

**О. С. Козлов**, канд. техн. наук, доц., os.kozlov@gmail.com,  
**Л. М. Скворцов**, канд. техн. наук, зав. лаб., lm\_skvo@rambler.ru,  
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

## Решение задач теории автоматического управления в программном комплексе "МВТУ"

*В статье рассмотрены основные возможности программного комплекса "МВТУ" по решению задач анализа, синтеза, моделирования и параметрической оптимизации систем автоматического управления. Приведены примеры решения таких задач.*

**Ключевые слова:** программный комплекс, системы автоматического управления, моделирование, оптимизация, анализ, синтез

### Введение

Среди программных продуктов, используемых для исследования и проектирования систем автоматического управления (САУ) наиболее известны система MATLAB и входящие в ее состав пакеты Simulink, Control System, Robust Control и др. [1, 2], а также отечественные продукты ГАММА [3] и "МВТУ" [4–6]. В статье рассмотрен программный комплекс "Моделирование в технических устройствах" (ПК "МВТУ"), который по своим возможностям является альтернативой пакету имитационного моделирования Simulink. Как и в пакете Simulink, в ПК "МВТУ" принято представление математических моделей в виде структурных схем, блоки которых описываются дифференциальными и разностными уравнениями, непрерывными и дискретными передаточными функциями, алгебраическими соотношениями и логическими условиями. Обширная библиотека типовых блоков, встроенный язык программирования и удобный графический интерфейс обеспечивают построение и наглядное представление на экране компьютера самых разнообразных моделей.

ПК "МВТУ" реализует несколько режимов работы. Режим *Моделирование* обеспечивает имитационное моделирование непрерывных, дискретных и гибридных систем, в том числе и в реальном времени при наличии обмена данными с внешними программами и устройствами. Для оперативного управления процессом моделирования можно создать *Панель управления* с расположенными на ней виртуальными аналогами переключателей, ручных регуляторов, лампочек и измерительных приборов. Режим *Оптимизация* позволяет находить оптимальные параметры проектируемой системы. Режимы *Анализ* и *Синтез* обеспечивают решение задач исследования и проектирования САУ с использованием частотных и корневых методов.

ПК "МВТУ" успешно применяется при проектировании систем управления, следящих приводов и

роботов-манипуляторов, ядерных и тепловых энергетических установок. Данный ПК широко используется в учебном процессе, позволяя моделировать различные природные явления и технические объекты. Учебная версия ПК "МВТУ" вместе с необходимой документацией доступна в сети Интернет [3] и позволяет решать не только учебные, но и многие прикладные задачи. Рассмотрим основные возможности ПК "МВТУ" применительно к задачам исследования и проектирования САУ.

### 1. Построение модели

Библиотека типовых блоков ПК "МВТУ" разделена на следующие каталоги: *Источники, Данные, Операции математические, Векторные операции, Субструктуры, Динамические звенья, Нелинейные звенья, Логические звенья, Функции математические, Ключи, Дискретные звенья, Статистика, Внешние блоки, Анимация, Контроль и управление, Теплопроводность, Реакторные блоки, Кинетика нейтронов, Гидроавтоматика, Электромашин, Роботы.*

Модель формируется в виде структурной схемы, состоящей из типовых блоков, соединенных линиями связи (в том числе и векторными). Построение модели осуществляется с помощью графического редактора, позволяющего формировать многоуровневые структурные схемы. Подструктуры следующего уровня представлены в виде макроблоков, каждый из которых имеет внутреннюю структуру. В виде макроблоков сформированы, например, модели приводных устройств и элементов электрических схем [7].

Достоинством ПК "МВТУ" является наличие встроенного языка программирования, который можно использовать для формирования математических моделей и реализации алгоритмов их исследования. Диалоговое окно блока "Язык программирования" — это окно текстового редактора, в котором пользователь записывает математическую

модель в виде последовательности операторов. Язык программирования позволяет задавать алгебраические соотношения и дифференциальные уравнения, а также выполнять операции с действительными и комплексными матрицами и векторами, логическими переменными, геометрическими точками, полиномами. Среди конструкций языка — условные и безусловные переходы, циклы, пользовательские функции и процедуры. В пакете Simulink аналогичные возможности заложены в блоке "Embedded MATLAB Function", позволяющем создавать модели с помощью языка системы MATLAB. Но по сравнению с блоком "Язык программирования" ПК "МВТУ" этот блок имеет менее удобный интерфейс и низкую скорость счета.

Рассмотрим построение модели, описываемой передаточной функцией вида  $W(s) = B(s)/A(s)$ . Такая модель реализована в одном из типовых блоков, но ее можно реализовать и с помощью блока "Язык программирования". Применим один из способов формирования уравнений состояния [8], тогда программа этого блока, снабженная комментариями, запишется в следующем виде:

```
input u; //вход блока
const B = [30, 8], A = [30, 8, 1, 0, 05], m = cols(B) - 1, n = cols(A) - 1;
// B, A — коэффициенты числителя и знаменателя в порядке
// возрастания степеней s; m, n — степени полиномов B(s), A(s)
init x = n#0; //начальные условия
if m < n then y = x [n]/A [n + 1] else y = (x[n] + B[n + 1] * u) / A [n + 1];
x[1] = -A[1]*y; for (i = 2, n) x[i] = x[i - 1] - A[i]*y;
for (i = 1, min(m + 1, n)) x' [i] = x' [i] + B[i]*u;
output y; //выход блока
```

Параметры модели подразделяются на локальные параметры типовых блоков и глобальные параметры макроблоков либо всей модели. Локальные параметры задаются в диалоговом окне типового блока. Глобальные (именованные) параметры задаются в специальном окне макроблока и могут быть использованы во всех внутренних структурах этого макроблока. Любой параметр можно задать в виде выражения, содержащего имена уже определенных параметров, а при задании глобальных параметров можно использовать все средства языка программирования. Это удобно при создании сложных моделей, в которых параметры блоков зависят от некоторых общих для макроблока или всей модели параметров. Отметим, что в пакете Simulink нет аналогичных удобных средств для задания параметров.

При построении модели и решении некоторых задач используются глобальные переменные, задаваемые с помощью типового блока "В память". Параметром этого блока является имя, присваиваемое входной переменной. Типовой блок "Из памяти" позволяет выбрать одну из глобальных переменных, которая будет выходной переменной блока. С помощью этих блоков можно проводить невидимые линии связи между любыми уровнями структурной схемы. Глобальные переменные применяются для задания показателей качества при оптимизации,

а также для обозначения входов и выходов при расчете частотных характеристик и передаточных функций.

Для отображения результатов моделирования используются типовые блоки "Временной график", "Фазовый портрет", "График Y от X". Последний из них отображает зависимость, представленную в каждый момент модельного времени массивами X и Y. Графические окна, связанные с этими блоками, имеют средства для автоматического масштабирования, нахождения координат любой точки, оформления графиков. Дополнительные возможности предоставляет анимационная система ПК "МВТУ", позволяющая создавать виртуальные измерительные приборы и движущиеся объекты.

## 2. Моделирование

Когда модель построена, можно выполнить ее моделирование. Предварительно следует задать параметры моделирования: метод и интервал интегрирования, максимальный и минимальный шаг, точность решения и т. д. Дополнительно можно установить режим масштабирования времени с заданием множителя ускорения  $k$ . Тогда каждая секунда реального времени будет соответствовать  $k$  секундам модельного времени. Этот режим удобен при моделировании примеров с анимацией, а при моделировании в реальном времени он позволяет обеспечить синхронизацию обмена данными с внешними устройствами. В пакете Simulink такого режима нет, поэтому расчет примеров с анимацией на быстродействующих компьютерах выполняется очень быстро, и для его замедления приходится специально подбирать малый шаг интегрирования.

Для решения дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), описывающих динамику модели, в ПК "МВТУ" реализованы 10 явных и 6 неявных методов, информация о которых (а также о параметрах моделирования) содержится в работе [9]. Среди них — явные адаптивные методы, способные эффективно решать жесткие системы уравнений (обычно для решения таких систем применяют неявные методы [10]). В работе [9] показано, что при решении некоторых типов жестких систем явные адаптивные методы могут быть более эффективными и надежными, чем неявные методы.

При использовании явных методов алгебраические уравнения решаются независимо от дифференциальных, т. е. применяется метод пространства состояний [10]. В этом случае решение алгебраических уравнений выполняется одним из трех методов (простых итераций, Ньютона—Рафсона, Бroyдена). Такой способ позволяет решать только системы ДАУ индекса 1 (определение индекса ДАУ см. в работе [10]). При использовании неявных методов алгебраические и дифференциальные уравнения решаются совместно, т. е. применяется метод  $\epsilon$ -вложения [10]. Такой подход позволяет решать системы ДАУ высших индексов (выше первого), что

выгодно отличает ПК "МВТУ" от многих аналогичных систем моделирования. Отметим, что ДАУ высших индексов часто возникают при моделировании электротехнических и механических систем, а также при решении задач оптимального управления.

Удобным средством просмотра результатов в процессе моделирования является "горячая линия", которая инициализируется после двукратного щелчка левой клавишей мыши по линии связи. В результате появляется окно с текущими значениями сигналов в этой линии. Это позволяет посмотреть значение любой переменной в любой момент модельного времени, что упрощает отладку сложных моделей (в пакете Simulink подобное средство отсутствует). Средства диагностики обеспечивают выдачу сообщений об ошибках с указанием блока, где произошла ошибка.

### 3. Оптимизация

Для решения задачи оптимизации нужно задать оптимизируемые параметры и сформировать критерии качества. Оптимизируемые параметры задаем как глобальные параметры модели. Критерии качества вычисляются в процессе моделирования. Их следует сформировать с помощью типовых блоков и задать как глобальные переменные. Так можно сформировать практически любой критерий. В окне параметров оптимизации задаем ограничения снизу и сверху на оптимизируемые параметры и критерии качества. Оптимизация сводится к нахождению значений оптимизируемых параметров, при которых удовлетворяются все ограничения. Для решения этой задачи программа на основе частных критериев формирует общий критерий, который минимизируется с помощью поисковых алгоритмов. Условием окончания оптимизации является выполнение всех ограничений либо достижение заданной точности. Если на критерий наложить заведомо невыполнимые ограничения (например, если ограничение сверху меньше минимально возможного значения критерия), то он будет минимизирован либо максимизирован. В процессе оптимизации можно наблюдать, как изменяются переходные процессы, оптимизируемые параметры и критерии качества. Примеры решения задачи оптимизации САУ рассмотрены в работах [4, 5].

Аналогичным средством оптимизации в Simulink является пакет Nonlinear Control Design. Отличие от ПК "МВТУ" состоит в том, что в Simulink для формирования критериев качества используется ограниченный набор блоков, позволяющий формировать критерии только определенного вида.

### 4. Анализ и синтез САУ

В этих режимах программа выполняет линеаризацию САУ в окрестности текущей точки на траектории решения и последующий расчет частотных характеристик, коэффициентов, полюсов и нулей

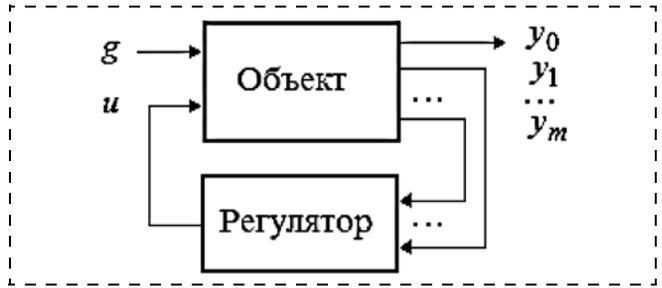


Рис. 1. Структура одномерной САУ

передаточных функций, параметров регулятора. Используются методы и алгоритмы, изложенные в работах [8, 11,12].

Расчет частотных характеристик выполняем путем подстановки  $s = j\omega$ ,  $z = e^{j\omega T}$  и решения полученной системы линейных алгебраических уравнений. Могут быть рассчитаны и построены частотные характеристики (вещественная, мнимая, амплитудная, фазовая), годографы Найквиста, Попова, Михайлова, кривая D-разбиения на плоскости одного комплексного параметра. Некоторые алгоритмы реализованы также в виде пользовательских процедур на языке программирования ПК "МВТУ".

Многие современные методы синтеза регуляторов реализованы в системе MATLAB, но не получили широкого практического применения [13]. Это объясняется рядом причин, среди которых — высокий порядок полученного регулятора и отсутствие простой связи между минимизируемым функционалом и применяемыми на практике показателями качества. Поэтому в ПК "МВТУ" реализованы частотный и корневой методы синтеза, основанные на традиционном подходе и позволяющие непосредственно по заданным техническим требованиям конструировать регуляторы низкого порядка.

В общем случае структура одномерной САУ имеет вид, показанный на рис. 1, где  $g$  — входное воздействие,  $y_0$  — выходная (управляемая) переменная,  $y_1, \dots, y_m$  — наблюдаемые переменные,  $u$  — сигнал управления. Реализованные в ПК "МВТУ" методы синтеза предполагают задание регулятора в виде векторной передаточной функции

$$\mathbf{K}(s) = [N_1(s), \dots, N_m(s)]/D(s). \quad (1)$$

Уравнения состояния такого регулятора имеют порядок, равный степени полинома  $D(s)$  [8]. В частном случае при  $m = 1$ ,  $y_1 = g - y_0$  получаем управление по выходу, а если  $y_1, \dots, y_m$  — переменные состояния объекта и  $\mathbf{K} = [k_1, \dots, k_m]$ , то получаем управление по состоянию. Предварительно можно задать некоторые из коэффициентов полиномов в соотношении (1) (например, из условий обеспечения заданных порядка астатизма и добротности), а остальные коэффициенты рассчитывает программа.

**Частотный метод.** Пользователь формирует две модели, одна из которых — модель синтезируемой

системы с передаточной функцией  $W(s)$ , а вторая (эталонная) имеет желаемую передаточную функцию  $\tilde{W}(s)$ . Формирование желаемой передаточной функции по заданным требованиям является нетривиальной задачей, поэтому в ПК "МВТУ" создан каталог эталонных моделей. Необходимо только выбрать нужную модель и задать ее параметры (обычно это значения добротности и запаса устойчивости по фазе, может быть также и первая сопрягающая частота). Расчет параметров регулятора выполняется интерполяционным методом [11], исходя из условий

$$W(j\omega_i) = \tilde{W}(j\omega_i), i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

которые представляют собой линейные алгебраические уравнения с комплексными коэффициентами относительно искомым параметров. Уравнения (2) приводятся к системе из  $2n$  уравнений с действительными коэффициентами. Пусть  $p$  — число неизвестных параметров регулятора, тогда из условия равенства числа уравнений и числа неизвестных получим при четном  $p$  число узловых частот  $n = p/2$ . При нечетном  $p$  для узловой частоты  $\omega_1$ , формируется одно уравнение из условия минимизации величины  $|W(j\omega_1) - \tilde{W}(j\omega_1)|^2$ , тогда число узловых частот  $n = (p + 1)/2$ .

Пример модели, подготовленной для синтеза частотным методом в ПК "МВТУ", приведен на рис. 2. На этом и последующих рисунках модель показана в том виде, котором она отображается на экране компьютера. Объект и эталонная система представлены в виде макроблоков, имеющих внутреннюю структуру. Регулятор представлен передаточной функцией, коэффициенты которой задаются в окне глобальных параметров. Блоки "В память" отображены как имена глобальных переменных ( $g, e, u, y, z$ ) и обозначают вход и выход синтезируемой и эталонной систем, а также вход и выход регулятора. В окне параметров частотного метода следует задать: тип регулятора (непрерывный или дискретный), период квантования (для дискретного регулятора), узловые частоты, вход и выход эталонной системы ( $g, z$ ), вход и выход синтезируемой системы ( $g, y$ ), выход и входы регулятора ( $u, e$ ), имена и размерности знаменателя и числителя передаточной функции регулятора. В общем случае регулятор может иметь несколько входов.

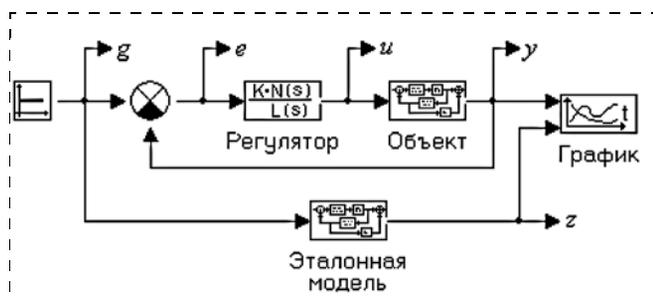


Рис. 2. Модель, подготовленная для синтеза частотным методом

**Корневой метод.** В окне параметров корневого метода следует задать: желаемое расположение доминирующих полюсов замкнутой системы, выход и входы регулятора, имена и размерности знаменателя и числителей передаточной функции регулятора. Число неизвестных параметров должно совпадать с числом задаваемых полюсов. В частном случае можно задать все полюсы, используя все переменные состояния объекта для формирования сигнала управления, что соответствует задаче модального управления в стандартной постановке. Нахождение неизвестных параметров регулятора сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [12].

## 5. Примеры решения задач

**Пример 1.** Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид  $W(s) = 4e^{-Ts}/(9 + s^2)$ . Требуется найти значения  $T$ , при которых замкнутая система устойчива. Задача имеет аналитическое решение  $\pi/\sqrt{5} < T < 2\pi/\sqrt{13}$ , но в общем случае такое решение может отсутствовать. Для решения задачи удобно воспользоваться критерием Найквиста. Функция  $W(s)$  не имеет полюсов в левой полуплоскости и имеет два полюса на мнимой оси. В этом случае кривая годографа  $W(j\omega)$  не должна охватывать точку  $-1 + j0$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , причем кривая имеет разрыв при  $\omega = 3$ , который следует дополнить дугой большого радиуса, направленной по часовой стрелке (поскольку фаза монотонно убывает). Для расчета годографа можно использовать режим *Анализ*. Но нам интересно посмотреть изменение годографа при непрерывном изменении  $T$ , для чего воспользуемся блоком "Язык программирования" для записи программы:

```
function W(s)
    T = time; //time — модельное время
    W = 4*exp(-T*s)/(9 + s^2);
end;
A = 0; fi = 0;
for (i = 1, N)
    begin
        freq = f1*(fn/f1) ^ ((i - 1)/(N - 1));
        c = W(1j*freq); Re[i] = real(c); Im[i] = imag(c);
        fi0 = fi; fi = arg(c); a = abs(c);
        if (fi0 < 0) and (fi > 0) then A = max(a, A);
    end;
output Re[N], Im[N], A;
```

Число точек характеристики  $N$ , а также начальную  $f1$  и конечную  $fn$  частоты задаем в окне глобальных параметров. Выходами являются массивы  $Re, Im$  точек годографа (они подаются на входы блока "График Y от X"), а также значение  $A$  максимальной амплитуды годографа при пересечении отрицательной полуоси. В процессе моделирования можно наблюдать, как изменяется годограф при изменении  $T$  (если расчет выполняется слишком быстро, то следует установить режим масштабирования времени). Границы интервала устойчивости находим как моменты пересечения переменной  $A$  единичного значения, для чего используем

блок "Уточнение пересечения". На рис. 3 приведены годографы Найквиста на границах и внутри полуоткрытого интервала устойчивости  $1,405 < T < 1,743$ .

**Пример 2.** Объект задан уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_2 + (u - x_2)^3; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 0,2(u - x_2); \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Нужно найти программное управление  $u(t)$ , которое обеспечивает переход выходной переменной  $x_2$  от 0 к 1 за минимальное время при ограничениях  $|\dot{x}_2| \leq 0,5$ ,  $|\ddot{x}_2| \leq 0,5$ . Искомое управление удовлетворяет условию

$$x_2(t) = y(t) = \begin{cases} 0,25t^2, & t < 1; \\ 0,5t - 0,25, & 1 \leq t < 2; \\ 1 - (0,5t - 1,5)^2, & 2 \leq t < 3; \\ 1, & t \geq 3. \end{cases} \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) представляют собой систему ДАУ, состоящую из дифференциальных уравнений (3) и алгебраического уравнения (4). Реализация этих уравнений в ПК "МВТУ" с использованием блоков "Язык программирования" имеет вид, показанный на рис. 4. Модель содержит блок " $F(Y) = 0$ ", выходная переменная которого находится из условия равенства нулю входного сигнала. Особенностью полученной системы является то, что при известных  $x_1$  и  $x_2$  уравнение (4) не может быть решено относительно  $u$ . Это означает, что индекс системы ДАУ больше 1 (в данном случае он равен двум). Используя один из неявных методов ПК "МВТУ", получим решение, приведенное на рис. 5. Такую же модель можно построить в пакете Simulink, но решение не будет получено, поскольку в среде MATLAB + Simulink принципиально невозможно решать ДАУ высших индексов.

**Пример 3.** В системе, модель которой приведена на рис. 2, объект задан передаточной функцией

$$G(s) = 1/(s + 1)^3. \quad (5)$$

Требуется найти регулятор минимального порядка, обеспечивающий 1-й порядок астатизма, добротность по скорости  $K_v = 2$  и запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi = 45^\circ$ . Воспользуемся частотным методом синтеза и выберем желаемую передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$\tilde{W}(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)} \quad (6)$$

(аппроксимация осуществляется в области низких и средних частот, поэтому выбрана передаточная функция низкого порядка). Постоянная времени  $T$  и частота среза  $\omega_c$  выражаются через задаваемые значения добротности по скорости  $K$  и запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi$  в виде

$$\omega_c = K/\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \Delta\varphi}, \quad T = \text{ctg} \Delta\varphi / \omega_c. \quad (7)$$

Попытка использовать ПИ регулятор  $K_I/s + K_P$  не позволила обеспечить заданные требования, по-

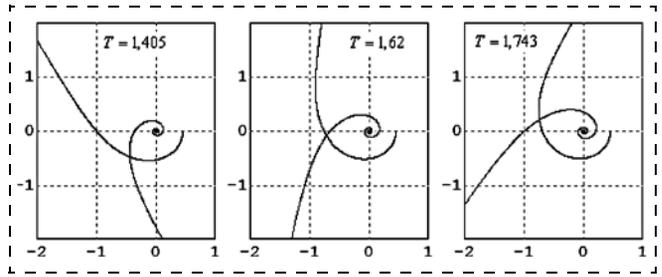


Рис. 3. Годографы Найквиста к примеру 1

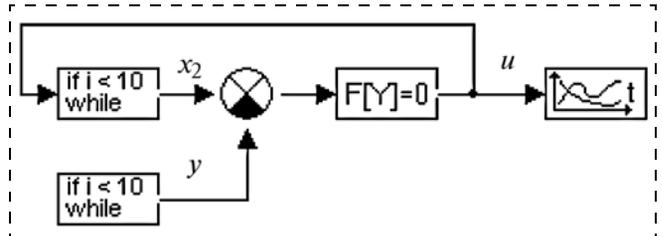


Рис. 4. Реализация системы ДАУ (3), (4) в ПК "МВТУ"

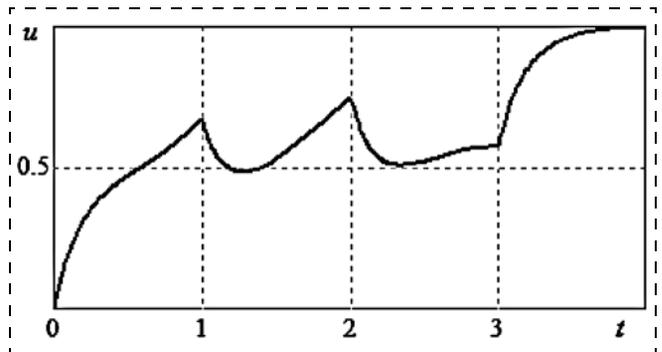


Рис. 5. Программное управление к примеру 2

этому был применен физически реализуемый ПИД регулятор  $(K_I + K_P s + K_D s^2)/(s(1 + \tau s))$ . В качестве узловых частот задавали  $\omega_c$  для ПИ и  $\omega_1 = 0,01$ ,  $\omega_2 = \omega_c$  для ПИД регулятора. Если в результате расчета значение  $\tau$  оказывалось отрицательным или очень малым, то выполняли синтез с заданным значением  $\tau = 0,1/\omega_c$ . Результаты синтеза при различных значениях  $K$  в соотношении (6) приведены в табл. 1, где  $\eta$  — степень устойчивости. Жирным шрифтом выделено решение, удовлетворяющее заданным требованиям. По заданным требованиям был также рассчитан дискретный регулятор с периодом квантования 0,05 с и передаточной функцией  $[55,9 - 116,14z + 60,34z^2]/(z^2 - z)$ .

Таблица 1

Результаты решения примера 3

Регулятор	$K$	$K_I = K_v$	$K_P$	$K_D$	$\tau$	$\eta$
ПИ	0,5	0,4104	0,2768	—	—	0,1889
	0,92	0,6471	1,3760	—	—	0,2865
	1,2	0,4648	2,1882	—	—	0,1682
ПИД	1	1,0000	1,6932	0,9590	0,1414	0,3701
	2	<b>2,0001</b>	<b>4,2820</b>	<b>3,1136</b>	<b>0,0707</b>	<b>0,6456</b>
	3	3,0006	5,4809	6,2045	0,0471	0,3937

Результаты решения примера 4

Регулятор	Полюсы		$K_I$	$K_P$	$K_D$	$\tau$
	Задаваемые	Остальные				
ПИ	$-0,3(1 \pm j)$	$-0,955; -1,445$	0,2484	0,2600	—	—
	$-0,4(1 \pm j)$	$-0,561; -1,639$	0,2944	0,4400	—	—
	$-0,5(1 \pm j)$	$-0,293; -1,707$	0,2500	0,5000	—	—
ПИД	$2\#-0,5(1 \pm j)$	$-2,000$	0,5000	1,2500	1,0000	1,0000
	$2\#-0,7(1 \pm j)$	$-7,600$	0,9864	1,9480	1,2616	0,1351
	$2\#-0,74(1 \pm j)$	$-37,5$	1,2007	2,2772	1,4453	0,0267
	$2\#-0,75(1 \pm j)$	$\infty$	1,2656	2,3750	1,5000	0
	$2\#-0,8(1 \pm j)$	$7,600$	1,6827	2,9853	1,8400	-0,1351

**Пример 4.** Для объекта (5) оценим возможности ПИ и ПИД регулятора при решении задачи заданного расположения наиболее близких к мнимой оси полюсов. Результаты приведены в табл. 2. Через  $2\#$  обозначена кратность пары комплексно-сопряженных полюсов. Заметим, что для ПИ регулятора сумма всех полюсов равна  $-3$ , а для ПИД регулятора эта сумма равна  $-3 - 1/\tau$ .

**6. Исследование адаптивной системы с ПИ регулятором**

Рассмотрим адаптивную систему, построенную с помощью интерполяционного метода [14]. Пусть  $K_P + K_I/s$  — передаточная функция регулятора, а  $G(s)$  и  $\tilde{W}(s)$  — передаточные функции объекта и разомкнутой эталонной системы. Настройка параметров регулятора осуществляется на основе условия

$$\left( K_P + \frac{K_I}{j\omega_c} \right) G(j\omega_c) = \tilde{W}(j\omega_c), \quad (8)$$

где частота настройки равна частоте среза эталонной системы  $\omega_c$ . Из соотношения (8) получаем

$$K_P = \operatorname{Re} \frac{\tilde{W}(j\omega_c)}{G(j\omega_c)}, \quad K_I = \operatorname{Re} \frac{\tilde{W}(j\omega_c)j\omega_c}{G(j\omega_c)}. \quad (9)$$

Таким образом, нахождение параметров регулятора сводится к оцениванию значений передаточных функций в заданной точке на мнимой оси. Схема оценивания на основе взвешенного метода наименьших квадратов была предложена в работе [14].

Модель адаптивной системы с ПИ регулятором, сформированная в ПК "МВТУ", показана на рис. 6, где модели регулятора, объекта и устройства адаптации представляют собой макроблоки, имеющие внутреннюю структуру. Модель устройства адаптации показана на рис. 7. На вход регулятора кроме сигнала ошибки с выхода устройства адаптации поступает векторный сигнал настраиваемых параметров  $Z = [K_P, K_I]$ . Устройство адаптации содержит в своем составе модель разомкнутой эталонной системы в виде передаточной функции  $V(s) = s\tilde{W}(s)$ .

Настройка контура адаптации на частоту  $\omega_c$  осуществляется двумя одинаковыми фильтрами с передаточной функцией  $F(s) = s^2/(\omega_c^2 + \beta^2) + 2\beta s + s^2$ , где  $\beta$  — скорость адаптации (подходящее значение

$\beta = 0,1\omega_c$ ). Передаточная функция  $H(s) = 1/s$  выбрана из условия  $H(j\omega_c) = 1/(j\omega_c)$ , что обеспечивает выполнение соотношения (9) для оценки  $K_P$ . Оценивание параметров регулятора с помощью экспоненциально взвешенного метода наименьших квадратов выполняется в блоке "Язык программирования" с подписью "МНК" (рис. 7), в котором записаны уравнения

$$\dot{K}_P = \frac{u_1 - K_P y_1}{v} y_1, \quad \dot{K}_I = \frac{u_2 - K_I y_1}{v} y_1, \quad \dot{v} = -\beta v + y_1^2, \\ K_P(0) = K_{P0}, \quad K_I(0) = K_{I0}, \quad v(0) = v_0 > 0.$$

Закон управления реализован в блоке "Регулятор" в виде

$$u(t) = K_P(t)x(t) + \int_0^t K_I(\tau)x(\tau)d\tau, \quad x(t) = e(t) + a\sin(\omega_c t),$$

где  $a$  — амплитуда испытательного воздействия. В ряде случаев адаптация успешно осуществляется без испытательного воздействия, т. е. при  $a = 0$ . Например, в системе могут возникать автоколебания

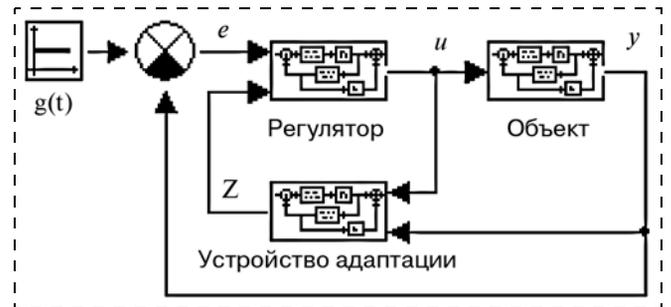


Рис. 6. Модель адаптивной системы

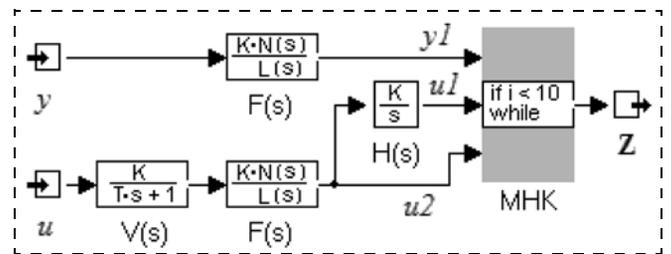


Рис. 7. Модель устройства адаптации

с нужной частотой (такой режим рассмотрен в работе [4]). Приводимый ниже пример также реализован при  $a = 0$ .

С построенной в ПК "МВТУ" моделью было проведено множество экспериментов при различных моделях объекта, входных воздействиях и параметрах адаптации. Наиболее результативными оказались эксперименты, проведенные в режиме масштабирования времени с использованием виртуального пульта управления, что позволяло оперативно изменять параметры объекта и адаптации в процессе моделирования.

Рассмотрим объект с запаздыванием из работы [15], уравнение которого имеет вид

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t - \tau) + f(t - \tau),$$

$$k = 3, T = 5, \tau = 1. \quad (10)$$

Задающее воздействие — ступенчатая функция  $g(t) = \{1, t \geq 0; 0, t < 0\}$ , а внешнее возмущение  $f(t) = 0,05\text{sign}(\sin(2,1t))$ . Коэффициент  $k$  скачком изменяется в моменты времени  $t_1 = 50$  с,  $t_2 = 100$  с, принимая значения  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 80$ . Требуется сформировать управление, при котором после окончания адаптации выполняется условие

$$|e(t)| = |g(t) - y(t)| \leq 0,015. \quad (11)$$

Для объекта (10) выполнение такого условия обеспечивает ПИ регулятор с коэффициентами  $K_P = 1,2$ ,  $K_I = 0,37$ , при этом установившаяся ошибка не превышает 0,01. Такая система имеет частоту среза  $\omega_c = 0,75$  и запас по фазе  $\Delta\varphi = 40^\circ$ . Эти значения были заданы в качестве параметров эталонной модели (6), (7). Начальные условия примем в виде  $K_{P0} = 1$ ,  $K_{I0} = 2$ ,  $v_0 = 10^{-5}$ . По сравнению с работой [15] был выбран более жесткий режим работы регулятора, при котором система неустойчива в начальный момент и теряет устойчивость при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ .

В рассмотренном примере корректировка параметров регулятора осуществляется только при нарушении условия (11), а при выполнении этого условия параметры регулятора фиксируются. График изменения ошибки приведен на рис. 8. Моделирование адаптивной системы в различных режимах изменения параметра  $k$  показало, что период адаптации после изменения  $k$ , как правило, не превышает 100 с, а после окончания этого периода ошибка не превышает 0,011. Эти показатели сохраняются даже при скачкообразном изменении  $k$  на несколько порядков. Многие другие адаптивные регуляторы

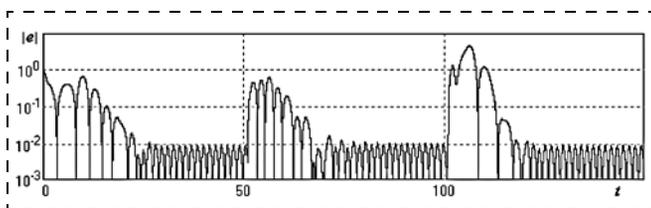


Рис. 8. Абсолютное значение сигнала ошибки в адаптивной системе

не могут быть применены в такой ситуации, поскольку для их успешной работы необходимо, чтобы система сохраняла устойчивость при скачкообразном изменении параметров объекта. Таким образом, исследование адаптивной системы с помощью ПК "МВТУ" подтвердило работоспособность предложенной схемы адаптации.

## Заключение

Опыт решения большого числа учебных, научных и прикладных задач показал, что ПК "МВТУ" является удобным и эффективным средством для исследования и проектирования самых разнообразных динамических систем (в том числе и САУ), не уступающим по своим возможностям лучшим зарубежным аналогам. Чтобы убедиться в этом, достаточно попробовать решить рассмотренные здесь примеры с помощью других программных продуктов (например, MATLAB + Simulink).

## Список литературы

1. Moore H. MATLAB for Engineers. 4th edition. Prentice Hall, 2014. 670 p.
2. Xue D., Chen Y. Q. Modeling, Analysis and Design of Control Systems with MATLAB and Simulink. Singapore: World Scientific, 2014. 580 p.
3. Александров А. Г., Михайлова Л. С., Степанов М. Ф. Система ГАММА-3 и ее применение // Автоматика и Телемеханика. 2011. № 10. С. 19—27.
4. Сайт разработчиков программного комплекса "МВТУ". URL: <http://mvtu.power.bmstu.ru/> (дата обращения 30.09.2015).
5. Козлов О. С., Кондаков Д. Е., Скворцов Л. М., Тимофеев К., Ходаковский В. В. Программный комплекс "Моделирование в технических устройствах". URL: <http://model.exponenta.ru/mvtu/20050615.html> (дата обращения 30.09.2015).
6. Козлов О. С., Кондаков Д. Е., Скворцов Л. М. и др. Исследование и проектирование систем автоматического управления с помощью программного комплекса "МВТУ" // Пленарные доклады и избранные труды Третьей международной конференции по проблемам управления. М.: Изд-во ИПУ РАН, 2006. С. 853—860.
7. Козлов О. С., Скворцов Л. М. Построение математических моделей электрических цепей в программных комплексах структурного моделирования // Инженерный вестник. 2012. № 7. URL: <http://engbul.bmstu.ru/doc/460380.html> (дата обращения 30.09.2015).
8. Крутько П. Д., Максимов А. И., Скворцов Л. М. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем. М.: Радио и связь, 1988. 306 с.
9. Козлов О. С., Скворцов Л. М., Ходаковский В. В. Решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений в программном комплексе "МВТУ". URL: <http://model.exponenta.ru/mvtu/20051121.html> (дата обращения 30.09.2015).
10. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
11. Скворцов Л. М., Козлов О. С., Ходаковский В. В. Синтез и самонастройка систем управления в частотной области // Вторая международная конференция по проблемам управления: Избранные труды. М.: Изд-во ИПУ РАН, 2003. Т. 2. С. 265—268.
12. Скворцов Л. М. Интерполяционные методы синтеза систем управления // Проблемы управления и информатики. 1998. № 6. С. 25—30.
13. Киселев О. Н., Поляк Б. Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию  $H^\infty$  и по критерию максимальной робастности // Автоматика и Телемеханика. 1999. № 3. С. 119—130.
14. Скворцов Л. М. Интерполяционный метод автоматической настройки регуляторов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 100—103.
15. Александров А. Г. Адаптивное управление объектом с запаздыванием // Труды IX Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением". Иркутск, 2007. Т. 3. С. 6—13.

# Solution of Control Theory Problems in the Software Package "MVTU"

**O. S. Kozlov**, os.kozlov@gmail.com, **L. M. Skvortsov**, lm\_skvo@rambler.ru✉,  
Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russia

Corresponding author: **Skvortsov Leonid M.**, PhD, Associate Professor, Head of Laboratory,  
Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation,  
e-mail: lm\_skvo@rambler.ru

Received on August 30, 2015

Accepted on September 10, 2015

The software package "MVTU" (Modeling in Technical Devices; in Russian — Modelirovanie V Tehnicheskikh Ustrojstvah) is intended for research and design of the systems described by the differential, algebraic and difference equations. Complex technical object is a controlled object, therefore in the package "MVTU", along with the methods of simulation, the methods of control theory are implemented. In terms of features this package is an alternative of package Simulink, which is a part of system of mathematical computations MA TLAB. As well as in the package Simulink, in the package "MVTU" representation of mathematical model in the form of block diagram is accepted. Blocks of such diagram are described by the differential and difference equations, continuous and discrete transfer functions, algebraic relations and logical conditions. The package "MVTU" implements the following operating modes. The operating mode Simulation provides simulation of continuous, discrete and hybrid systems, including in real time in the presence of data exchange with external programs and devices. The mode Optimization allows us to find optimum parameters of the designed system. The modes Analysis and Synthesis provide the solution of problems of research and design of control systems with use of frequency and root methods. The paper describes the main features of the package "MVTU" according to the solution of problems of the analysis, synthesis, simulation and parametric optimization of automatic control systems. Examples of the solution of such problems are given. Experience of the solution of a large number of educational, scientific and applied problems showed that the package MVTU doesn't concede by the opportunities to the best foreign analogs.

**Keywords:** software package, automatic control systems, simulation, optimization, analysis, synthesis

For citation:

**Kozlov O. S., Skvortsov L. M.** Solution of Control Theory Problems in the Software Package "MVTU", *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 1, pp. 3—10.

DOI: 10.17587/mau/17.3-10

## References

1. **Moore H.** MATLAB for Engineers, 4th edition, Prentice Hall, 2014, 670 p.
2. **Xue D., Chen Y. Q.** Modeling, Analysis and Design of Control Systems with MATLAB and Simulink, Singapore, World Scientific, 2014, 580 p.
3. **Aleksandrov A. G., Mikhailova L. S., Stepanov M. F.** Sistema GAMMA-3 i ee primenenie (GAMMA-3 system and its application), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2011, no. 10, pp. 19—27 (in Russian).
4. **Sajt** razrabotchikov programmnogo kompleksa "MVTU" (Site of developers of the software package "MVTU"), available at: <http://mvtu.power.bmstu.ru/> (in Russian).
5. **Kozlov O. S., Kondakov D. E., Skvortsov L. M., Timofeev K., Khodakovskii V. V.** Programmnij kompleks "Modelirovanie v tehnicheskikh ustrojstvah" (The software package "Modeling in Technical Devices"), available at: <http://model.exponenta.ru/mvtu/20050615.html> (in Russian).
6. **Kozlov O. S., Kondakov D. E., Skvortsov L. M.** i dr. Issledovanie i proektirovanie sistem avtomaticheskogo upravlenija s pomoshh'ju programmnogo kompleksa "MVTU" (Research and design of automatic control systems by means of the software package "MVTU"), *Plenarnye doklady i izbrannye trudy Tret'ej mezhdunarodnoj konferencii po problemam upravlenija*, Moscow, Publishing house of IPU RAN, 2006, pp. 853—860 (in Russian).
7. **Kozlov O. S., Skvortsov L. M.** Postroenie matematicheskikh modelej jelektricheskikh cepej v programmnih kompleksah strukturnogo modelirovanija (Building of mathematical models of electric circuits in the software of structural modeling), *Inzhenernyj Vestnik*, 2012, no. 7, available at: <http://engbul.bmstu.ru/doc/460380.html> (in Russian).
8. **Krut'ko P. D., Maksimov A. I., Skvortsov L. M.** *Algoritmy i programmy proektirovanija avtomaticheskikh sistem* (Algorithms and programs for design of automatic systems), Moscow, Radio i svjaz', 1988, 306 p (in Russian).
9. **Kozlov O. S., Skvortsov L. M., Hodakovskij V. V.** Reshenie differencial'nyh i differencial'no-algebraicheskikh uravnenij v programnom komplekse "MVTU" (Solution of differential and differential-algebraic equations in the software package "MVTU"), available at: <http://model.exponenta.ru/mvtu/20051121.html> (in Russian).
10. **Hairer E., Wanner G.** Solving ordinary differential equations. Stiff and differential-algebraic problems, Berlin, Springer-Verlag, 1996.
11. **Skvortsov L. M., Kozlov O. S., Hodakovskij V. V.** Sintez i samonastrojka sistem upravlenija v chastotoj oblasti (Synthesis and self-tuning of control systems in frequency area), *Vtoraja mezhdunarodnaja konferencija po problemam upravlenija: Izbrannye trudy*, Moscow, Publishing house of IPU RAN, 2003, vol. 2, pp. 265—268 (in Russian).
12. **Skvortsov L. M.** Interpoljacionnye metody sinteza sistem upravlenija (Interpolation methods for synthesis of control systems), *Problemy Upravlenija i Informatiki*, 1998, no. 6, pp. 25—30 (in Russian).
13. **Kiselev O. N., Poliak B. T.** Sintez reguljatorov nizkogo porjadka po kriteriju  $H^\infty$  i po kriteriju maksimal'noj robnosti (Synthesis of low-order controllers by the  $H^\infty$  and the maximum robustness criteria), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1999, no. 3, pp. 119—130 (in Russian).
14. **Skvortsov L. M.** Interpoljacionnyj metod avtomaticheskogo nastrojki reguljatorov (The interpolation method for auto-tuning of controllers), *Izv. RAN. Teorija i Sistemy Upravlenija*, 1998, no. 6, pp. 100—103 (in Russian).
15. **Aleksandrov A. G.** Adaptivnoe upravlenie ob'ektom s zapazdyvaniem (Adaptive control of object with delay), *Trudy IX Mezhdunarodnoj Chetaevskoj konferencii "Analiicheskaja mehanika, ustojchivost' i upravlenie dvizheniem"*, Irkutsk, 2007, vol. 3, pp. 6—13 (in Russian).