

А. М. Цыкунов, д-р техн. наук, проф., tsygunov_al@mail.ru,
Астраханский государственный технический университет

Робастное управление объектом с распределенным запаздыванием по состоянию и управлению

Решена задача робастного управления для динамических объектов с распределенным запаздыванием по состоянию и управлению. Предполагается, что параметры математической модели неизвестны, а измерению доступны только выходные переменные. В качестве целевых условий принята точность отслеживания эталонного сигнала. Получены алгоритмы управления, позволяющие скомпенсировать априорную неопределенность и существенно уменьшить влияние неизмеряемых внешних ограниченных возмущений на выходные переменные. Приведен численный пример и результаты моделирования, которые продемонстрировали эффективность полученного алгоритма слежения.

Ключевые слова: распределенное запаздывание, робастное управление, функционал, эталонный сигнал

Введение

Одной из основных проблем теории автоматического управления динамическими объектами является проектирование алгоритмического обеспечения регулирующих устройств в условиях априорно неопределенности параметров математических моделей объектов и при наличии внешних неизмеряемых возмущений. В таких условиях проектируемая система управления должна обеспечивать выполнение основной цели управления, например, слежение за эталонным сигналом с требуемой точностью, что возможно осуществить, если скомпенсировать параметрические и внешние возмущения. Одним из основных подходов к решению этой задачи является использование робастных систем управления. Бурное развитие теории робастных систем управления началось с публикации [1], в которой были доказаны необходимые и достаточные условия устойчивости интервальных полиномов. Разработаны различные подходы и методы построения робастных систем управления и исследована их устойчивость. Метод инвариантных эллипсоидов рассмотрен в работах [2, 3], метод матричных неравенств обсуждается в работе [4]. Эти методы наиболее часто используются для проектирования алгоритмического обеспечения робастных систем управления. В работе [5] метод инвариантных эллипсоидов использован для проектирования робастного динамического регулятора, а в работе [6] метод матричных неравенств был применен для синтеза субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений.

Задача управления нелинейным объектом с запаздыванием и с ограничением на управляющее воздействие исследована в работе [7]. В статье [8] решается задача адаптивного управления неопределенным стохастическим объектом с запаздыва-

нием. Система стабилизации нейтрального объекта исследуется в работе [9], а задача робастного управления нейтральным объектом и нелинейным объектом — в статьях [10, 11] соответственно. Задачи управления объектом с распределенным запаздыванием решаются в работах [12–14].

В данной статье конструируется система слежения за эталонным сигналом для объекта с распределенным запаздыванием по состоянию и управлению в условиях неопределенности параметров математической модели.

Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & Ax(t) + D \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta + \\ & + B \int_{-h}^0 u(t + \theta) d\theta + \Gamma f(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), u(\theta) = 0, x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0],$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $u(t)$, $y(t)$ — скалярные управляющее воздействие и регулируемая переменная; $f(t)$ — скалярное внешнее возмущение; $\varphi(\theta)$ — непрерывная начальная функция; h — время запаздывания; A , D , B , Γ , C — числовые матрицы соответствующих порядков.

Требуется получить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t \geq T_0, \quad (2)$$

где $y_m(t)$ — сигнал, который должен отслеживаться выходом объекта управления; величина $\delta > 0$ характеризует точность слежения; T_0 — время, по истечении которого с начала функционирования системы выполняется целевое неравенство. Иными

словами, условие (2) означает, что целевое неравенство должно выполняться за конечное время, которое зависит от многих факторов — начальных условий объекта, возмущений и эталонного сигнала.

Будем решать сформулированную задачу при следующих ограничениях.

Предположения

1. Пара (A, B) — управляема, а (A, C) — наблюдаема.

2. Известны диапазоны возможных значений элементов матриц A, D, B, Γ, C .

3. Уравнение (1) является минимально-фазовым, т. е. квазиполином $CA\text{Adj}\Lambda(s)B$ является гурвицевым, где s — комплексная переменная в преобразовании Лапласа; $\Lambda(s) = (I_n s - A - D\sigma(s))$; I_n — единичная матрица порядка $n \times n$; $\text{Adj}\Lambda(s)$ — присоединенная матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы $\Lambda(s)$);

$$\sigma(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta = \frac{1 - e^{-hs}}{s}. \quad (3)$$

4. Внешнее возмущение $f(t)$ и эталонный сигнал $y_m(t)$ являются гладкими и ограниченными функциями.

5. Производные регулируемой переменной и управляющего воздействия не измеряются.

Метод решения

Сформируем управляющее воздействие в соответствии с формулой

$$u(t) = u(t-h) + \alpha \vartheta(t), \quad (4)$$

где $\alpha > 0$, $\vartheta(t)$ — новое управление.

Вычислим преобразование Лапласа для интегралов в уравнениях (1), учитывая равенство (3) и начальные условия. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-st} dt \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{s} \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} (x(t) - x(t-h)) dt = \\ &= \frac{1}{s} \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta + \frac{1 - e^{-sh}}{s} x(s) = \frac{1}{s} \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta + \sigma(s)x(s), \\ & \int_{-h}^0 u(t+\theta) d\theta = \frac{1}{s} \int_{-h}^0 u(\theta) d\theta + \\ &+ \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} (u(t) - u(t-h)) dt = \frac{1 - e^{-sh}}{s} u(s) = \sigma(s)u(s). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (1) в изображениях Лапласа примут вид

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + D\sigma(s)x(s) + B\sigma(s)u(s) + \\ &+ \Gamma f(s) + x(0) + \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta, \quad y(s) = Cx(s). \end{aligned} \quad (5)$$

Без потери общности и с целью упростить преобразования будем считать, что матрица D имеет вид $D = [d \ 0_{n \times (n-1)}]$, где d — n -мерный вектор, $0_{n \times (n-1)}$ — нулевая матрица порядка $n \times (n-1)$.

Преобразуем уравнения (5) в форму вход—выход, учитывая соотношение (4):

$$\begin{aligned} sQ_n(s)y(s) + Q_{n-1}(s)(1 - e^{-hs})y(s) &= \\ = R_m(s)\alpha\vartheta(s) + sS_r(s)f(s) + sK(s), \end{aligned} \quad (6)$$

где $K(s)$ — изображение начальных условий,

$$K(s) = C\text{Adj}\Lambda(s) \left(\varphi(0) + D \frac{1}{s} \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right);$$

$$\begin{aligned} Q_n(s) + Q_{n-1}(s)\sigma(s) &= \det\Lambda(s); \\ R_m(s) &= C\text{Adj}\Lambda(s)B; \quad S_r(s) = C\text{Adj}\Lambda(s)\Gamma, \end{aligned}$$

индексы у многочленов здесь и в дальнейшем соответствуют их порядкам, $r \leq n-1$.

Применим алгоритм деления Евклида к полиному $sQ_n(s) + Q_{n-1}(s)$:

$$\begin{aligned} sQ_n(s) + Q_{n-1}(s) &= \bar{Q}_\gamma(s)R_m(s) + N_{m-1}(s), \\ \gamma &= n+1-m. \end{aligned}$$

Представим многочлен $\bar{Q}_\gamma(s)$ в виде суммы двух полиномов:

$$\bar{Q}_\gamma(s) = Q_\gamma(s) + \tilde{Q}_{\gamma-1}.$$

Здесь $Q_\gamma(s)$ — гурвицев полином. Тогда получим $\bar{Q}_\gamma(s)R_m(s) + N_{m-1}(s) = (Q_\gamma(s) + \tilde{Q}_{\gamma-1}(s))R_m(s) + N_{m-1}(s)$. Подставив это выражение в уравнение (6) и, разделив полученное уравнение слева и справа на нормированный полином $\bar{R}_m(s) = \frac{1}{r_{m0}} R_m(s)$, получим

$$Q_\gamma(s)y(s) = r_{m0}\alpha\vartheta(s) + \psi_1(s), \quad (7)$$

r_{m0} — коэффициент при старшем члене у полинома $R_m(s)$,

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= \frac{1}{\bar{R}_m(s)} (Q_{n-1}(s)e^{-hs}y(s) - \tilde{Q}_{\gamma-1}(s)y(s) + \\ &+ sS_r(s)f(s) + sK(s)). \end{aligned}$$

Составим уравнение для сигнала рассогласования $e(s) = y(s) - y_m(s)$:

$$Q_\gamma(s)e(s) = \vartheta(s) + \psi(s), \quad (8)$$

где $y_m(s)$ — изображение Лапласа эталонного сигнала $y_m(t)$,

$$\psi(s) = \psi_1(s) + (r_{m0}\alpha - 1)\vartheta(s) + Q_\gamma(s)y_m(s).$$

Функция $\psi(t)$, которая является оригиналом изображения $\psi(s)$, несет всю информацию о неопределенности параметров математической модели и возмущениях.

Воспользуемся методом внутренней модели, дискретный вариант которой изложен в работе [15]. В соответствии с этим методом закон управления должен иметь вид

$$\left(F_M(s) - \frac{A_p(s)}{C_\gamma(s)}\right) \vartheta(s) = \left(B_M(s) + \frac{Q_\gamma(s)A_p(s)}{C_\gamma(s)}\right) e(s), \quad (9)$$

где $F_M(s)$, $B_M(s)$ — многочлены минимального порядка, которые являются решением полиномиального уравнения

$$F_M(s)Q_\gamma(s) + B_M(s) = \Phi(s).$$

Здесь $\Phi(s)$ — требуемый характеристический полином замкнутой системы по ошибке слежения при отсутствии функции $\psi(s)$; $A_p(s)$ — произвольный полином; $C_\gamma(s)$ — гурвицев многочлен.

В данном случае полином $Q_\gamma(s)$ является гурвицевым и выбирается проектировщиком, а сформулированная задача состоит в обеспечении целевого условия (2), что требует уменьшения влияния функции $\psi(s)$ на ошибку слежения. Поэтому возьмем $B_M(s) = 0$, $F_M(s) = A_p(s) = 1$. Тогда закон управления (9) можно записать в виде

$$\vartheta(s) = -\left(\frac{Q_\gamma(s)}{C_\gamma(s)}e(s) - \frac{1}{C_\gamma(s)}\vartheta(s)\right). \quad (10)$$

Покажем, что при выборе многочлена $C_\gamma(s)$ в виде $C_\gamma(s) = (\mu s + 1)^\gamma$ алгоритм управления (10) обеспечит выполнение целевого условия (2), где $\mu > 0$ — достаточно малое число.

Применим обратное преобразование Лапласа к уравнениям (8), (10) и запишем их в векторной форме, принимая во внимание равенство $Q_\gamma(t)e(t) - \vartheta(t) = \psi(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + b(\vartheta(t) + \psi(t)), \quad e(t) = L\varepsilon(t), \\ \mu \dot{z}(t) &= F_0 z(t) - b\psi(t), \quad \vartheta(t) = Lz(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}^\gamma$, $z \in \mathbb{R}^\gamma$, $L = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$,

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -q_\gamma & \dots & \dots & -q_1 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

q_i — коэффициенты полинома $Q_\gamma(s)$. Получили сингулярно-возмущенную систему уравнений, так как второе уравнение в (11) описывает быстрые составляющие, если μ — малое число.

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений, многочлен $C_\gamma(s) = (\mu s + 1)^\gamma$. Тогда существует число $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu \leq \mu_0$ алгоритм управления (10) обеспечит выполнение целевого условия (2). Доказательство приведено в приложении.

Для иллюстрации работы полученного алгоритма слежения рассмотрим числовой пример.

Пример

Рассмотрим объект, динамические процессы в котором описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \int x(t + \theta) d\theta + \\ -2 \end{matrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \int u(t + \theta) d\theta + \\ -2 \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} f(t), \quad y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t), \end{aligned}$$

$$x^T(\theta) = [6 \ 2 \ 2], \quad u^T(\theta) = 0, \quad \theta \in [-2; 0].$$

Класс неопределенности задан неравенствами:

$$\begin{aligned} -3 \leq a_i \leq 2, \quad -2 \leq d_i \leq 1, \quad 2 \leq b_i \leq 4, \\ i = 1, 2, 3; \quad -2 \leq k_j \leq 4, \quad |f(t)| \leq 3. \end{aligned}$$

Передаточные функции по управлению и возмущению имеют вид

$$W_u(s) = \frac{(b_1 s^2 + b_2 s + b_3)\sigma(s)}{s^3 - a_1 s^2 - a_2 s - a_3 - (d_1 s^2 + d_2 s + d_3)\sigma(s)};$$

$$W_f(s) = \frac{k_1 s + k_2}{s^3 - a_1 s^2 - a_2 s - a_3 - (d_1 s^2 + d_2 s + d_3)\sigma(s)}.$$

В соответствии с соотношением (3)

$$u(t) = u(t - h) + \alpha \vartheta(t).$$

Тогда уравнение (6) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} (s^4 - a_1 s^3 - a_2 s^2 - a_3 s - (d_1 s^2 + d_2 s + d_3))y(s) + \\ + (d_1 s^2 + d_2 s + d_3)e^{-2s}y(s) = (b_1 s^2 + b_2 s + b_3)\alpha \vartheta(s) + \\ + (k_1 s^2 + k_2 s)f(s) + sK(s). \end{aligned}$$

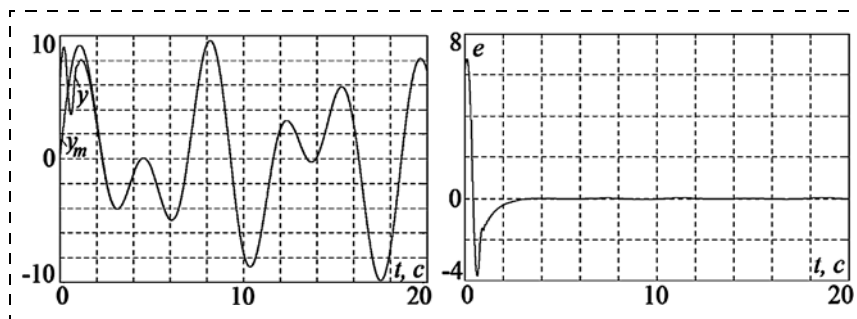
Далее, выполнив преобразования, которые осуществлялись для получения формулы (8), выберем многочлены $Q_\gamma(s) = s^2 + 5s + 6$, $C_\gamma(s) = (\mu s + 1)^2$. Алгоритм управления (10) в преобразованиях Лапласа будет иметь вид

$$\vartheta(s) = -\left(\frac{s^2 + 5s + 6}{(\mu s + 1)^2}e(s) - \frac{1}{(\mu s + 1)^2}\vartheta(s)\right).$$

На рисунке представлены переходные процессы по выходу и по ошибке слежения при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} y_m(t) &= 5\sin t + 5\sin 1,7t, \quad f(t) = \sin 2t + \sin 2,4t, \\ a_1 &= d_i = 1, \quad b_1 = b_2 = 3, \quad b_3 = 4, \quad k_1 = k_2 = 2. \end{aligned}$$

При этих исходных данных ошибка слежения $e(t)$ после 8 с не превышает значения 0,04. Если $\mu = 0,05$, то $|e(t)| < 0,02$; если $\mu = 0,01$, то $|e(t)| < 0,003$. С уменьшением величины μ всплеск переходного



Переходные процессы

процесса по ошибке в отрицательную сторону уменьшается и сглаживается.

Во всех случаях на управляющее воздействие накладывалось ограничение $|u(t)| \leq 50$.

Заключение

Решена задача проектирования робастного алгоритма слежения за эталонным сигналом с помощью метода внутренней модели, который предложен в работе [5] для дискретных систем. В данном случае обоснована его применимость для объекта, математической моделью которого являются уравнения с распределенным запаздыванием по состоянию и управлению.

Следует отметить, что при другой структуре матрицы D , т. е. когда она имеет все ненулевые элементы, алгоритм слежения имеет точно такой же вид. В этом случае доказательство работоспособности очень громоздко. Полученные алгоритмы позволяют получить хорошую точность слежения и существенно подавить внешние возмущения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство состоит из двух частей. Вначале докажем работоспособность алгоритма для редуцированной модели. Затем обоснуем близость переходных процессов в исходной системе и в редуцированной модели.

Пусть в системе уравнений (11) число $\mu = 0$, тогда получим редуцированную модель

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(t) = A_m \bar{\varepsilon}(t) + b(\bar{\vartheta}(t) + \bar{\psi}(t)); \quad \bar{e}(t) = L \bar{\varepsilon}(t); \quad (\text{П.1})$$

$$0 = F_0 \bar{z}(t) - b \bar{\psi}(t); \quad \bar{\vartheta}(t) = L \bar{z}(t),$$

$$\text{где } \bar{\psi}(t) = (r_{m0}\alpha - 1)\bar{\vartheta}(t) + \bar{\psi}_1(t) + Q_\gamma(P)y_m(t);$$

$$\bar{e}(t) = \bar{y}(t) - y_m(t);$$

$$\bar{\psi}_1(t) = \frac{1}{\bar{R}_m(P)} (Q_{n-1}(P)\bar{y}(t-h) - \tilde{Q}_{\gamma-1}(P)\bar{y}(t) + PS_r(P)f(t)) + \chi(t);$$

$P = d/dt$ — оператор дифференцирования; $\chi(t)$ — оригинал изображения, связанного с начальными условиями, который мажорируется затухающей экспонентой.

Из второго уравнения (П.1) имеем $\bar{\vartheta}(t) = LF_0^{-1}b\bar{\psi}(t) = -\bar{\psi}(t)$. Подставив это значение в первое уравнение (П.1), получим

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}(t) &= A_m \bar{\varepsilon}(t), \quad \bar{e}(t) = L \bar{\varepsilon}(t), \\ \bar{\vartheta}(t) &= -\bar{\psi}(t). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Так как матрица A_m является гурвицевой, то справедливы условия:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}(t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P^j \bar{e}(t) = 0, \\ j &= 1 \dots \gamma. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Следовательно, переменные $P^j \bar{y}(t)$ ограничены. Разрешим уравнение $\bar{\vartheta}(t) = -((r_{m0}\alpha - 1)\bar{\vartheta}(t) + \bar{\psi}_1(t) + Q_\gamma(P)y_m(t))$ относительно $\bar{\vartheta}(t)$:

$$\bar{\vartheta}(t) = -\frac{1}{r_{m0}\alpha} (Q_\gamma(P)y_m(t) + \bar{\psi}_1(t)).$$

Подставим $\bar{\psi}_1(t)$ в данную формулу, в результате чего получим

$$\begin{aligned} R_m(P)\alpha \bar{\vartheta}(t) &= -R_m(P)Q_\gamma(P)y_m(t) - \\ &- (Q_{n-1}(P)y(t-h) + PS_r(P)f(t)) + \chi(t). \end{aligned}$$

Учитывая гурвицевость квазиполинома $R_m(P)$, порядок полинома $Q_{n-1}(P)$, ограниченность переменных $P^j \bar{y}(t)$, гладкость функций $y_m(t)$ и $f(t)$, получаем, что управление $\bar{\vartheta}(t)$ является ограниченным. Следовательно, функция $\bar{\psi}(t)$ и ее производная тоже ограничены.

Таким образом, редуцированная система (П.1) асимптотически устойчива по переменным $\bar{\varepsilon}(t)$ с ограниченным управлением $\bar{\vartheta}(t)$. Тогда для заданного числа $\delta_1 > 0$ существует момент времени T_1 такой, что при $t > T_1$ будет выполнено неравенство

$$|\bar{y}(t) - y_m(t)| < \delta_1. \quad (\text{П.4})$$

Покажем, что переходные процессы в системах (11) и (П.1) при соответствующем выборе числа μ могут быть близки. Введем векторы рассогласования $\xi(t) = \varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t)$, $\eta(t) = z(t) - \bar{z}(t) = z(t) - F_0^{-1}b\bar{\psi}(t)$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_m \xi(t) + b(\vartheta(t) - \bar{\vartheta}(t) + \psi(t) - \bar{\psi}(t)); \\ \zeta(t) &= L \xi(t); \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} F_0 \eta(t) - F_0^{-1}b\dot{\bar{\psi}}(t); \quad \vartheta(t) - \bar{\vartheta}(t) = L \eta(t).$$

При одинаковых начальных условиях и одинаковых входных сигналах, учитывая равенство $y(t) - \bar{y}(t) = e(t) - \bar{e}(t) = \zeta(t)$, получим

$$\begin{aligned} \vartheta(t) - \bar{\vartheta}(t) + \psi(t) - \bar{\psi}(t) &= \\ &= \vartheta(t) - \bar{\vartheta}(t) + (r_{m0}\alpha - 1)\vartheta(t) + Q_\gamma(P)y_m(t) + \\ &+ \frac{1}{\bar{R}_m(P)} (Q_{n-1}(P)y(t-h) - \tilde{Q}_{\gamma-1}(P)y(t) + \\ &+ PS_r(P)f(t) + PK(P)) - (r_{m0}\alpha - 1)\bar{\vartheta}(t) - \\ &- Q_\gamma(P)y_m(t) - \frac{1}{\bar{R}_m(P)} (Q_{n-1}(P)\bar{y}(t-h) - \end{aligned}$$

$$- \tilde{Q}_{\gamma-1}(P)\bar{y}(t) + PS_r(P)f(t) + PK(P)) = \\ = r_{m0}\alpha L\eta(t) + \frac{1}{\bar{R}_m(P)}(Q_{n-1}(P)\zeta(t-h) - \tilde{Q}_{\gamma-1}(P)\zeta(t)).$$

Выделим целую часть в полиноме $Q_{n-1}(P)$:

$$\frac{Q_{n-1}(P)}{\bar{R}_m(P)} = G_{\gamma-2}(P) + \frac{\Delta G_{m-1}}{\bar{R}_m(P)}.$$

Если $\gamma - 1 < m$, то принимая во внимание структуру матрицы A_m , систему уравнений (П.5) можно преобразовать к виду

$$\dot{\xi}(t) = A_m \xi(t) + b(r_{m0}\alpha L\eta(t) + \tau_1^T \xi(t-h) + \\ + \tau_2^T \omega_1(t) + \tau_3^T \omega_2(t)); \quad (\text{П.6})$$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} F_0 \eta(t) - F_0^{-1} b \ddot{\psi}(t); \quad \eta(t) - \bar{\eta}(t) = L\eta(t);$$

$$\dot{\omega}_1(t) = \Omega \omega_1(t) + bL\xi(t-h);$$

$$\dot{\omega}_2(t) = \Omega \omega_2(t) + bL\xi(t),$$

где $\omega_1 \in \mathbb{R}^m$, $\omega_2 \in \mathbb{R}^m$, Ω — гурвицевая матрица, характеристическим полиномом которой является многочлен $\bar{R}_m(s)$; $\tau_1^T = [g_{10} \dots g_{1(\gamma-2)} \ 0 \dots 0]$, $\tau_2^T = [g_{20} \dots g_{2(m-1)} \ 0 \ 0]$, $\tau_3^T = [g_{30} \dots g_{3(\gamma-1)} \ 0 \dots 0]$ — коэффициенты полиномов $G_{\gamma-2}(s)$, $\Delta G_{m-1}(s)$, $\tilde{Q}_{\gamma-1}(s)$ соответственно, записанные в обратном порядке.

Введем блочные вектор $\phi^T(t) = [\xi^T(t) \ \omega_1^T(t) \ \omega_2^T(t)]$ и матрицы

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_m & b\tau_2^T & b\tau_3^T \\ 0 & \Omega & 0 \\ 0 & bL & \Omega \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b\tau_1^T & 0 & 0 \\ 0 & bL & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} br_{m0}\alpha L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

матрица A_0 является гурвицевой.

Тогда система уравнений (П.6) запишется в виде

$$\dot{\phi}(t) = A_0 \phi(t) + B_1 \phi(t-h) + B_2 \eta(t); \quad (\text{П.7})$$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} F_0 \eta(t) - F_0^{-1} b \ddot{\psi}(t).$$

Возьмем функционал Ляпунова—Красовского

$$V(t) = \phi^T(t)H\phi(t) + \eta^T(t)H_1\eta(t) + \int_{t-h}^t \phi^T(\theta)R\phi(\theta)d\theta, \quad (\text{П.8})$$

где положительно-определенные матрицы H , H_1 являются решениями матричных уравнений

$$HA_0 + A_0^T H + HB_1 R^{-1} B_1^T H = -R - \rho I; \\ H_1 F_0 + F_0^T H_1 = -\beta I. \quad (\text{П.9})$$

Здесь $\rho > 0$, $\beta > 0$, R — произвольная положительно-определенная матрица, которая подбирается в процессе решения.

Вычислим производную от функционала (П.8) на траекториях системы (П.7):

$$\dot{V}(t) = \phi^T(t)(HA_0 + A_0^T H)\phi(t) + 2\phi^T(t)HB_1\phi(t-h) + \\ + 2\phi^T(t)HB_1\eta(t) + \phi^T(t)R\phi(t) - \phi^T(t-h)R\phi(t-h) + \\ + \frac{1}{\mu} \eta^T(t)(H_1 F_0 + F_0^T H_1)\eta(t) - 2\eta^T(t)H_1 F_0^{-1} b \ddot{\psi}(t).$$

Воспользуемся тождеством

$$2\phi^T(t)HB_1\phi(t-h) - \phi^T(t-h)R\phi(t-h) = \\ = \phi^T(t)HB_1 R^{-1} B_1^T H\phi(t) - (R^{-1} B_1^T H\phi(t) - \\ - \phi(t-h))^T R (R^{-1} B_1^T H\phi(t) - \phi(t-h))$$

и оценками

$$2\phi^T(t)HB_1\eta(t) \leq \mu |HB_1|^2 |\phi(t)|^2 + \frac{1}{\mu} |\eta(t)|^2;$$

$$-2\eta^T(t)H_1 F_0^{-1} b \ddot{\psi}(t) \leq \frac{1}{\mu} |\eta(t)|^2 + \mu |H_1 F_0^{-1} b|^2 |\ddot{\psi}(t)|^2.$$

Тогда, принимая во внимание (П.9), получим следующее неравенство:

$$\dot{V}(t) \leq -(\rho - \mu |HB_1|^2 |\phi(t)|^2 - \frac{\beta-2}{\mu} |\eta(t)|^2 + \mu \delta_\gamma,$$

где

$$\delta_\gamma = \sup_t |H_1 F_0^{-1} b|^2 |\ddot{\psi}(t)|^2.$$

$\sup(\cdot)$ существует, так как была доказана ограниченность величины $\ddot{\psi}(t)$. Если выбрать числа ρ и β из условий $\rho - \mu |HB_1|^2 = \rho_1$, $\rho_1 > 0$, $\beta = 3$, то получим

$$\dot{V}(t) \leq -\rho_1 |\phi(t)|^2 - \frac{1}{\mu} |\eta(t)|^2 + \mu \delta_\gamma,$$

откуда следует, что область притяжений системы (П.7) задана неравенством

$$\rho_1 |\phi(t)|^2 + \frac{1}{\mu} |\eta(t)|^2 \leq \mu \delta_\gamma.$$

Из этого неравенства следует следующая цепочка неравенств:

$$|\zeta(t)|^2 \leq |\xi(t)|^2 \leq |\phi(t)|^2 \leq \frac{\mu}{\rho_1} \delta_\gamma.$$

Принимая во внимание соотношение (П.4), получим

$$|e(t)| = |\bar{e}(t) + \zeta(t)| \leq \delta_1 + \sqrt{\frac{\mu}{\rho_1}} \delta_\gamma. \quad (\text{П.10})$$

Если числа δ_1 и μ выбрать из условия

$$\delta_1 + \sqrt{\frac{\mu}{\rho_1}} \delta_\gamma < \delta,$$

то из неравенства (П. 10) получим целевое условие (2).

Список литературы

1. Харитонов В. Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086—2088.
2. Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 106—125.
3. Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. № 5. С. 72—90.
4. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе матричных неравенств. М.: Наука, 2007.
5. Хлебников М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. С. 27—42.
6. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. С. 3—10.
7. Goodall D. P., Postoyan R. Output feedback stabilization for nonlinear time-delay systems subject to input constraints // Int. Journal of Control. 2010. Vol. 83, N. 4. P. 676—693.
8. Liu S. J., Zhang J. F., Ge S. S. Adaptive output feedback control for a class of uncertain stochastic non-linear systems with time delays // Int. Journal of Control. 2008. Vol. 81, N. 8. P. 1210—1220.
9. Ivanescu D., Niculescu S. I., Dugard L., Dion J. M., Verriest E. I. On delay dependent stability of neutral systems // Automatica. 2003. Vol. 39, N. 2. P. 255—261.
10. Han Q. L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type // Automatica. 2002. Vol. 38, N. 4. P. 719—723.
11. Nguang S. K. Robust stabilization of a class of time-delay nonlinear systems. // IEEE Trans. Automat. Contr. 2000. Vol. 45, N. 4. P. 756—762.
12. Karimi H. R. Robust adaptive H_∞ synchronization of master-slave systems with discrete and distributed time-varying delays and nonlinear perturbations // Preprints of 18th IFAC World Congress. 2011. P. 302—307.
13. Berezansky L., Braverman E. On nonoscillation and stability for systems of differential equation with a distributed delay // Automatica. 2012. V. 48, N. 4. P. 612—618.
14. Цыкунов А. М. Робастное управление сетью объектов с распределенным и дискретным запаздыванием в каналах взаимосвязи // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 10. С. 2—9.
15. Цыпкин Я. З. Робастно-оптимальные дискретные системы управления // Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 25—37.

Robust Control of the Objects with Distributed Delay on a State Vector and Input

A. M. Tsykunov, tsykunov_al@mail.ru✉, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, 414056, Russian Federation

Corresponding author: Tsykunov Aleksandr M., D. Sc., Head of Mathematics Department, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, 414056, Russian Federation, e-mail: tsykunov_al@mail.ru

Received on August 18, 2015

Accepted on August 25, 2015

The article is devoted to studying of the object, the mathematical model of which is the vector equation with a distributed delay on a state vector and input signal. It is assumed that the parameters of the mathematical model are unknown, and the limited disturbance influencing the object is unmeasured. The problem of tracing of a reference signal is formulated. In order to ensure qualitative tracking of the reference signal, it is necessary to compensate for the influence of the unmeasured disturbance on the output variable. For solving of this problem the method of the internal model is used. This method proved itself in designing of the robust controls for the discrete systems. In this paper it is used for the continuous systems. The problem of the robust control of the objects with the distributed delay on the state vector and input is being solved. It is assumed that the parameters of the mathematical model of an object are unknown, and only the output variables are available for measurement. As the target conditions the accuracy of tracking of the reference signal is accepted. The control algorithm was obtained allowing to compensate for the aprioristic uncertainty and to reduce essentially the influence of the unmeasured bounded external limited disturbance. The equations of the closed system are a singular system of equations. It was proved, that the received control algorithm ensured implementation of the target conditions. The numerical examples and the results of the computer simulation, which have demonstrated the efficiency of the received algorithm of tracking, are presented.

Keywords: distributed delay, robust control, target condition, functional, reference signal, singular system of equations

For citation:

Tsykunov A. M. Robust Control of the Objects with Distributed Delay on a State Vector and Input, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no 12, pp. 795—801.

DOI: 10.17587/mau/16.795-801

References

1. Kharitonov V. L. *Asimptoticheskaya ustoichivost' semeystva sistem lineynykh differentsial'nykh uravnenii* (The asymptotic stability of the family of systems of linear differential equations), *Differentsialnye Uravneniya*, 1978, vol. 14, no. 9, pp. 2086—2088 (in Russian).
2. Nazin S. A., Polyak B. T., M. V. Topunov M. V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 3, pp. 456—466.
3. Polyak B. T., Topunov M. V. Suppression of bounded exogenous disturbances: Output feedback, *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 5, pp. 801—818.
4. Balandin D. V., Kogan M. M. *Sintez zakonov upravleniya na asnove matritchnikh neravenstv* (Synthesis of laws of control on the basis of matrix inequalities), Moscow, Nauka, 2007 (in Russian).
5. Khlebnikov M. V. Suppression of bounded exogenous disturbances: A linear dynamic output controller, *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 4, pp. 699—712.
6. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of a suboptimal controller by output for dampening limited disturbances, *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 4, pp. 677—683.
7. Goodall D. P., Postoyan R. Output feedback stabilization for nonlinear time-delay systems subject to input constraints, *Int. Journal of Control*, 2010, vol. 83, no 4, pp. 676—693.
8. Liu S. J., Zhang J. F., Ge S. S. Adaptive output feedback control for a class of uncertain stochastic non-linear systems with time delays, *Int. Journal of Control*, 2008, vol. 81, no 8, pp. 1210—1220.
9. Ivanescu D., Niculescu S. I., Dugard L., Dion J. M., Verriest E. I. On delay dependent stability of neutral systems, *Automatica*, 2003, vol. 39, no 2, pp. 255—261.
10. Han Q. L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type, *Automatica*, 2002, vol. 38, no 4, pp. 719—723.
11. Nguang S. K. Robust stabilization of a class of time-delay nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2000, vol. 45, no 4, pp. 756—762.

12. Karimi H. R. Robust adaptive H_∞ synchronization of master-slave systems with discrete and distributed time-varying delays and nonlinear perturbations, *Preprints of 18th IFAC World Congress*, 2011, pp. 302–307.

13. Berezansky L., Braverman E. On nonoscillation and stability for systems of differential equation with a distributed delay, *Automatica*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 612–618.

14. Tsykunov A. M. *Robustnoe upravlenie set'yu ob"ektov s raspredelenным i diskretnym zapazdyvaniem v kanalakh vzaimosvyazi* (Robust Control of the Network of Objects with Distributed and Discrete Delay in Channels of Interrelation), *Mechatronica, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2013, no 10, pp. 2–9. (in Russian).

15. Tsypkin Ya. Z. *Robustno optimal'nye diskretnye sistemy upravleniya* (Robust optimal discrete control systems), *Avtomatika i Telemechanika*, 1999, no. 3, pp. 25–39 (in Russian).

УДК 621.372

DOI: 10.17587/mau.16.801-806

М. М. Гурарий, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., gourary@ippm.ru,

М. М. Жаров, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., zarov@ippm.ru,

С. Г. Русаков, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., rusakov@ippm.ru,

С. Л. Ульянов, д-р техн. наук, зав. отд., ulyas@ippm.ru,

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, Москва

Вычислительные алгоритмы исследования устойчивости динамических систем в задачах схемотехнического анализа

Приведены эффективные вычислительные алгоритмы цикла исследования устойчивости динамических систем. Алгоритмы используют принцип модальной аппроксимации. Для оценки устойчивости предложен вычислительный алгоритм определения полюсов передаточной функции, лежащих в правой полуплоскости комплексной плоскости. Обсуждается алгоритм вычисления полюсов схемной функции, обладающих наибольшей чувствительностью к параметрам электрической цепи. Приведены экспериментальные результаты проверки предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: устойчивость, параметрическая чувствительность, динамическая система, передаточная функция, собственные значения, модальная аппроксимация, доминирующие полюсы, вычеты

Введение

Применение обратных связей широко используется в аналоговых и радиотехнических схемах и улучшает их характеристики, обеспечивая снижение чувствительности к разбросу параметров, расширение полосы частот, согласование импедансов, снижение искажений выходного сигнала. Уменьшение размеров компонентов интегральных схем часто приводит к дополнительным паразитным обратным связям, существенно влияющим на характеристики схем в области высоких частот [2, 7, 9].

Переходная характеристика схемы с замкнутой петлей обратной связи полностью определяется ее полюсами. Характер расположения полюсов передаточной функции дает возможность разработчику оценить ряд важных характеристик линеаризованной модели: устойчивость, характер переходных процессов, быстродействие, степень устойчивости и др. Для разработчика схем также полезно знать траекторию движения полюсов на комплексной плоскости при большом отклонении параметров компонентов электрической цепи, позволяющую оценить указанные выше характеристики при некоторых предельных значениях параметров моделей компонентов.

Проблема сохранения устойчивости в схемах с обратными связями является важной практической задачей проектирования.

Самовозбуждение может возникать за счет появления паразитных обратных связей в таких схемах, как мощные усилители, маломощные усилители, приемники и т. д. Оценки устойчивости/неустойчивости и запаса устойчивости важны для указанных классов схем. Такая информация требуется разработчикам на ранних стадиях проектирования.

В статье выполнен анализ методов исследования устойчивости на основе алгебраических критериев.

Среди алгебраических критериев наиболее применяемым является оценка устойчивости линеаризованной модели по расположению полюсов передаточной функции на комплексной плоскости. Действительные части всех полюсов передаточной функции устойчивой схемы должны быть отрицательными (см. например, работу [12]).

Ниже обсуждается вычислительный алгоритм, базирующийся на отыскании доминирующих полюсов передаточной функции. В основу алгоритма положен подход, описанный в работе [11].

Предложенный алгоритм обладает высокой вычислительной эффективностью при исследовании устойчивости линеаризованной модели динамической системы.

При анализе устойчивости недостаточно установить факт самовозбуждения. Важно установить причину этого явления, обнаружить недостатки