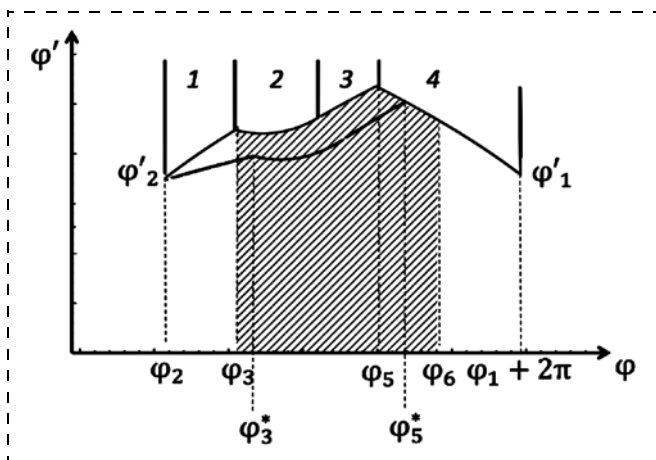


Рис. 2. Зависимость угловой скорости от угла при альтернативном и искомом управлении

конечные условия для обоих законов управлений — (φ_7, φ_7') .

При этом если $\varphi_5^* \leq \varphi_6$ (здесь φ_6 обозначен угол, при котором при искомом управлении робот начнет движение вперед), то это означает, что при угле φ_5^* при обоих управлениях робот покоится, и скорость центра масс одинакова. Остальное движение робота при обоих управлениях одно и то же. Таким образом, было показано, что при альтернативном управлении на всем участке $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_7 = \varphi_1 + 2\pi$ робот будет иметь скорость центра масс, не превышающую скорость при искомом управлении.

То же верно и при $\varphi_5^* \leq \varphi_6$. В этом случае робот при искомом управлении в точке φ_5^* будет иметь скорость центра масс большую, чем при альтернативном законе управления, поскольку угловые скорости равны, но при искомом управлении скорость корпуса робота будет положительна. Следовательно, и на всем участке $\varphi_5^* \leq \varphi \leq \varphi_7$ знак неравенства между скоростями центра масс сохранится.

Таким образом, было показано, что при заданных $(\varphi_2, \varphi_2', x_2')$ искомое управление переводит систему в состояние φ_7, φ_7' с максимальной скоростью центра масс при каждом промежуточном значении угла. Отметим, что получаемая при искомом управлении скорость корпуса x_7' совпадает со скоростью x_1' по условиям теоремы.

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. При заданных значениях угла, угловой скорости и скорости корпуса $(\varphi_2, \varphi_2', x_2')$ скорость x_1' максимальна для угла $\varphi_1 + 2\pi$ при угловой скорости φ_1' .

Замечание 3. При заданных значениях угла, угловой скорости и скорости корпуса $(\varphi_2, \varphi_2', x_2')$ угловая скорость маятника φ_1' максимальна для угла $\varphi_1 + 2\pi$ в заданных ограничениях задачи.

При больших угловых скоростях для данного положения маятника робот будет вынужден в какой-то момент осуществить подскок для совершения оборота маятника.

Теорема 3. Если для рассматриваемого робота:

1) при положении $\varphi = \varphi_2$ его угловая скорость $\varphi' = \varphi_2'$ и скорость корпуса $x' = x_2'$, такие что $N(\varphi_2, \varphi_2', \varphi_{\max}') = 0$, $(\cos\varphi_2 + \mu\sin\varphi_2) > 0$ и $\varphi_2' = \sqrt{2(1 + \cos\varphi_2)} |\operatorname{cosec}\varphi_2|$;

2) x_2' определяется управлением (14);

3) при управлении $\varphi'' = \varphi_{\max}''$ для участка движения после угла φ_2 остановка корпуса происходит до вертикального положения маятника $\varphi = 2\pi$;

4) $\varphi_{\max}'' > \mu$,

то для каждого положения угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ максимальную скорость центра масс корпуса X_{cr}' будет обеспечивать следующее управление:

1) $\varphi'' = \varphi_{\max}''$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$;

2) $\varphi'' = \frac{\mu + \varphi'^2(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4$;

3) $\varphi'' = \varphi_{\max}''$, $\varphi_4 \leq \varphi \leq \varphi_5$;

4) $\varphi'' = -\varphi_{\max}''$, $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$;

5) $\varphi'' = \frac{-1 - \varphi'^2\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $\varphi_1 + 2\pi \leq \varphi \leq \varphi_2 + 2\pi$.

Доказательство теоремы 3.

При доказательстве теоремы 2 было показано, что участки управления 1—4 рассматриваемой теоремы обеспечивают максимальную скорость центра масс системы для углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ при известных начальных условиях $(\varphi_2, \varphi_2', x_2')$ и конечных условиях по углу и угловой скорости $(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_1')$ (знание x_1' не обязательно согласно лемме 4). При этом было показано, что угловая скорость φ_1' максимальна для положения маятника $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$ (замечание 3).

Допустим, при $\varphi_1 + 2\pi$ угловая скорость $\varphi' = \varphi_7' < \varphi_1'$. Согласно теореме 2 участки управления 1—4 также обеспечивают оптимальное с точки зрения скорости центра масс корпуса перемещение робота для каждого угла φ .

Для определения точки переключения с третьего на четвертый участок управления теоремы 3 независимо интегрируется первое, затем второе и третье уравнение движения в прямом времени с заданных начальных условий (они фиксированы, поэтому это движение однозначно задано), и интегрируется уравнение движения на четвертом участке управления в обратном времени от конечных условий. Если на фазе движения значение X_{cr}' при $\varphi_1 + 2\pi$ меньше получаемого при предложенном управлении, то оно будет меньше на всем участке вплоть до точки пересечения с траекторией третьего управления (рис. 3). Обозначим угол, соответствующий точке пересечения траекторий, φ_5^* . Соответственно, для всех $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_5^*$, скорость центра масс будет одинакова для обоих случаев конечной угловой скорости, а для всех углов $\varphi_5^* < \varphi < \varphi_1 + 2\pi$ при $\varphi_7' < \varphi_1'$ будет меньше. Иными словами, максимальная скорость φ_1' позволяет достичь наи-

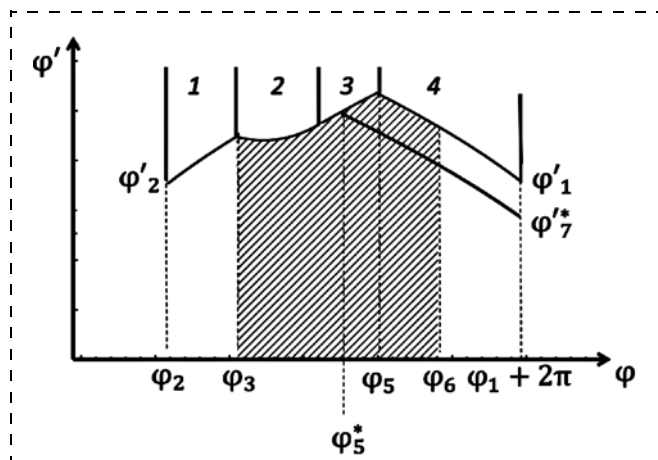


Рис. 3. Зависимость угловой скорости от угла при альтернативном и искомом управлении при фиксированных начальных условиях

большей скорости центра масс для каждого угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$.

Управление, обеспечивающее $N = 0$ при известных начальных условиях, обеспечивает максимум X'_{cr} , поскольку в рассматриваемых ограничениях такое управление обеспечивает максимальное горизонтальное ускорение центра масс системы $X''_{cr} = 0$. Поскольку φ_1 и φ'_1 соответствуют значениям из управления (14), а φ_2 и φ'_2 , получаются такими же, как в управлении (14), то действительно, пятое управление теоремы 3 может быть реализовано на этом участке, при этом обеспечивая максимум скорости центра масс X'_{cr} .

Теорема 3 доказана.

Для расширения класса движений, в котором полученное управление является оптимальным с точки зрения средней скорости робота будем варьировать начальные условия, а именно начальную угловую скорость маятника, и покажем, что ее выбор при заданных φ_2 и x'_2 оптимален.

Лемма 5. Если при положении маятника $\varphi = \varphi_2$ скорость корпуса равна x'_2 , а угловая скорость $\varphi'^* \neq \varphi'_2$, то либо скорость центра масс X'_{cr} будет оказываться меньше для каждого положения маятника, чем при рассматриваемом режиме, либо движение в рассматриваемом классе не осуществимо.

Доказательство леммы 5.

Случай $\varphi'^* > \varphi'_2$ аналогичен рассмотренному в замечании 3, т. е. при $\varphi'^* > \varphi'_2$ робот для того, чтобы попасть в этот угол с этой угловой скоростью, будет вынужден совершить подскок, что выходит за рамки рассматриваемого класса движений.

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным для обоснования выбора φ'_1 для угла $\varphi_1 + 2\pi$ в теореме 3, можно показать, что для любой угловой скорости $\varphi'^* < \varphi'_2$ скорость центра масс будет меньше для углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$. При этом, чтобы перевести систему в состояние $(\varphi_2 + 2\pi, \varphi'_2)$ в случае, если угловая скорость при $\varphi_1 + 2\pi$ меньше φ'_1 , необходимо на каком-то промежутке между углами

$\varphi_1 + 2\pi$ и $\varphi_2 + 2\pi$ иметь $N > 0$. Иными словами, на всем промежутке $\varphi_1 + 2\pi \leq \varphi \leq \varphi_2 + 2\pi$ скорость центра масс будет меньше или равна скорости, обеспечиваемой при искомом управлении. Таким образом показано, что на всем периоде при $\varphi'^* < \varphi'_2$ скорость центра масс будет меньше.

Лемма 5 доказана.

Заключение

В работе рассмотрено управление вибрационным роботом с симметричным ограничением на угловое ускорение (14). Показано, что в рассматриваемом классе движений при движении корпуса для всех положений маятника $0 \leq \varphi \leq \pi$ необходимо максимально тормозить вращение маятника, а на второй половине периода — разгонять.

Также показано, что при фиксированных значениях φ_2 , φ'_2 , x'_2 , соответствующих значениям в управлении (14), и при выполнении условий теоремы 3 управление (14) обеспечивает наибольшую скорость центра масс при каждом положении маятника, следовательно, и наибольшую среднюю скорость центра масс системы на периоде.

В статье также показано, что вариация значения φ'_2 при фиксированном значении x'_2 не дает улучшения скорости центра масс корпуса. Таким образом, построенный режим обеспечивает максимум средней скорости центра масс системы, если при $\varphi = \varphi_2$ скорость корпуса равна x'_2 . Знание угловой скорости для этого положения излишне, ее оптимальное значение оказывается равным предлагаемому в построенном законе управления.

Список литературы

1. Иванов А. П., Сахаров А. В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 763—772.
2. Лупехина И. В., Безмен П. А., Яцун С. Ф. Плоскопараллельное движение вибрационного робота по горизонтальной шероховатой поверхности // Естественные и технические науки. 2012. № 4 (60). С. 41—44.
3. Яцун С. Ф., Волкова Л. Ю. Моделирование динамических режимов вибрационного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением // Спецтехника и связь. 2012. № 3. С. 25—29.
4. Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 845—857.
5. Сахаров А. В. Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // ПММ. 2015. Т. 79, № 2. С. 196—209.
6. Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // ПММ. 2008. Т. 72, № 2. С. 216—229.
7. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 213—222.
8. Fang H. B., Xu J. Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass // Journal of Vibration and Control. 2011. Vol. 17, N. 1. pp. 19—26.
9. Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. С. 915—941.

10. **Chernous'ko F. L.** The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 72, N. 2. P. 126–135.

11. **Bolotnik N. N., Figurina T. Yu., Chernousko F. L.** Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium // *J. Appl. Math. Mech.* 2012. Vol. 76, N. 1. P. 1–14.

12. **Бардин Б. С., Панев А. С.** О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // *Труды МАИ*, 2015, № 84, 25.

13. **Vartholomeos P., Papadopoulos E.** Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators // *J. Dyn. Sys., Meas.* 2005. Control 128 (1). P. 122–133.

14. **Golitsyna M. V., Samsonov V. A.** Maximization of Average Velocity of Vibratory Robot (with One Restriction on Acceleration) // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2016. Vol. 181, P. 221–332.

Optimal Control of a Vibratory Robot Defined by a Choice of Angular Acceleration

M. V. Golitsyna, Kulikovskaya-Mary@yandex.ru,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Golitsyna Mariya V.**, PHD student,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: Kulikovskaya-Mary@yandex.ru

Accepted on October 04, 2017

There is considered a vibratory robot, presented by a rigid box and a physical pendulum inside it. The robot moves along a horizontal plane in the gravity field. There is a Coulomb friction between the box and the surface. Control of the robot is defined by the choice of angular acceleration of the pendulum. In the paper there is considered a certain class of motion and a control law that insures sliding of the robot in the desired direction within all given restrictions. The control insures periodic motion of the robot with two phases: sliding phase, where the main body of the robot is moving in the desired direction, and resting phase, where the box of the robot is standing still. On the sliding phase on the maximum interval within the given restrictions there is no friction between the body and the plane. In the paper there is proved that such control law is optimal in terms of maximum velocity for a certain motion class. First, there is shown that for the case when the box is sliding, when the pendulum is in one half of the period it is best to insure its maximum acceleration, and in the second part the angular acceleration should be at its minimum value. Then there is shown that for the motion within all given restrictions when there are set certain starting conditions and ending conditions on phase variables then the considered control law insures maximum average velocity of the robot. After that there is shown that there should be set conditions on phase variables for only one position of pendulum on the period. Lastly there is proved that for a certain angle there is needed to define only the speed of the box, optimum value of angular velocity of the pendulum appears to be as desired.

Keywords: Vibratory robot, control law, optimality, mathematical modeling, dry friction, restrictions, regimes, periodicity

For citation:

Golitsyna M. V. Optimal Control of a Vibratory Robot Defined by a Choice of Angular Acceleration, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 31–39.

DOI: 10.17587/mau.19.31-39

References

1. **Ivanov A. P., Saharov A. V.** *Dinamica tverdogo tela s povizhnymi vnutrennimi massami i rotorom na sherohovatoj ploskosti* (Dynamics of a rigid body with movable inner masses and a rotor on a rough surface), *Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 763–772 (in Russian).

2. **Lupchina I. V., Bezmen P. A., Yatsun S. F.** *Ploskoparallelnoe dvizhenie vibratsionnogo robota po gorizontalfnoi sherohovatoi ploskosti* (Plane-parallel motion of a vibratory robot on a rough horizontal plane), *Natural and technical sciences*, 2012, no. 60, pp. 41–44 (in Russian).

3. **Yatsun S. F., Volkova L. Yu.** *Modelirovanie dynamicheskikh rezhimov vibratsionnogo robota, peremshayushegosya po poverhnosti s vyazkim soprotivleniem* (Modeling of motion of a vibratory robot on a surface with viscous friction), *Special Vehicles and Commutations*, 2012, no. 3, pp. 25–29 (in Russian).

4. **Volkova L. Yu., Yatsun S. F.** *Upravlenie dvizheniem trehmassovogo robota, peremshayushegosya v zshidkoi srede* (Control of the three-mass robot moving in the liquid environment), *Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 5, pp. 845–857 (in Russian).

5. **Saharov A. V.** Rotation of a body with two movable internal masses on a rough plane, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 132–141.

6. **Bolotnik N. N., Figurina T. Yu.** Optimal control of the rectilinear motion of a rigid body on a rough plane by means of the motion of two internal masses, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 126–135 (in Russian).

7. **Chernous'ko F. L., Bolotnik N. N.** *Mobilnye roboti, upravlyayemye dvizheniem vnutrennih tel* (Mobile robots control by the motion of the inner masses), *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 213–222 (in Russian).

8. **Fang H. B., Xu J.** Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass, *Journal of Vibration and Control*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 19–26.

9. **Chernous'ko F. L.** *Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyayemogo posredstvom povizhnoy vnutrenney massy* (Analysis and optimization of a body, controlled by the movable inner mass), *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, pp. 915–941 (in Russian).

10. **Chernous'ko F. L.** The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 126–135.

11. **Bolotnik N. N., Figurina T. Yu., Chernousko F. L.** Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 1–14.

12. **Bardin B. S., Panev A. S.** *O periodicheskikh dvizheniyah tela s povizhnoy vnutrenney massoy po gorizontalfnoy ploskosti* (Periodic motion of a body with movable inner mass on a horizontal plane), *MAI Proceedings*, 2015, no. 84, pp. 25 (in Russian).

13. **Vartholomeos P., Papadopoulos E.** Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators, *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 2005, 128 (1), pp. 122–133.

14. **Golitsyna M. V., Samsonov V. A.** Maximization of Average Velocity of Vibratory Robot (with One Restriction on Acceleration), *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2016, vol. 181, pp. 221–332.