For citation:

Tyagunov O. A., Teplov M. A. A Problem of the Software Implementation of the Execution Level Control Actions of a Heavy Autonomous Mobile Robot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no 12, pp. 822—828.

DOI: 10.17587/mau/16.822-828

References

1. **Burdakov S. F., Miroshnik I. V., Stel'makov P. E.** *Sistemy upravleniya dvizheniem kolesnykh robotov* (Wheeled Robots' Motion Control System), Saint Petersburg, Nauka, 2001, 227 p. (in Russian).
2. **Martynenko Yu. G.** *Upravlenie dvizheniem mobil'nykh kolesnykh robotov* (Wheeled Mobile Robots Motion Control), Fundamental'naya i prikladnaya matematika, 2005, vol. 11, no. 8, pp. 29—80 (in Russian).
3. **Emel'yanov S. N., Platonov A. K., Yaroshevskii V. S.** *Sistema upravleniya polnoprivodnogo trekhkolesnogo dvizhitelya, Mobil'nye roboty i mekhatronnye sistemy* (All-Three-Wheel-Drive Locomotor Control System, Mobile Robots and Mechatronics Systems), Moscow, Izdatel'svo MGU, 2000, pp. 89—99 (in Russian).
4. **Ploeg J., Vissers John P. M., Nijmeijer H.** Control design for an overactuated wheeled mobile robot, *4th IFAC Symposium on Mechatronics Systems.* Eds. IFAC, Heidelberg, Germany, 2006, pp. 127—132.
5. **Braunl T.** Embedded robotics: mobile robot design and applications, Springer Verlag, 2006, 210 p.
6. **Calisia D., locchi L., Nardia D., Scalzoa C. M., Ziparoa V. A.** Context-based design of robotic systems, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 56, No. 11, 2008, pp. 992—1003.
7. **Tyagunov O. A., Teplov M. A.** *Nastroika tipovykh pegulyatorov dlya stabilizatsii skorosti dvizheniya mobil'nogo robototekhnicheskogo kompleksa s ispol'zovaniem tekhnologii postroeniya Paretooptimal'nykh reshenii* (Adjustment of the Typical Regulators in the Speed Stabilization System of the Mobile Robotic Complex Using Pareto-Optimization Solutions), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2013, no. 4, pp. 19—25 (in Russian)
8. **Tyagunov O. A., Teplov M. A.** *Pareto-optimal'naya nas troika tipovykh pegulyatorov v sisteme stabilizatsii kursa mobil'nogo robototekhnicheskogo kompleksa* (Pareto-Optimal Adjustment of the Typical Regulators in the Azimuth Stabilization System of the Mobile Robotic Complex), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 23—29 (in Russian).
9. **Bekker M. G.** Introduction to Terrain-Vehicle Systems, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1969, 566 p.
10. **Wong J. Y.** Theory of ground vehicle, N.Y., John Wiley, 1978, 232 p.
11. **Wong J. Y.** Terramechanics and off-road vehicle engineering, Elsevier, 2010, 468 p.
12. **Zabavnikov N. A.** *Osnovy teorii transportnykh gusenichnykh mashin* (Fundamentals of Theory of Transport Tracked Vehicles), Moscow, Mashinostroenie, 1975, 448 p. (in Russian)
13. **Pospelov D. A.** *Situatsionnoe upravlenie: teoriya i praktika* (Situational Control: Theory and Practice), Moscow, Nauka, 1986, 228 p. (in Russian)
14. **Katunskii A. M.** *Vozhdenie tankov* (Tank Driving), Moscow, Voenizdat, 1976, 176 p. (in Russian)
15. **Kondrashina E. Yu., Litvintseva L. V., Pospelov D. A.** *Predstavlenie znanii o vremeni i prostranstve v intellektual'nykh sistemakh* (Representation of knowledge on time and space in intellectual systems), Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1989, 328 p. (in Russian).
16. **Osugi S., Saeki Yu. ed.** *Priobretenie znanii* (Knowledge Acquisition. Trans. from Jap. Ed. by S. Osuga, Y. Saeki), Moscow, Mir, 1990, 304 p. (in Russian).
17. **Available** at: www.robsim.dynsoft.ru.
18. **Available** at: www.umlab.ru.
19. **Alberg J. H., Nilson E. H., Walsh J. L.** The theory of splines and their applications, N.Y. Lon., Academic Press, 1967, 316 p.
20. **Solodovnikov V. V., Filimonov N. B.** *Dinamicheskoe kachestvo sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (The dynamic quality of automatic control systems), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. E. Baumana, 1987, 84 p. (in Russian)
21. **Boltyanski V. G., Poznyak A. S.** The robust maximum principle, Birkhauser, 2012, 455 p.

УДК 531.3 DOI: 10.17587/mau.16.828-835

А. В. Борисов, канд. техн. наук, доц., BorisowAndrej@yandex.ru,
Филиал ФГБОУ ВПО НИУ "МЭИ" в г. Смоленске

Автоматизация разработки трехмерных моделей экзоскелетов со звеньями переменной длины[1]

Рассматриваются трехмерные модели экзоскелетов со звеньями переменной длины. На основании анализа уравнений для стержневых механических систем с различным числом звеньев строится обобщение уравнений движения экзоскелетов в векторно-матричном виде. Выводятся формулы для элементов каждой матрицы, входящей в уравнения. В результате становится возможным автоматизированно записывать уравнения движения для стержневых n-звенных систем типа трехмерной модели экзоскелета, минуя этап их составления, в чем и заключается новизна исследования.

Ключевые слова: *уравнения движения, изменение длины звена, матрица, механическая стержневая система, экзоскелет, антропоморфный робот, протез, опорно-двигательный аппарат человека, трехмерное пространство*

Введение

При исследовании сложных механических систем с большим числом степеней свободы составление дифференциальных уравнений движения представляет значительные трудности. Для стержневых систем с шарнирами, к которым относятся экзоскелеты и антропоморфные роботы, состоящих из длинных кинематических цепей, применение уравнений Лагранжа второго рода приводит к практически экспоненциальному росту объема вычислений, необходимых для записи дифференциальных уравнений движения, в зависимости от числа звеньев [1]. Для решения подобных задач необходимо создавать методы и алгоритмы компьютерно-ориентированного автоматического синтеза уравнений движения механических систем [2]. Алгоритмизации составления математических моделей с помощью компьютера посвящено много работ [1—4 и др.].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-97512 р_центр_а).

В данной работе рассматривается специальный класс экзоскелетов, антропоморфных и манипуляционных роботов со звеньями переменной длины. Все они могут быть описаны в рамках одной модели с незначительными изменениями. Предлагается новый эффективный автоматизированный метод моделирования и компьютерной записи дифференциальных уравнений движения на основании обобщения матриц коэффициентов и рекуррентных алгоритмов для пространственной модели стержневой механической системы антропоморфного типа.

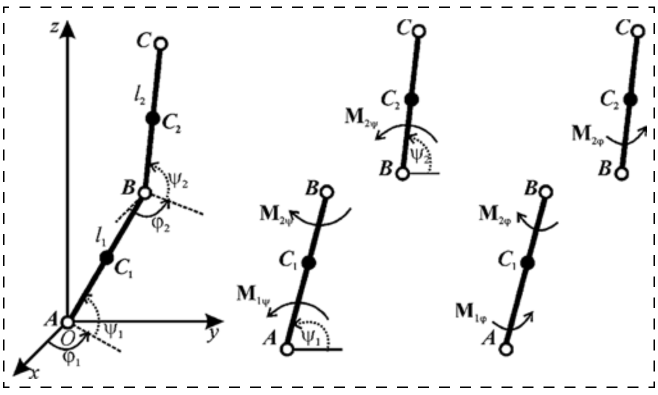
В работе [5] была предложена модель автоматизации составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета. Однако рассмотренная модель была двумерной, и движение описывалось на плоскости. В научной литературе также имеются обширные исследования двумерных моделей антропоморфных роботов и экзоскелетов [6—10 и др.]. Они имеют важное теоретическое значение, но не могут быть применены непосредственно на практике. Необходимы трехмерные модели, которые можно практически реализовать.

Данная статья является продолжением вышеуказанной работы [5], но для случая трехмерной модели. Простой переносимости результатов двумерной модели не получается, поэтому работа представляет самостоятельное направление в исследовании стержневых систем.

Стержневыми системами можно моделировать антропоморфные роботы, экзоскелеты, элементы протезов, производственные манипуляторы. В настоящее время большинство предлагаемых моделей имеют абсолютно твердые звенья, которые не соответствуют реальности, особенно опорно-двигательному аппарату человека. Поэтому необходимы модели, учитывающие изменения длин звеньев механической системы.

1. Описание математической модели

Двухмерные модели с деформируемыми звеньями были исследованы ранее в работе [5]. Опираясь на полученные ранее результаты и отработанные методы, составим уравнения движения для трехмерной модели.



Модель трехмерной механической системы типа экзоскелета с двумя подвижными звеньями переменной длины

Рассмотрим двухзвенную механическую систему в пространстве (см. рисунок).

Положения центров масс звеньев определяются для каждого звена двумя углами — φ_i ($i = 1, 2$), отсчитываемыми от оси Ox против часовой стрелки до проекции звена l_i ($i = 1, 2$) на плоскость xOy; ψ_i ($i = 1, 2$), отсчитываемыми от проекции звена l_i ($i = 1, 2$) на плоскость xOy против часовой стрелки, — и изменением длины звена l_i ($i = 1, 2$). Эти параметры считаем функциями времени: $\varphi_i = \varphi_i(t)$, $\psi_i = \psi_i(t)$, $l_i = l_i(t)$, ($i = 1, 2$). Следовательно, модель имеет шесть параметров, однозначно определяющих ее положение.

Координаты центра масс первого звена записываются следующим образом:

$$x_{C1} = l_1 n_1 \cos\psi_1 \cos\varphi_1,\ y_{C1} = l_1 n_1 \cos\psi_1 \sin\varphi_1,$$
$$z_{C1} = l_1 n_1 \sin\psi_1. \quad (1)$$

Координаты центра масс второго звена имеют вид:

$$x_{C2} = l_1 \cos\psi_1 \cos\varphi_1 + l_2 n_2 \cos\psi_2 \cos\varphi_2,$$
$$y_{C2} = l_1 \cos\psi_1 \sin\varphi_1 + l_2 n_2 \cos\psi_2 \sin\varphi_2,$$
$$z_{C2} = l_1 \sin\psi_1 + l_2 n_2 \sin\psi_2. \quad (2)$$

Составляя уравнения аналогично двухмерному случаю [5] с использованием формализма Лагранжа, получаем следующие уравнения движения:

$$(I_{1x} + l_1^2(m_2 + m_1 n_1^2)\cos^2\psi_1)\ddot\varphi_1 +$$
$$+ l_1 l_2 m_2 n_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \cos\psi_2 \ddot\varphi_2 +$$
$$+ l_1 l_2 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \sin\psi_2 \ddot\psi_2 -$$
$$- l_1 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \cos\psi_2 \ddot l_1 +$$
$$+ l_1 l_2 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \cos\psi_2 \dot\varphi_2^2 +$$
$$+ l_1 l_2 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \cos\psi_2 \dot\psi_2^2 +$$
$$+ 2 l_1 (m_2 + m_1 n_1^2)\cos^2\psi_1 \dot l_1 \dot\varphi_1 +$$
$$+ 2 l_1 m_2 n_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \cos\psi_2 \dot l_2 \dot\varphi_2 -$$
$$- 2 l_1^2 (m_2 + m_1 n_1^2)\cos\psi_1 \sin\psi_1 \dot\varphi_1 \dot\psi_1 -$$
$$- 2 l_1 l_2 m_2 n_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \sin\psi_2 \dot\varphi_2 \dot\psi_2 +$$
$$+ 2 l_1 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1 \sin\psi_2 \dot l_2 \dot\psi_2 = M_{1\varphi} - M_{2\varphi}; \quad (3)$$
$$- l_1 l_2 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1 \cos\psi_2 \ddot\varphi_2 +$$
$$+ (I_{1y} + l_1^2(m_2 + m_1 n_1^2))\ddot\psi_1 +$$
$$+ l_1 l_2 m_2 n_2 (\cos\psi_1 \cos\psi_2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1 \sin\psi_2)\ddot\psi_2 -$$
$$- l_1 m_2 n_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1 \cos\psi_2 - \cos\psi_1 \sin\psi_2)\ddot l_2 +$$
$$+ l_1^2 (m_2 + m_1 n_1^2)\cos\psi_1 \sin\psi_1 \dot\varphi_1^2 +$$
$$+ l_1 l_2 m_2 n_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1 \cos\psi_2 \dot\varphi_2^2 +$$
$$+ l_1 l_2 m_2 n_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1 \cos\psi_2 - \cos\psi_1 \sin\psi_2)\dot\psi_2^2 -$$
$$- 2 l_1 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1 \cos\psi_2 \dot l_2 \dot\varphi_2 +$$

$$+ 2l_1l_2m_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1\sin\psi_2\dot\varphi_2\,\dot\psi_2 +$$
$$+ 2l_1(m_2 + m_1n_1^2))\dot l_1\,\dot\psi_1 +$$
$$+ 2l_1m_2n_2(\cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1\sin\psi_2)\dot l_2\,\dot\psi_2 +$$
$$+ gl_1(m_2 + m_1n_1)\cos\psi_1 = M_{1\psi} - M_{2\psi}; \quad (4)$$

$$l_1l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\ddot\varphi_1 +$$
$$+ (I_{2x} + l_2^2m_2n_2^2\cos^2\psi_2)\ddot\varphi_2 -$$
$$- l_1l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1\cos\psi_2\ddot\psi_1 +$$
$$+ l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\ddot l_1 -$$
$$- l_1l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\dot\varphi_1^2 -$$
$$- l_1l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\dot\psi_1^2 +$$
$$+ 2l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_2\cos\psi_1\dot l_1\,\dot\varphi_1 +$$
$$+ 2l_2m_2n_2^2\cos^2\psi_2\dot l_2\,\dot\varphi_2 - 2l_1l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \cos\psi_2\sin\psi_1\dot\varphi_1\,\dot\psi_1 - 2l_2^2m_2n_2^2\cos\psi_2\sin\psi_2\dot\varphi_2\,\dot\psi_2 -$$
$$- 2l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_2\sin\psi_1\dot l_1\,\dot\psi_1 = M_{2\varphi}; \quad (5)$$

$$l_1l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_2\cos\psi_1\ddot\varphi_1 +$$
$$+ l_1l_2m_2n_2(\cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1\sin\psi_2)\ddot\psi_1 +$$
$$+ (I_{2y} + l_2^2m_2n_2^2)\ddot\psi_2 + l_2m_2n_2(\sin\psi_1\cos\psi_2 -$$
$$- \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\sin\psi_2)\ddot l_1 + l_1l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \sin\psi_2\cos\psi_1\dot\varphi_1^2 + l_2^2m_2n_2^2\sin\psi_2\cos\psi_2\dot\varphi_2^2 +$$
$$+ l_1l_2m_2n_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\sin\psi_2 - \cos\psi_2\sin\psi_1)\dot\psi_1^2 +$$
$$+ 2l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_2\cos\psi_1\dot l_1\,\dot\varphi_1 -$$
$$- 2l_1l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_2\sin\psi_1\dot\varphi_1\,\dot\psi_1 +$$
$$+ 2l_2m_2n_2(\cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1\sin\psi_2)\dot l_1\,\dot\psi_1 +$$
$$+ 2l_2m_2n_2^2\dot l_2\,\dot\psi_2 + gl_2m_2n_2\cos\psi_2 = M_{2\psi}; \quad (6)$$

$$l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\ddot\varphi_2 +$$
$$+ l_2m_2n_2(\sin\psi_1\cos\psi_2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\sin\psi_2)\ddot\psi_2 +$$
$$+ (m_2 + m_1n_1^2)\ddot l_1 + m_2n_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2 +$$
$$+ \sin\psi_1\sin\psi_2)\ddot l_2 - l_1(m_2 + m_1n_1^2)\cos^2\psi_1\dot\varphi_1^2 -$$
$$- l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\dot\varphi_2^2 -$$
$$- l_1(m_2 + m_1n_1^2)\dot\psi_1^2 - l_2m_2n_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2)\dot\psi_2^2 + 2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \cos\psi_1\cos\psi_2\dot l_2\,\dot\varphi_2 - 2l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \cos\psi_1\sin\psi_2\dot\varphi_2\dot\psi_2 + 2m_2n_2(\sin\psi_1\cos\psi_2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \cos\psi_1\sin\psi_2)\dot l_2\,\dot\psi_2 + g(m_2 + m_1n_1)\sin\psi_1 = -k_1\Delta l_1; \quad (7)$$

$$-l_1m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\ddot\varphi_1 -$$
$$- l_1m_2n_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_2\sin\psi_1 - \cos\psi_1\sin\psi_2)\ddot\psi_1 +$$
$$+ m_2n_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2)\ddot l_1 +$$
$$+ m_2n_2^2\ddot l_1 - l_1m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2\dot\varphi_1^2 -$$
$$- l_2m_2n_2^2\cos^2\psi_2\dot\varphi_2^2 - l_1m_2n_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2 +$$
$$+ \sin\psi_1\sin\psi_2)\dot\psi_1^2 - l_2m_2n_2^2\dot\psi_2^2 - 2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \cos\psi_2\cos\psi_1\dot l_1\,\dot\varphi_1 + 2l_1m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \times$$
$$\times \cos\psi_2\sin\psi_1\dot\varphi_1\,\dot\psi_1 - 2m_2n_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\psi_1\cos\psi_2 -$$
$$- \cos\psi_1\sin\psi_2)\dot l_1\,\dot\psi_1 + gm_2n_2\sin\psi_2 = -k_2\Delta l_2. \quad (8)$$

В результате записаны уравнения движения для двухзвенной стержневой механической системы в трехмерном пространстве.

В результате анализа видно, что уравнения движения в трехмерном пространстве стержневой механической системы с деформируемыми звеньями представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений вектора угловых переменных, которые можно записать в матричной форме. Индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты. Уравнения, описывающие изменение угла φ в матричной форме, имеют вид:

$$A_\varphi(\varphi, \psi, l)\ddot\varphi + B_\varphi(\varphi, \psi, l)\ddot\psi + C_\varphi(\varphi, \psi, l)\ddot l +$$
$$+ D_\varphi(\varphi, \psi, l)\dot\varphi^2 + E_\varphi(\varphi, \psi, l)\dot\psi^2 + 2F_\varphi(\varphi, \psi, l)(\dot l\,\dot\varphi) +$$
$$+ 2G_\varphi(\varphi, \psi, l)(\dot\varphi\,\dot\psi) + 2H_\varphi(\varphi, \psi, l)(\dot l\,\dot\psi) =$$
$$= M_\varphi(\varphi, \psi, l). \quad (9)$$

Уравнения, описывающие изменение угла ψ:

$$A_\psi(\varphi, \psi, l)\ddot\varphi + B_\psi(\varphi, \psi, l)\ddot\psi + C_\psi(\varphi, \psi, l)\ddot l +$$
$$+ D_\psi(\varphi, \psi, l)\dot\varphi^2 + E_\psi(\varphi, \psi, l)\dot\psi^2 +$$
$$+ 2F_\psi(\varphi, \psi, l)(\dot l\,\dot\psi) + 2G_\psi(\varphi, \psi, l)(\dot\varphi\,\dot\psi) +$$
$$+ 2H_\psi(\varphi, \psi, l)(\dot l\,\dot\psi) + gK_\psi(\psi)l = M_\psi(\varphi, \psi, l). \quad (10)$$

Уравнение, описывающие изменение длины звена $l = l(t)$:

$$A_l(\varphi, \psi, l)\ddot\varphi + B_l(\varphi, \psi, l)\ddot\psi + C_l(\varphi, \psi, l)\ddot l +$$
$$+ D_l(\varphi, \psi, l)\dot\varphi^2 + E_l(\varphi, \psi, l)\dot\psi^2 + 2F_l(\varphi, \psi, l)(\dot l\,\dot\varphi) +$$
$$+ 2G_l(\varphi, \psi, l)(\dot\varphi\,\dot\psi) + 2H_l(\varphi, \psi, l)(\dot l\,\dot\psi) +$$
$$+ gK_l(\psi) + S_l(E, l) = 0, \quad (11)$$

где $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^{\mathrm{T}}$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^{\mathrm{T}}$ — угловые обобщенные координаты центра масс; $l = (l_1, ..., l_n)^{\mathrm{T}}$ — обобщенные координаты, связанные с изменениями длин звеньев; $A(\varphi, \psi, l)$, $B(\varphi, \psi, l)$, $D(\varphi, \psi, l)$, $E(\varphi, \psi, l)$, $G(\varphi, \psi, l)$ — матрицы, учитывающие инерционные свойства; $C(\varphi, \psi, l)$, $F(\varphi, \psi, l)$, $H(\varphi, \psi, l)$ — матрицы, учитывающие переменность длины звеньев; $K(\psi)$ — матрицы, определяемые моментами силы тяжести; $M(\varphi, \psi, l)$ — матрица-столбец обобщенных сил, т. е. управляющих моментов; $S(k, l)$ —

матрица-столбец, учитывающая упругие свойства материала звеньев; $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$ — матрицы обобщенных ускорений; $\dot{\varphi}^2$, $\dot{\psi}^2$ — матрицы квадратов обобщенных скоростей; $(\dot{l}\,\dot{\varphi}) = (\dot{l}_1\dot{\varphi}_1, ..., \dot{l}_n\dot{\varphi}_n)^{\mathrm{т}}$, $(\dot{l}\,\dot{\psi}) = (\dot{l}_1\dot{\psi}_1, ..., \dot{l}_n\dot{\psi}_n)^{\mathrm{т}}$, $(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}) = (\dot{\psi}_1\dot{\varphi}_1, ..., \dot{\psi}_n\dot{\varphi}_n)^{\mathrm{т}}$ — матрицы, составленные из произведений $\dot{l}\,\dot{\varphi}$, $\dot{l}\,\dot{\psi}$, $\dot{\psi}\,\dot{\varphi}$.

2. Обобщения матриц

Выпишем матрицы для двухзвенной механической системы, уравнения которой получены выше. Приведем в качестве иллюстрации для понимания идеи метода только первые три матрицы (остальные матрицы строятся аналогично из уравнений (3)—(8)):

$$A_\varphi(\varphi, \psi, l) = \begin{pmatrix} I_{1x} + l_1^2(m_2 + m_1 n_1^2)\cos^2\psi_1 & l_1 l_2 m_2 n_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2 \\ l_1 l_2 m_2 n_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_2\cos\psi_1 & I_{2x} + l_2^2 m_2 n_2^2 \cos^2\psi_2 \end{pmatrix};$$

$$B_\varphi(\varphi, \psi, l) = \begin{pmatrix} 0 & l_1 l_2 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\sin\psi_2 \\ l_1 l_2 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_2\sin\psi_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_\varphi(\varphi, \psi, l) = \begin{pmatrix} 0 & -l_1 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2 \\ l_2 m_2 n_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\psi_1\cos\psi_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\ldots .$$

Нами проводился анализ подобных стержневых механических систем и с большим числом звеньев. На основе установленных закономерностей удалось получить обобщения по индукции для матриц произвольной n-звенной трехмерной механической системы с деформируемыми звеньями.

Рассмотрим уравнение (9). Заметим, что матрица $A_\varphi(\varphi, \psi, l)$ является симметрической [11], поэтому достаточно привести только диагональные элементы и наддиагональные, т. е., если i — номер строки, j — номер столбца, то $i, j = \overline{1, n}$, при этом $j \geqslant i$, остальные поддиагональные элементы получаются равными соответствующим симметричным относительно главной диагонали наддиагональным элементам.

Для матрицы $A_\varphi(\varphi, \psi, l)$:

$$a_{ij}^{\varphi} = \delta_{ij} I_{ix} + l_i l_j \left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \right) \times \cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j, \quad (12)$$

здесь и далее: δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \tilde{\delta}\, n_i = \begin{cases} n_j, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}.$$

Матрицы $F_\varphi(\varphi, \psi, l)$ и $G_\varphi(\varphi, \psi, l)$ не являются симметрическими, поэтому необходимо привести все элементы, т. е. если i — номер строки, j — номер столбца, то $i, j = \overline{1, n}$.

Для матрицы $F_\varphi(\varphi, \psi, l)$:

$$f_{ij}^{\varphi} = l_i \left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j. \quad (13)$$

Для матрицы $G_\varphi(\varphi, \psi, l)$:

$$g_{ij}^{\varphi} = l_i l_j \left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j. \quad (14)$$

Матрицы $D_\varphi(\varphi, \psi, l)$, и $E_\varphi(\varphi, \psi, l)$ являются кососимметрическими. Соответственно, элементы, стоящие на главной диагонали, равны нулю, поддиагональные элементы равны соответствующим наддиагональным элементам, взятым с противоположными знаками. Таким образом, достаточно задать только наддиагональные элементы. Если i — номер строки, j — номер столбца, то $i, j = \overline{1, n}$, при этом $j > i$.

Для матриц $D_\varphi(\varphi, \psi, l) = E_\varphi(\varphi, \psi, l)$:

$$d_{ij}^{\varphi} = l_i l_j \left(m_j n_j + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \right) \sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j. \quad (15)$$

Матрицы $B_\varphi(\varphi, \psi, l)$, $C_\varphi(\varphi, \psi, l)$ и $H_\varphi(\varphi, \psi, l)$ не являются кососимметрическими. Поэтому необходимо привести все элементы, т. е. если i — номер строки, j — номер столбца, то $i, j = \overline{1, n}$.

Для матрицы $B_\varphi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$b_{ij}^{\varphi} = l_i l_j \left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k \right) \sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j, \quad i, j = \overline{1, n},\ j \geqslant i, \quad (16)$$

поддиагональные элементы:

$$b_{ij}^{\varphi} = l_i l_j \left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \right) \sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j, \quad i, j = \overline{1, n},\ j < i. \quad (17)$$

Для матрицы $C_\varphi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$c_{ij}^{\varphi} = -l_i \left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k \right) \sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j, \quad i, j = \overline{1, n},\ j \geqslant i, \quad (18)$$

поддиагональные элементы:

$$c_{ij}^{\varphi} = -l_i \left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \right) \sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j, \quad i, j = \overline{1, n},\ j < i. \quad (19)$$

Для матрицы $H_\varphi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$h_{ij}^{\varphi} = l_i\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j \geqslant i, \tag{20}$$

поддиагональные элементы:

$$h_{ij}^{\varphi} = l_i\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j < i. \tag{21}$$

Матрица-столбец обобщенных сил $M_\varphi(\varphi, \psi, l)$ имеет вид

$$f_i^{\varphi} = M_{i\varphi} - M_{(i+1)\varphi}, \tag{22}$$

где $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим уравнение (10). Заметим, что матрица $B_\psi(\varphi, \psi, l)$ является симметрической, поэтому достаточно привести только диагональные и наддиагональные элементы.

Для матрицы $B_\psi(\varphi, \psi, l)$:

$$b_{ij}^{\psi} = \delta_{ij} I_{iy} + l_i l_j\left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times\, (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\sin\psi_j + \cos\psi_i\cos\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j \geqslant i. \tag{23}$$

Матрицы $D_\psi(\varphi, \psi, l)$ и $H_\psi(\varphi, \psi, l)$ не являются симметрическими, поэтому необходимо привести все элементы.

Для матрицы $D_\psi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы имеют вид

$$d_{ij}^{\psi} = l_i l_j\left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j \geqslant i, \tag{24}$$

поддиагональные элементы

$$d_{ij}^{\psi} = l_i l_j\left(m_i n_i \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j < i. \tag{25}$$

Для матрицы $H_\psi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$h_{ij}^{\psi} = l_i\left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times\, (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\sin\psi_j + \cos\psi_i\cos\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j \geqslant i, \tag{26}$$

поддиагональные элементы

$$h_{ij}^{\psi} = l_i\left(m_i n_i \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times\, (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\sin\psi_j + \cos\psi_i\cos\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j < i. \tag{27}$$

Матрица $G_\psi(\varphi, \psi, l)$ является кососимметрической. Таким образом, достаточно задать только наддиагональные элементы.

Для матрицы $G_\psi(\varphi, \psi, l)$:

$$g_{ij}^{\psi} = l_i l_j\left(m_j n_j + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\sin\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j > i. \tag{28}$$

Матрицы $A_\psi(\varphi, \psi, l)$, $C_\psi(\varphi, \psi, l)$, $E_\psi(\varphi, \psi, l)$, и $F_\psi(\varphi, \psi, l)$ не являются кососимметрическими. Поэтому необходимо привести все элементы.

Для матрицы $A_\psi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы имеют вид

$$a_{ij}^{\psi} = -l_i l_j\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j \geqslant i, \tag{29}$$

поддиагональные элементы:

$$a_{ij}^{\psi} = -l_i l_j\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j < i. \tag{30}$$

Для матрицы $C_\psi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы имеют вид

$$c_{ij}^{\psi} = -l_i\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times\, (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j - \cos\psi_i\sin\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j \geqslant i, \tag{31}$$

поддиагональные элементы:

$$c_{ij}^{\psi} = -l_i\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times\, (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j - \cos\psi_i\sin\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j < i. \tag{32}$$

Для матрицы $E_\psi(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы имеют вид

$$e_{ij}^{\psi} = l_i l_j (m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\Bigg) \times$$
$$\times\, (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j - \cos\psi_i\sin\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, \; j \geqslant i, \tag{33}$$

поддиагональные элементы:

$$e_{ij}^{\psi} = l_i l_j\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j - \cos\psi_i\sin\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, j < i. \quad (34)$$

Для матрицы $F_{\psi}(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы имеют вид

$$f_{ij}^{\psi} = -l_i\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, j \geqslant i, \quad (35)$$

поддиагональные элементы:

$$f_{ij}^{\psi} = -l_i\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\sin\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, j < i. \quad (36)$$

Матрица $K_{\psi}(\psi)$ является диагональной, т. е. достаточно рассмотреть элементы, у которых индексы равны $j = i$, при $i, j = \overline{1, n}$, остальные элементы нулевые. Достаточно использовать только один любой индекс.

Для матрицы $K_{\psi}(\psi)$:

$$k_{ij}^{\psi} = \left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\cos\psi_j. \quad (37)$$

Матрица-столбец обобщенных сил $M_{\psi}(\varphi, \psi, l)$ имеет вид

$$m_i^{\psi} = M_{i\psi} - M_{(i+1)\psi}, \quad (38)$$

где $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим уравнение (11). Заметим, что матрица $C_l(\varphi, \psi, l)$ является симметрической.

Для матрицы $C_l(\varphi, \psi, l)$:

$$c_{ij}^{l} = \left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j + \sin\psi_i\sin\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, j > i. \quad (39)$$

Матрицы $D_l(\varphi, \psi, l)$ и $E_l(\varphi, \psi, l)$ не являются симметрическими, поэтому необходимо привести все элементы.

Для матрицы $D_l(\varphi, \psi, l) = -(F_{\varphi}(\varphi, \psi, l))^{\mathrm{T}}$:

$$d_{ij}^{l} = -l_j\left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}. \quad (40)$$

Для матрицы $E_l(\varphi, \psi, l)$:

$$e_{ij}^{l} = -l_j\left(m_j n_j \tilde{\delta}\, n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j + \sin\psi_i\sin\psi_j),\ i, j = \overline{1, n}. \quad (41)$$

Матрица $F_l(\varphi, \psi, l)$ является кососимметрической.

Для матрицы $F_l(\varphi, \psi, l)$:

$$f_{ij}^{l} = \left(m_j n_j + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, j > i. \quad (42)$$

Матрицы $A_l(\varphi, \psi, l)$, $B_l(\varphi, \psi, l)$, $G_l(\varphi, \psi, l)$ и $H_l(\varphi, \psi, l)$ не являются кососимметрическими.

Для матрицы $A_l(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$a_{ij}^{l} = l_j\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, j \geqslant i, \quad (43)$$

поддиагональные элементы:

$$a_{ij}^{l} = l_j\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, j < i. \quad (44)$$

Для матрицы $B_l(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$b_{ij}^{l} = -l_j\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j - \sin\psi_i\cos\psi_j),$$
$$i, j = \overline{1, n}, j \geqslant i, \quad (45)$$

поддиагональные элементы:

$$b_{ij}^{l} = -l_j\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times$$
$$\times (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j - \sin\psi_i\cos\psi_j),$$
$$j = \overline{1, n}, j < i. \quad (46)$$

Для матрицы $G_l(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$g_{ij}^{l} = -l_j\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, j \geqslant i, \quad (47)$$

поддиагональные элементы:

$$g_{ij}^{l} = -l_j\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right)\sin(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\sin\psi_j,$$
$$i, j = \overline{1, n}, j < i. \quad (48)$$

Для матрицы $H_l(\varphi, \psi, l)$ наддиагональные и диагональные элементы:

$$h_{ij}^{l} = -\left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right) \times \times (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i \sin\psi_j - \sin\psi_i \cos\psi_j), \quad i, j = \overline{1, n}, \ j \geqslant i, \quad (49)$$

поддиагональные элементы:

$$h_{ij}^{l} = -\left(m_i n_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k\right) \times \times (\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i \sin\psi_j - \sin\psi_i \cos\psi_j), \quad i, j = \overline{1, n}, \ j < i. \quad (50)$$

Матрица K_l является диагональной.

Для матрицы $K_l(\psi)$:

$$k_{ij}^{l} = \left(m_j n_j + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\right)\sin\psi_j, \ i, j = \overline{1, n}, \ i = j. \quad (51)$$

Матрица-столбец, содержащая информацию об упругих свойствах материала $S_l(k, l)$, имеет вид:

$$s_i^l = -k_i \Delta l_i, \quad (52)$$

где $i = \overline{1, n}$.

Замечание 1: во всех случаях, когда значение индекса превышает n, необходимо значение соответствующей величины положить равным нулю.

Замечание 2: в данных формулах не используется суммирование по повторяющимся индексам.

Замечание 3: матрицы для стержневой системы с разветвлением типа антропоморфного робота или экзоскелета подчиняются обобщениям, полученным для неразветвленных систем типа рассмотренной трехзвенной модели, но при этом необходимо учитывать изменение знака на противоположный после перехода через точку ветвления.

Далее полученные обобщения легко реализуются в среде практически любой системы компьютерной математики (СКМ). Автор реализацию проводил в СКМ "Mathematica". Предложенный метод позволяет сразу записывать дифференциальные уравнения движения, минуя этап составления с помощью формализма Лагранжа.

Преимущества предложенного метода в сравнении с двумя ранее известными и хорошо апробированными видны из таблицы.

Из таблицы следует, что предложенный рекуррентный метод является наиболее эффективным и рациональным для составления дифференциальных уравнений движения стержневых механических систем со звеньями переменной длины.

Таким образом, открывается возможность автоматизированного проектирования двумерных [5] и трехмерных моделей экзоскелетов и антропоморфных роботов с большим числом звеньев, что позволяет совершенствовать их и приближать их движения к движениям человека.

Сравнение методов составления дифференциальных уравнений движения

Операция	Метод		
	Общие теоремы динамики	Уравнения Лагранжа второго рода	Рекуррентный метод
Дифференцирование, в том числе частные производные и повторное	Да ($6n$)	Да ($4n$)	Нет
Решение системы линейных уравнений	Да ($2n$ неизвестных)	Нет	Нет
Упрощение	Да	Да, два раза — при вычислении кинетической энергии и записи самих уравнений, основные затраты времени	Нет
Операции умножения, в том числе и матричного	Да	Да	Да, не зависят от числа звеньев
Операции сложения и вычитания	Да	Да	Да

П р и м е ч а н и е: в скобках, где возможна оценка, указано число соответствующих операций, необходимое для записи дифференциальных уравнений системы с n звеньями переменной длины в плоском случае.

Заключение

Матричная форма записи уравнений движения (9)—(11) является универсальной и может быть применена к описанию движения стержневой механической системы с любым числом звеньев переменной длины. Структура матриц при этом останется такой же, только изменится их размерность и число масс, длин звеньев и т. п. в каждом элементе матрицы.

Рекуррентный подход, предложенный в работе [5], является применимым и к трехмерным моделям и может использоваться для автоматизированного синтеза различных моделей с большим числом звеньев произвольной структуры.

В практическом плане подобная модель может быть использована при создании манипуляторов, антропоморфных роботов, экзоскелетов и протезов конечностей с искусственной податливостью звеньев, повторяющих свойства биологических тканей опорно-двигательного аппарата человека, с тем чтобы движения искусственного механизма были максимально близки к движениям человека.

Список литературы

1. **Погорелов Д. Ю.** Введение в моделирование динамики систем тел: учеб. пособие. Брянск: Изд-во Брян. гос. техн. ун-т, 1997. 155 с.
2. **Погорелов Д. Ю.** Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел // Теория и системы управления (Известия АН). 2005. № 04. С. 5—15.
3. **Зайченко Т. Н.** Решение задач динамики электромеханических систем в среде автоматизированного моделирования МАРС // Известия Томского политехнического университета. Технические науки 2005. Т. 308. № 4. С. 147—153.
4. **Горитов А. Н.** Архитектура системы автоматизированного моделирования робототехнических комплексов // Программные продукты и системы. 2001. № 2. С. 17—19.
5. **Борисов А. В.** Автоматизация проектирования стержневых экзоскелетов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 10. С. 29—33.
6. **Борисов А. В.** Динамика эндо- и экзоскелета. Смоленск: Смоленская городская типография, 2012. 296 с.
7. **Белецкий В. В.** Двуногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.
8. **Вукобратович М.** Шагающие антропоморфные механизмы. М.: Мир, 1976. 541 с.
9. **Новожилов И. В., Кручинин П. А., Копылов И. А., Журавлев А. М., Гришин А. А., Демин П. П., Куликовский С. В., Моисеева Е. М.** Математическое моделирование сгибательно-разгибательных движений нижних конечностей при изменении вертикальной позы человека. М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2001. 52 с.
10. **Формальский А. М.** Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
11. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 492 с.

Automated Designing of Three-Dimensional Models of Exoskeletons with Links of Variable Length

A. V. Borisov, BorisowAndrej@yandex.ru✉, The Branch of National Research University "Moscow Power Engineering Institute" in Smolensk, Smolensk, 214013, Russian Federation

Corresponding author: **Borisov Andrei V.,** Ph. D., Associate Professor, Chair of Higher Mathematics, The Branch of National Research University "Moscow Power Engineering Institute" in Smolensk, Smolensk, 214013, Russian Federation, e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru

Received on January 11, 2015

Accepted on Febuary 03, 2015

The topic of the article is a three-dimensional model of the exoskeleton with the links of variable length. The idea is based on the analysis of the equations for a truss of the mechanical systems with a different number of links, and on generalization of the equations of motion of the exoskeleton in the vector-matrix form. Formulas are derived for the elements in each matrix, which is a part of the equation. The proposed matrix form of the equations of motion of the exoskeleton is universal and can be applied to the motion of the rod of a mechanical system with any number of links, which change their length. The structure of the matrix will remain the same, the change will concern the dimensionality, number of masses, lengths of the links of each matrix element. In practice, the proposed model can be used to create manipulators, anthropomorphic robots, exoskeletons and artificial limbs, artificial yielding links, which imitate the properties of the biological tissues of the human musculoskeletal system, so that movement of the artificial mechanism could be as close as possible to the movement of a person. The result allows us to automate writing of equations of motion for the rod of n-tier systems, of the three-dimensional model of the exoskeleton type, bypassing the stage of their preparation, which is a novelty of the research.

Keywords: *equation of motion, change of the length of a link matrix, mechanical rod system, exoskeleton, anthropomorphic robot, prosthesis, locomotor apparatus, three-dimensional space*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. № 13-01-97512.

For citation:

Borisov A. V. Automated Designing of Three-Dimensional Models of Exoskeletons with Links of Variable Length, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2015, vol. 16, no. 11, pp. 828—835.

DOI: 10.17587/mau/16.828-835

References

1. **Pogorelov D. Ju.** *Vvedenie v modelirovanie dinamiki sistem tel* (Introduction to modeling of system dynamics tel), Ucheb. posobie (Proc. allowance), Brjansk: Izd-vo Brjan. gos. tehn. un-t, 1997. — 155 s.
2. **Pogorelov D. Ju.** *Sovremennye algoritmy komp'juternogo sinteza uravnenij dvizhenija sistem tel* (Modern algorithms of computer synthesis of the equations of motion of systems of bodies), *Teorija i Sistemy Upravlenija* (Izvestija AN), 2005, no. 4, pp. 5—15.
3. **Zajchenko T. N.** *Reshenie zadach dinamiki jelektromehanicheskih sistem v srede avtomatizirovannogo modelirovanija MARS* (The decision of problems of the dynamics of Electromechanical systems in the environment of the automated modeling of MARS), *Izvestija Tomskogo Politehnicheskogo Universiteta, Tehnicheskie Nauki*, 2005, vol. 308, no. 4, pp. 147—153.
4. **Goritov A. N.** *Arhitektura sistemy avtomatizirovannogo modelirovanija robototehnicheskih kompleksov* (Architecture computer aided simulation of robotic systems), *Programmnye Produkty i Sistemy*, 2001, no. 2, pp. 17—19.
5. **Borisov A. V.** *Avtomatizacija proektirovanija sterzhnevyh jekzoskeletov* (Automation of designing core exoskeletons), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 10, pp. 29—33.
6. **Borisov A. V.** *Dinamika jendo- i jekzoskeleta* (Dynamics of endo- and exoskeletons), Smolensk, Publishing house "Smolensk city printing house", 2012, 296 p.
7. **Beleckij V. V.** *Dvunogaja hod'ba: model'nye zadachi dinamiki i upravlenija* (Bipedal walking: a model of the task dynamics and control), Moscow, Nauka, 1984, 288 p.
8. **Vukobratovich M.** *Shagajushhie antropomorfnye mehanizmy* (Walking anthropomorphic mechanisms), Moscow, Mir, 1976, 541 p.
9. **Novozhilov I. V., Kruchinin P. A., Kopylov I. A., Zhuravlev A. M., Grishin A. A., Demin P. P., Kulikovskii S. V., Moiseeva E. M.** *Matematicheskoe modelirovanie sgibatel'no-razgibatel'nyh dvizhenij nizhnih konechnostej pri izmenenii vertikal'noj pozy cheloveka* (Mathematical modeling flexure-extensor movements of the lower limbs in the vertical posture), Moscow, Publishing house of the Mechanics and Mathematics Faculty of Moscow State University, 2001, 52 p.
10. **Formal'skij A. M.** *Peremeshhenie antropomorfnyh mehanizmov* (Moving anthropomorphic mechanisms), Moscow, Nauka, 1982, 368 p.
11. **Gantmaher F. R.** *Teorija matric* (The theory of matrices), Moscow, State publishing house of technical and theoretical literature, 1953, 492 p.