УДК 531.36 DOI: 10.17587/mau.16.807-812

А. Ю. Александров, д-р физ.-мат. наук, проф., alex43102006@yandex.ru,
А. П. Жабко, д-р физ.-мат. наук, проф., zhabko@apmath.spbu.ru,
И. А. Жабко, инж.-исследователь, vivanvan@mail.ru,
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
А. А. Косов, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., aakosov@yandex.ru,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Исследование устойчивости и стабилизация нелинейных переключаемых механических систем на основе декомпозиции[1]

Изучаются нелинейные механические системы с однородными переключаемыми позиционными силами, линейными гироскопическими силами и однородными диссипативными силами. Предложен подход к исследованию устойчивости при произвольном законе переключений, основанный на декомпозиции исходной системы, состоящей из n дифференциальных уравнений второго порядка, на две изолированные подсистемы первого порядка той же самой размерности. Рассматривается задача стабилизации положения равновесия системы за счет малых сил радиальной коррекции при произвольном режиме переключений, масштабирующих потенциал. Для модели магнитного подвеса ротора с нелинейными переключаемыми циркулярными силами предложен стабилизирующий закон обратной связи, использующий линейные гироскопические и нелинейные диссипативные силы.

Ключевые слова: *гибридные механические системы, асимптотическая устойчивость, управление, функции Ляпунова, стабилизация, декомпозиция, закон переключения*

Введение

В последние два десятилетия активно изучаются гибридные системы, описываемые дифференциальными уравнениями с переключениями правых частей в ходе процесса управления [1—3]. Такие системы встречаются в задачах управления механическими объектами со структурной реконфигурацией, отказами и восстановлениями датчиков или исполнительных органов [3, 4].

Наличие переключений существенно затрудняет решение задач синтеза стабилизирующих управлений, поэтому актуальной проблемой является развитие теории управления для такого рода гибридных механических систем [3, 4]. Основным, а часто и единственным, строгим методом исследования динамики гибридных систем обычно выступает метод функций Ляпунова (см., например, работы [1—6]).

Цель данной статьи — развитие методов исследования устойчивости и построения стабилизирующих управлений для нелинейных механических систем с переключениями. Анализ асимптотической устойчивости проводится на основе разрабатываемого авторами подхода [7—9] в рамках метода декомпозиции. Метод декомпозиции, заключающийся в разделении сложной системы на несколько более простых подсистем, изучении их по отдельности и обоснованном перенесении полученных результатов на исходную систему, широко и эффективно применяется в теории устойчивости и управления [10—12]. Основная идея используемого в данной статье варианта метода декомпозиции состоит в замене исследования устойчивости одной системы дифференциальных уравнений второго порядка исследованием двух изолированных систем первого порядка. Эта идея была первоначально разработана для обоснования прецессионной теории гироскопов [13, 14].

С помощью декомпозиционного подхода предложены стабилизирующие законы обратной связи для двух классов управляемых механических систем с переключениями.

Анализ устойчивости нелинейной механической системы с переключаемыми позиционными силами на основе декомпозиции

Пусть задано семейство нелинейных механических систем

$$A\ddot{q} + \|\dot{q}\|^{\nu} B\dot{q} + G\dot{q} + Q_s(q) = 0,\quad s \in M = \{1, \ldots, m\}. \qquad (1)$$

Здесь $q,\ \dot{q} \in R^n$ — соответственно обобщенные координаты и скорости, n — четное число; постоянные матрицы A и B — симметрические положительно определенные; постоянная матрица G — кососимметрическая невырожденная; $\nu > 0$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора; векторные функции $Q_1(q), \ldots, Q_m(q)$ непрерывно дифференцируемы при $q \in R^n$ и являются однородными порядка $\mu > 1$. Таким образом, системы из рассматриваемого семейства находятся под воздействием линейных гироскопических сил, а также нелинейных однородных диссипативных и позиционных сил.

Следует заметить, что механические системы с нелинейными однородными действующими силами изучались во многих работах (см., например, [15—19]).

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 13-08-00948 и № 15-08-06680) и Санкт-Петербургского государственного университета (НИР № 9.38.674.2013 и № 9.37.157.2014).

Допустимым законом переключения будем называть кусочно-постоянную правосторонне непрерывную функцию времени $\sigma(t)$, $\sigma(t)$: $[0, +\infty) \to \{1, ..., m\}$, имеющую на каждом ограниченном промежутке только конечное число точек разрыва.

Рассмотрим порождаемую семейством (1) гибридную механическую систему с произвольным допустимым законом переключения позиционных сил, описываемую уравнениями

$$A\ddot{q} + \|\dot{q}\|^{\nu}B\dot{q} + G\dot{q} + Q_{\sigma(t)}(q) = 0. \qquad (2)$$

Система (2) имеет положение равновесия $q = \dot{q} = 0$. Определим условия, выполнение которых гарантирует, что это положение равновесия будет асимптотически устойчиво при любом допустимом законе переключения. Подобная задача естественным образом возникает в случаях, когда закон переключения или неизвестен, или слишком сложен для того, чтобы его можно было учитывать при анализе устойчивости [1, 3].

Для гибридных систем с произвольным режимом переключения основным методом исследования устойчивости является использование общих функций Ляпунова, монотонно изменяющихся вдоль решений [1—6]. Однако проблема существования общей функции Ляпунова не решена в полном объеме даже для семейства линейных автономных подсистем [1, 3]. Для механических систем она требует отдельного и углубленного исследования, поскольку механические системы обладают специальной структурой, что затрудняет применение к ним известных результатов [9].

В статьях [9, 20, 21] был разработан подход к проблеме построения общей функции Ляпунова для семейства механических систем с линейными диссипативными силами, основанный на методе декомпозиции. В настоящей работе покажем, что этот подход может успешно применяться и в случае, когда диссипативные силы существенно нелинейны.

Строим вспомогательное семейство подсистем

$$G\dot{y} = -Q_s(y),\ s = 1, ..., m. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Пусть* $\mu > \nu + 1$. *Если нулевые решения всех подсистем семейства* (3) *асимптотически устойчивы, и для этого семейства существует непрерывно дифференцируемая при* $y \in R^n$ *однородная порядка* $\gamma > 1$ *общая функция Ляпунова* $V(y)$, *удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, то положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы* (2) *асимптотически устойчиво при любом допустимом законе переключения.*

Доказательство. Введем новые переменные. Пусть

$$z = \dot{q},\ Gy = A\dot{q} + Gq - \psi(\dot{q}),$$

Действительно, рассмотрим систему

где $\psi(\dot{q}) = \|\dot{q}\|^{\nu}BG^{-1}A\dot{q}$. Тогда семейство (1) принимает вид

$$\begin{aligned} &G\dot{y} = -Q_s(y) + (Q_s(y) - Q_s(y - G^{-1}Az + G^{-1}\psi(z))) + \\ &+ \frac{\partial\psi(z)}{\partial z}A^{-1}(\|z\|^{\nu}Bz + Q_s(y - G^{-1}Az + G^{-1}\psi(z))); \\ &A\dot{z} = -\|z\|^{\nu}Bz - Gz - Q_s(y - G^{-1}Az + G^{-1}\psi(z)), \\ &s = 1, ..., m. \end{aligned} \qquad (4)$$

Построим для семейства (4) общую функцию Ляпунова. Положим

$$\tilde{V}(y, z) = V^{\frac{\xi - \mu + 1}{\gamma}}(y) + (z^{\mathrm{T}}Az)^{\frac{\varsigma - \nu}{2}}, \qquad (5)$$

где $\xi > \mu$, $\varsigma > \nu + 1$, а $V(y)$ — указанная в формулировке теоремы функция. Функция (5) положительно определена. Дифференцируя ее в силу произвольной системы из семейства (4), получаем, что при достаточно малых значениях $\|y\|$ и $\|z\|$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} \leqslant -a_1(\|y\|^{\xi} + \|z\|^{\varsigma}) + a_2(\|y\|^{\mu}\|z\|^{\varsigma - \nu - 1} + \\ + \|y\|^{\xi - 1}\|z\| + \|y\|^{\xi - \mu}(\|z\|^{\mu} + \|z\|^{2\nu + 1})). \end{aligned}$$

Здесь a_1 и a_2 — положительные постоянные, не зависящие от выбранной системы семейства.

Нетрудно показать [22], что если

$$\max\left\{1;\ \frac{\mu}{2\nu + 1}\right\} < \frac{\xi}{\varsigma} < \frac{\mu}{\nu + 1},$$

то найдется число $\delta > 0$ такое, что при $\|y\| + \|z\| < \delta$ выполнено неравенство

$$\dot{\tilde{V}} \leqslant -\frac{a_1}{2}(\|y\|^{\xi} + \|z\|^{\varsigma}).$$

Таким образом, функция (5) является общей функцией Ляпунова для семейства (4). Значит, нулевое решение соответствующей гибридной системы асимптотически устойчиво при любом допустимом законе переключения, а тогда тем же самым свойством обладает и положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (2).

Замечание 1. Теорема 1 позволяет сводить задачу нахождения общей функции Ляпунова для семейства систем размерности $2n$ со специальной структурой к аналогичной задаче для вспомогательного семейства подсистем (3), имеющих вдвое меньшую размерность и не обладающих, вообще говоря, специальной структурой. Для решения новой задачи можно использовать известные условия существования общей функции Ляпунова для семейства однородных подсистем [5, 23].

Замечание 2. Теорема 1 допускает распространение на гибридные механические системы с диссипативными силами более общего вида, чем в формуле (2).

$$A\ddot{q} + B(\dot{q})\dot{q} + G\dot{q} + Q_{\sigma(t)}(q) = 0. \qquad (6)$$

Здесь элементы матрицы $B(\dot{q})$ непрерывны при $\dot{q} \in R^n$ и являются однородными функциями порядка $\nu > 0$, причем функция $\dot{q}^{\mathrm{T}} B(\dot{q})\dot{q}$ положительно определена, а остальные обозначения те же, что и в формуле (2).

Можно показать, что теорема 1 справедлива и для системы (6). Требуется только, чтобы было выполнено следующее дополнительное условие: система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\psi(z)}{\partial z} A^{-1} G z = B(z) z \tag{7}$$

имеет решение в виде непрерывно дифференцируемой при $z \in R^n$ однородной порядка $\nu + 1$ векторной функции $\psi(z)$.

Замечание 3. Критерий существования однородного решения системы (7) установлен в работе [24].

Стабилизация неустойчивого положения равновесия малыми силами радиальной коррекции

Рассмотрим управляемую механическую систему с переключениями, описываемую нелинейными дифференциальными уравнениями

$$A\ddot{q} + \|\dot{q}\|^{\nu} B\dot{q} + G\dot{q} + k_{\sigma(t)}\frac{\partial \Pi}{\partial q} = U. \tag{8}$$

Здесь q, $\dot{q} \in R^n$ — соответственно обобщенные координаты и скорости, n — четное число; постоянные матрицы A и B — симметрические положительно определенные; постоянная матрица G — кососимметрическая невырожденная; $\nu > 0$. Потенциальная энергия $\Pi(q)$ является непрерывно дифференцируемой однородной функцией порядка $\mu + 1 > \nu + 2$, которую будем считать отрицательно определенной, т. е. $\Pi(q) \leqslant -a_1\|q\|^{\mu + 1}$, $a_1 > 0$; кусочно-постоянная правосторонне непрерывная функция $\sigma(t)$: $[0, +\infty) \to \{1, ..., m\}$ задает закон переключения, а все числа k_j, $j = 1, ..., m$, считаются положительными. В частности, такого рода переключаемый потенциал будет иметь место в случае механической системы с m одинаковыми упругими элементами, когда в каждый момент времени функционируют параллельно соединенными только некоторые из них. Входящая же в правую часть уравнения (8) функция U рассматривается как управление, которое можно выбирать.

Если управление в системе (8) отсутствует, т. е. $U \equiv 0$, и переключения не происходят, т. е. $k_{\sigma(t)} \equiv \mathrm{const}$, то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ будет в соответствии с четвертой теоремой Томсона—Тэта—Четаева [15] неустойчиво по Ляпунову. Наша задача состоит в том, чтобы указать закон управления $U = U(q)$, гарантирующий асимптотическую устойчивость положения равновесия в замкнутой системе при произвольном законе переключения.

Выберем закон управления в виде

$$U(q) = -\eta\varphi(q) G q, \ \eta > 0, \tag{9}$$

где $\varphi(q) \geqslant a_2\|q\|^{\mu - 1}$, $a_2 > 0$ — произвольная непрерывно дифференцируемая однородная порядка $\mu - 1$ положительно определенная функция.

Теорема 2. *При предположениях этого раздела положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы* (8), *замкнутой управлением* (9), *асимптотически устойчиво при любом* $\eta > 0$.

Доказательство сводится к проверке условий теоремы 1. При этом необходимо лишь удостовериться в существовании общей однородной функции Ляпунова для семейства

$$G\dot{y} + k_s\frac{\partial\Pi(y)}{\partial y} = -\eta\varphi(y) G y, \ s = 1, ..., m. \tag{10}$$

Запишем семейство (10) в виде

$$\dot{y} = -k_s G^{-1}\frac{\partial\Pi(y)}{\partial y} - \eta\varphi(y) y, \ s = 1, ..., m, \tag{11}$$

и рассмотрим для него положительно определенную функцию Ляпунова

$$V(y) = -\Pi(y) \geqslant a_1\|y\|^{\mu + 1}.$$

Продифференцируем эту функцию в силу s-й подсистемы из (11), $s = 1, ..., m$. Имеем

$$\dot{V}(y) = k_s\eta\varphi(y)\frac{\partial\Pi(y)}{\partial y}^{\mathrm{T}} y = k_s\eta(\mu + 1)\varphi(y)\Pi(y) \leqslant$$
$$\leqslant -\tilde{k}\, a_1 a_2\eta(\mu + 1)\|y\|^{2\mu}.$$

Здесь $\tilde{k} = \min k_s$, $s = 1, ..., m$. Следовательно, функция $\dot{V}(y)$ является отрицательно определенной. Значит, $V(y)$ — общая однородная функция Ляпунова для семейства (11), т. е. все условия теоремы 1 выполнены, откуда и вытекает справедливость утверждения доказываемой теоремы.

Отметим, что нелинейные управляющие силы (9) удовлетворяют тождеству $q^{\mathrm{T}} U(q) \equiv 0$, т. е. они действуют ортогонально к радиус-вектору. Такие силы в теории гироскопических систем называют силами радиальной коррекции [14]. Отметим также, что управляющие силы (9) имеют тот же самый порядок однородности $\mu > 1$, что и вызывающие неустойчивость равновесия системы без управления потенциальные силы $-k_{\sigma(t)}\frac{\partial\Pi(q)}{\partial q}$, причем стабилизация гарантируется теоремой 2 при сколь угодно малом $\eta > 0$. Таким образом, теорема 2 обеспечивает стабилизацию равновесия за счет сил радиальной коррекции, малых по сравнению с дестабилизирующими потенциальными силами. Такая малость управляющих сил может оказаться полезной в приложениях, поскольку затраты на реализацию управления обычно пропорциональны управляющему сигналу.

3. Стабилизация положения равновесия нелинейной неконсервативной механической системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы

$$\ddot{x} - p(x, y)y = U_x,\ \ddot{y} + p(x, y)x = U_y. \qquad (12)$$

Здесь x, y — скалярные обобщенные координаты. В левые части уравнений (12) входят обобщенные ускорения и неконсервативные позиционные силы [15]. В правые части уравнений входят управляющие силы, которые могут выбираться из некоторых допустимых классов. Коэффициент $p(x, y)$ при неконсервативных позиционных силах задается функцией

$$p(x, y) = \alpha + \beta(x^2 + y^2), \qquad (13)$$

где α и β — вещественные параметры. Нелинейные неконсервативные позиционные силы именно такого вида используются при моделировании динамики ротора в магнитном подвесе [25].

Будем считать, что система магнитного подвеса ротора реализована в двух вариантах, основном и резервном. Тогда коэффициент (13) при неконсервативных позиционных силах будет в ходе функционирования переключаемым с основного на резервный режим в произвольные моменты времени ($p = p_{\sigma(t)}(x, y) = \alpha_{\sigma(t)} + \beta_{\sigma(t)}(x^2 + y^2)$). Здесь кусочно-постоянная правосторонне непрерывная функция $\sigma(t)$ может принимать два значения: 1 (соответствует основному режиму) и 2 (соответствует резервному режиму).

С учетом переключений динамика ротора в магнитном подвесе описывается системой уравнений

$$\ddot{x} - p_{\sigma(t)}(x, y)y = U_x,\ \ddot{y} + p_{\sigma(t)}(x, y)x = U_y. \qquad (14)$$

Желаемому положению оси ротора соответствуют значения координат $x = y = 0$, задающие положение равновесия системы (14) при отключенном управлении ($U_x = U_y \equiv 0$). Для обеспечения работоспособности магнитного подвеса положение равновесия $x = y = \dot{x} = \dot{y} = 0$ должно быть асимптотически устойчивым по Ляпунову, т. е. малые начальные отклонения от равновесия должны со временем исчезать. Однако, как следует из результатов В. М. Матросова [10], при отключенном управлении положение равновесия системы (14) неустойчиво при любых функциях $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$ и при любом законе переключения. Поэтому возникает задача стабилизации, т. е. такого выбора закона управления $U_x(x, y)$, $U_y(x, y)$, при котором была бы обеспечена асимптотическая устойчивость положения равновесия независимо от конкретной реализации закона переключения.

При рассмотрении этой задачи следует учитывать, что имеющиеся исполнительные органы не всегда обеспечивают возможность реализации управляющих сил произвольной структуры. Таким образом, возникает необходимость решения задачи стабилизации за счет сил иной структуры по сравнению с действующими на систему в ее естественном состоянии, поставленной впервые для линейных систем И. И. Метелицыным [26].

Рассмотрим задачу для существенно нелинейного случая, когда вопрос об устойчивости не решается на основе уравнений линейного приближения. А именно, положим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, и будем выбирать законы управления в классе нелинейных функций. Кроме того, считаем, что коэффициенты β_1 и β_2 отличны от нуля и имеют один знак.

Теорема 3. *Асимптотическая устойчивость положения равновесия* $x = y = \dot{x} = \dot{y} = 0$ *будет достигнута, если в системе* (14) *положить*

$$U_x = g\beta_1\dot{y} - b_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^\gamma\dot{x},$$
$$U_y = -g\beta_1\dot{x} - b_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^\gamma\dot{y}, \qquad (15)$$

где b_1, b_2, g, γ *— положительные постоянные, причем* $0 < \gamma < 1$.

Для обоснования этого утверждения в соответствии с теоремой 1 достаточно убедиться в существовании однородной общей функции Ляпунова для семейства подсистем

$$-g\beta_1\dot{u} - \beta_s(u^2 + v^2)u = 0,$$
$$g\beta_1\dot{v} + \beta_s(u^2 + v^2)v = 0,\ s = 1, 2.$$

Легко проверить, что в качестве такой функции можно выбрать $V(u, v) = u^2 + v^2$.

Заметим, что для реализации управления (15) достаточно иметь лишь измеритель скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, а координаты x, y при этом могут и не измеряться.

Необходимо также отметить, что ограничение $\gamma < 1$ на порядок малости диссипативных сил было получено в процессе доказательства теоремы 1 как одно из достаточных условий, обеспечивающее знакоопределенность производной функции Ляпунова в силу замкнутой системы, т. е. было обусловлено техникой доказательства. Однако это ограничение является принципиальным и не может быть отброшено, поскольку при $\gamma = 1$, $b_1 = b_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1/g > 0$ у замкнутой системы имеются точные решения $x(t) = c\sin t$, $y(t) = c\cos t$, $c = \text{const}$.

Заключение

В статье предложен подход к анализу устойчивости нелинейных механических систем с переключениями позиционных сил, основанный на декомпозиции исходной системы на две подсистемы вдвое меньшей размерности каждая. На базе этого подхода построены стабилизирующие обратные связи для двух классов механических систем. При этом используются управляющие силы различной структуры — малые силы радиальной коррекции, либо гироскопические силы.

Заметим, что для решения задач стабилизации предложенный подход может успешно применяться не только к рассмотренным системам, но и к существенно более общему классу механических систем с переключениями и запаздыванием в позиционных силах, возникающим вследствие задержек на обработку информации в канале управления.

Список литературы

1. **Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.** Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. V. 49. N. 4. P. 545—592.

2. **Hai Lin, Antsaklis P. J.** Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results // IEEE Trans. Automat. Contr. 2009. V. 54, N. 2. P. 308—322.

3. **Liberzon D.** Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhauser, 2003. 233 p.

4. **DeCarlo R., Branicky M., Pettersson S., Lennartson B.** Perspectives and Results on the Stability and Stabilisability of Hybrid Systems // Proc. IEEE. 2000. V. 88. P. 1069—1082.

5. **Васильев С. Н., Косов А. А.** Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 27—47.

6. **Vassilyev S. N., Kosov A. A., Malikov A. I.** Stability Analysis of Nonlinear Switched Systems via Reduction Method // Preprints of the 18th IF AC World Congress. Milano, Italy. Aug. 28 — Sept. 2, 2011. P. 5718—5723.

7. **Александров А. Ю., Косов А. А.** Об устойчивости и стабилизации положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 13—23.

8. **Александров А. Ю., Косов А. А.** Об устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных механических систем // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74, № 5. С. 774—788.

9. **Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я.** Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 5—17.

10. **Матросов В. М.** Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.

11. **Пятницкий Е. С.** Принцип декомпозиции в управлении динамическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300—303.

12. **Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А.** Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

13. **Зубов В. И.** Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 320 с.

14. **Меркин Д. Р.** Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.

15. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

16. **Зотеев В. Е.** Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений. М.: Машиностроение, 2009. 344 с.

17. **Пановко Г. Я.** Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 326 с.

18. **Gendelman O. V., Lamarque C. H.** Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. V. 24. P. 501—509.

19. **Gourdon E., Lamarque C. H.** Energy pumping for a larger span of energy // J. of Sound and Vibration. 2005. V. 285. P. 711—720.

20. **Александров А. Ю., Косов А. А., Платонов А. В., Фадеев С. С.** Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями силовых полей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 12. С. 9—16.

21. **Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L.** Stability of Hybrid Mechanical Systems with Switching Linear Force Fields // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2011. V. 11, N. 1. P. 53—64.

22. **Зубов В. И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судостроение, 1959. 324 с.

23. **Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Platonov A. V.** On the Asymptotic Stability of Switched Homogeneous Systems // Systems & Control Letters. 2012. V. 61, N. 1. P. 127—133.

24. **Александров А. Ю., Жабко А. П., Косов А. А.** Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции // Сиб. мат. журнал. 2015 (принята к печати).

25. **Post R. F.** Stability Issues in Ambient-Temperature Passive Magnetic Bearing Systems. February 17, 2000. Lawrence Livermore National Laboratory. Technical Information Department's Digital Library. http://www.llnl.gov/tid/Library.html

26. **Метелицын И. И.** К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31—34.

Stability Investigation and Stabilization of Nonlinear Switched Mechanical Systems via Decomposition

A. Yu. Aleksandrov, alex43102006@yandex.ru✉,
A. P. Zhabko, zhabko@apmath.spbu.ru, **I. A. Zhabko,** vivanvan@mail.ru,
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation,
A. A. Kosov, aakosov@yandex.ru, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033, Russian Federation

Corresponding author: **Aleksandrov Alexandr Yu.,** D.Sc., Professor,
Saint Petersburg State University, 199034, Saint Petersburg, Russian Federation,
e-mail: alex43102006@yandex.ru

Received on August 30, 2015
Accepted on September 02, 2015

A nonlinear hybrid mechanical system is studied. It is assumed that on the system homogeneous switched positional forces, linear gyroscopic forces and homogeneous dissipative ones act. Conditions are determined under which the trivial equilibrium position of the considered system is asymptotically stable for any admissible switching law. It is well known that to prove the asymptotic stability uniform with respect to switching law, it is sufficient to construct a common Lyapunov function for the family of subsystems corresponding to the hybrid system. However, till now there are no general constructive methods for finding of common Lyapunov functions, even for families composed of linear subsystems. The problem is especially difficult for mechanical systems with switched force fields, since such systems are described by differential equations of the second order. This results in the appearance of certain special properties of motions and essentially complicates the analysis of system dynamics. In particular, well known results obtained for switched systems of general form might be inefficient or even inapplicable for mechanical systems. In the present paper, a new approach to the stability analysis is proposed. The approach is based on the *decomposition of the original system consisting of differential equations of the second order into two isolated first order subsystems of the same dimension. It should be noted that one of the isolated subsystem is switched, whereas another one is non-switched. Thus, the decomposition method permits us to reduce the problem of a common Lyapunov function constructing for the original family of nonlinear systems of dimension with a special structure to that for an auxiliary family of subsystems of dimension which, generally, do not possess a special structure. The problem of stabilization of the equilibrium position of a system for any switching mode scaling the potential with the aid of small forces of radial correction is considered. For a model of the magnetic bearing of a rotor with nonlinear switched circular forces, the stabilizing feedback control law is constructed by the use of linear gyroscopic and nonlinear dissipative forces.*

Keywords: *hybrid mechanical systems, asymptotic stability, control, Lyapunov functions, stabilization, decomposition, switching law*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project nos. 13-08-00948 and 15-08-00680 and by the Saint Petersburg State University (project no. 9.38.674.2013 and no. 9.37.157.2014)

For citation:

Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P., Zhabko I. A. Stability Investigation and Stabilization of Nonlinear Switched Mechanical Systems via Decomposition, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 12, pp. 807—812.

DOI: 10.17587/mau/16.807-812

References

1. **Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.** Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems, *SIAM Rev.*, 2007, vol. 49, no. 4, pp. 545—592.
2. **Hai Lin, Antsaklis P. J.** Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2009, vol. 54, no. 2, pp. 308—322.
3. **Liberzon D.** *Switching in Systems and Control*, Boston, MA, Birkhauser, 2003. 233 p.
4. **DeCarlo R., Branicky M., Pettersson S., Lennartson B.** Perspectives and Results on the Stability and Stabilisability of Hybrid Systems, *Proc. IEEE*, 2000, vol. 88, pp. 1069—1082.
5. **Vasil'ev S. N., Kosov A. A.** *Analiz dinamiki gibridnyh sistem s pomoshh'ju obshhih funkcij Ljapunova i mnozhestvennyh gomomorfizmov* (Analysis of dynamics of hybrid systems on the basis of common Lyapunov functions and multiple homomorphisms), *Avtomatika i Telemehanika*, 2011, no 6, pp. 27—47 (in Russian).
6. **Vassilyev S. N., Kosov A. A., Malikov A. I.** Stability Analysis of Nonlinear Switched Systems via Reduction Method, *Preprints of the 18th IFAC World Congress.* Milano, Italy. Aug. 28 — Sept. 2, 2011, pp. 5718—5723.
7. **Aleksandrov A. Ju., Kosov A. A.** *Ob ustojchivosti i stabilizacii polozhenij ravnovesija nelinejnyh neavtonomnyh mehanicheskih sistem* (On the stability and stabilization of equilibrium positions of nonlinear nonautonomous mechanical systems), *Izv. RAN. Teorija i Sistemy Upravlenija*, 2009, no. 4, pp. 13—23 (in Russian).
8. **Aleksandrov A. Ju., Kosov A. A.** *Ob ustojchivosti i stabilizacii nelinejnyh nestacionarnyh mehanicheskih sistem* (On the stability and stabilization of nonlinear nonstationary mechanical systems), *Prikl. Matematika i Mehanika*, 2010, vol. 74, no. 5, pp. 774—788 (in Russian).
9. **Aleksandrov A. Ju., Kosov A. A., Chjen' Ja.** *Ob ustojchivosti i stabilizacii mehanicheskih sistem s perekljuchenijami* (On the stability and stabilization of mechanical systems with switching), *Avtomatika i Telemehanika*, 2011, no. 6, pp. 5—17 (in Russian).
10. **Matrosov V. M.** *Metod vektornyh funkcij Ljapunova: analiz dinamicheskih svojstv nelinejnyh sistem* (Method of Lyapunov Vector Functions: Analysis of Dynamical Properties of Nonlinear Systems). Moscow: Fizmatlit, 2001. 384 p. (in Russian).
11. **Pjatnickij E. S.** *Princip dekompozicii v upravlenii dinamicheskimi sistemami* (Decomposition principle in dynamical systems control), *Dokl. AN SSSR*, 1988, vol. 300, no. 2, pp. 300—303 (in Russian).
12. **Chernous'ko F. L., Anan'evskij I. M., Reshmin S. A.** *Metody upravlenija nelinejnymi mehanicheskimi sistemami* (Methods of Nonlinear Mechanical Systems Control), Moscow, Fizmatlit, 2006. 328 p. (in Russian).
13. **Zubov V. I.** *Analiticheskaja dinamika giroskopicheskih system* (Analytical Dynamics of Gyroscopic Systems), Leningrad, Sudostroenie, 1970. 320 p. (in Russian).
14. **Merkin D. R.** *Giroskopicheskie sistemy* (Gyroscopic Systems). Moscow, Nauka, 1974. 344 p. (in Russian).
15. **Merkin D. R.** *Vvedenie v teoriju ustojchivosti dvizhenija* (Introduction to the Theory of Motion Stability), Moscow, Nauka, 1987. 304 p. (in Russian).
16. **Zoteev V. E.** *Parametricheskaja identifikacija dissipativnyh mehanicheskih sistem na osnove raznostnyh uravnenij* (Parametric Identification of Dissipative Mechanical Systems on the Basis of Difference Equations), Moscow, Mashinostroenie, 2009. 344 p. (in Russian).
17. **Panovko G. Ja.** *Osnovy prikladnoj teorii kolebanij i udara* (Foundations of Applied Theory of Oscillations and Impact), Leningrad, Mashinostroenie, 1976. 326 p. (in Russian).
18. **Gendelman O. V., Lamarque C. H.** Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 501—509.
19. **Gourdon E., Lamarque C. H.** Energy pumping for a larger span of energy, *J. of Sound and Vibration*, 2005, vol. 285, pp. 711—720.
20. **Aleksandrov A. Ju., Kosov A. A., Platonov A. V., Fadeev S. S.** *Ob ustojchivosti i stabilizacii mehanicheskih sistem s perekljuchenijami silovyh polej* (On the stability and stabilization of mechanical systems with switching of force fields), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2013, no. 12, pp. 9—16 (in Russian).
21. **Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L.** Stability of Hybrid Mechanical Systems with Switching Linear Force Fields, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2011, vol. 11, no. 1, pp. 53—64.
22. **Zubov V. I.** *Matematicheskie metody issledovanija sistem avtomaticheskogo regulirovanija* (Mathematical Methods of Automatic Control Systems Study), Leningrad, Sudostroenie, 1959. 324 p. (in Russian).
23. **Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Platonov A. V.** On the Asymptotic Stability of Switched Homogeneous Systems, *Systems & Control Letters*, 2012, vol. 61, no. 1, pp. 127—133.
24. **Aleksandrov A. Ju., Zhabko A. P., Kosov A. A.** Analiz ustojchivosti i stabilizacija nelinejnyh sistem na osnove dekompozicii (Stability analysis and stabilization of nonlinear systems via decomposition), *Sib. mat. Zhurnal*, 2015 (in press) (in Russian).
25. **Post R. F.** Stability Issues in Ambient-Temperature Passive Magnetic Bearing Systems. February 17, 2000. *Lawrence Livermore National Laboratory. Technical Information Department's Digital Library.* http://www.llnl.gov/tid/Library.html
26. **Metelicyn I. I.** *K voprosu o giroskopicheskoj stabilizacii* (On the gyroscopic stabilization), *Dokl. ANSSSR*, 1952, vol. 86, no. 1, pp. 31—34 (in Russian).