

Ю. И. Мышляев, канд. техн. наук, доц., uimysh@mail.ru,

А. В. Фиошин, ассистент, earlov@gmail.com, Тар Яр Мьо, аспирант, brightxstar@gmail.com,
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Калужский филиал

Метод скоростного биградиента в задаче управления вибрационным гироскопом¹

Рассматривается задача адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом. В целях повышения астатизма системы и обеспечения гладкости управляющих сил по входам вводятся дополнительные интеграторы. Для системы с интеграторами методом скоростного биградиента синтезируется семейство гладких, релейных и комбинированных алгоритмов с настраиваемым многообразием. Приводится методика синтеза алгоритмов, условия применимости, анализ устойчивости адаптивной системы управления, робастности и результаты моделирования.

Ключевые слова: метод скоростного биградиента, настраиваемый скользящий режим, вибрационный гироскоп, устойчивость, функция Ляпунова

Введение

В последние годы широкое распространение получили микроэлектромеханические (МЭМ) гироскопы. Основной механический компонент одноосного вибрационного гироскопа представляет собой чувствительную массу с двумя степенями свободы, способную перемещаться в двух перпендикулярных направлениях на плоскости под действием упругих сил, сил трения и внешней вынуждающей силы. При этом в гироскопе происходит передача энергии от одной оси (оси приложения силы) к другой (ось измерения) через ускорение Кориолиса. Для определения угловой скорости вращения основания вибрационного гироскопа можно использовать отношение амплитуды вынужденных гармонических колебаний по оси Ox (ось приложения силы) к амплитуде возбужденных под действием силы Кориолиса колебаний Oy (ось датчика) [1].

В работах [1–4] указано, что управление без обратной связи оказывается чувствительным к малым вариациям параметров системы, которые непременно возникают в технологическом цикле производства и эксплуатации МЭМ гироскопов. Для повышения точности определения угловой скорости в условиях параметрической неопределенности могут использоваться либо конструктивные методы (например, введение второй чувствительной массы [2]), либо алгоритмические методы, основанные на использовании принципа обратной связи [3–5]. Квазистационарную (по отношению к частотам вынужденных гармонических колебаний чувствительной массы) угловую скорость вращения основания вибрационного гироскопа, наряду с кососимметричными коэффициентами жесткости и демпфирования, можно рассматривать как неизвестный параметр, подлежащий адаптации. Входные управляющие воздействия (силы) на обе оси гироскопа

выбираются исходя из достижения объектом управления — гироскопом — заданного качества. Часто управляющие силы формируются в виде релейного алгоритма или в виде комбинации — суммы гладкой настраиваемой и релейной составляющих [3–5]. Вопрос о физической реализуемости при этом не рассматривается. Более того, использование релейной составляющей ухудшает идентифицирующие свойства ввиду робастности алгоритмов управления на основе скользящих режимов, в том числе по отношению к параметрической неопределенности [5].

В работе [6] для повышения качества управления вибрационным гироскопом и улучшения идентифицирующих свойств алгоритма адаптации предложено расширение исходной системы за счет введения интеграторов по входам, т. е. повышение астатизма. Вместе с тем, введение интегратора повышает гладкость электростатической силы, приложенной к осям гироскопа. Заметим также, что при иной постановке задачи интегратор можно интерпретировать как упрощенную модель привода, создающего силы, действующие по осям гироскопа.

Данная работа является расширенной и дополненной версией доклада [6]. В частности, в представляемой работе рассматриваются вопросы: целесообразности введения дополнительных интеграторов по входам механической подсистемы виброгироскопа; анализа робастных свойств синтезируемых алгоритмов адаптивного управления по отношению к аддитивным возмущениям; сравнительного анализа сходимости, точности, наличия идентифицирующих свойств синтезированных алгоритмов.

Постановка задачи

Принцип действия вибрационного гироскопа в режиме измерения угловой скорости движения его основания (рис. 1) заключается в воздействии Кориолисова момента на вибрирующую инерционную массу (чувствительный элемент) [1–4].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Калужской области (грант № 14-48-03115).

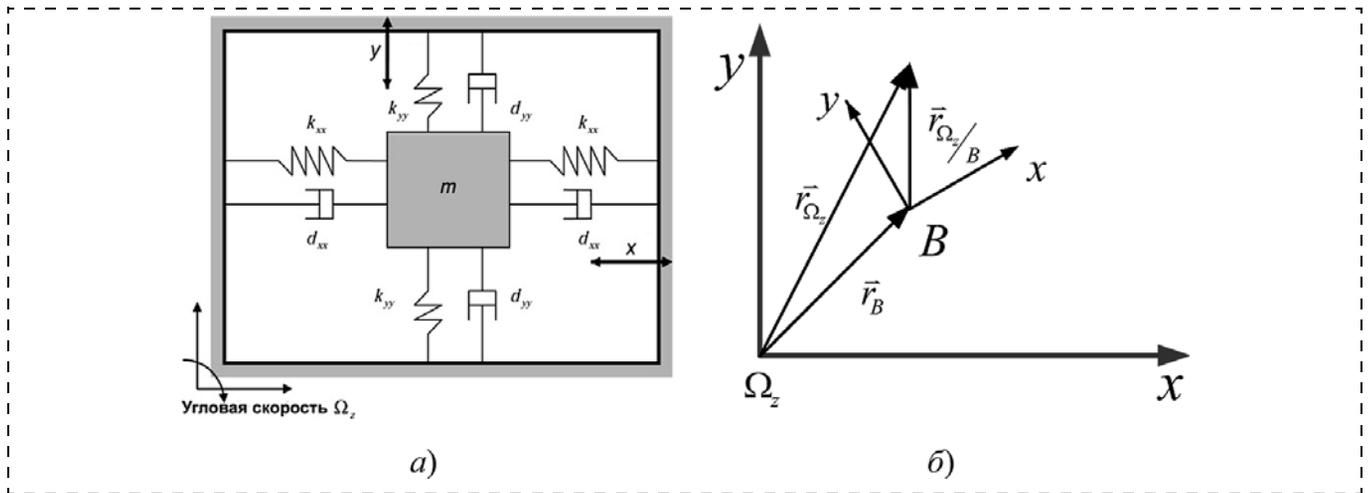


Рис. 1. Упрощенная модель одноосного вибрационного гироскопа (а); системы координат (б)

Математическая модель механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа в векторной форме имеет вид [1–3]

$$S_1 : \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u},$$

где $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z \\ \Omega_z & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{xy} & d_{yy} \end{pmatrix}, \mathbf{K}_b = \begin{pmatrix} \omega_x^2 & \omega_{xy} \\ \omega_{xy} & \omega_y^2 \end{pmatrix}, \omega_x = \sqrt{\frac{k_{xx}}{m}}, \omega_y = \sqrt{\frac{k_{yy}}{m}},$$

$$\omega_{xy} = \frac{k_{xy}}{m}, d_{xx} = m^{-1}d_{xx}^*, d_{xy} = m^{-1}d_{xy}^*, d_{yy} = m^{-1}d_{yy}^*;$$

x, y — перемещение массы вдоль ортогональных осей Bx, By ; m — масса чувствительного элемента; k_{xx}, k_{xy}, k_{yy} — коэффициенты упругости подвеса; $d_{xx}^*, d_{xy}^*, d_{yy}^*$ — коэффициенты демпфирования подвеса; u_x, u_y — приведенные к массе внешние силы, действующие в направлении осей Bx, By соответственно; Ω_z — угловая скорость вращения основания вибрационного гироскопа.

В силу возможных погрешностей изготовления вибрационного гироскопа, например геометрии самого чувствительного элемента и его подвеса, первичные (по оси Bx) и вторичные (по оси By) колебания могут оказывать взаимное влияние друг на друга. Кроме того, каждое из этих колебаний тем или иным образом связано с корпусом, что приводит к взаимному влиянию вибраций корпуса и чувствительного элемента. Описанная выше модель оказывается чувствительной к малым вариациям параметров системы [1, 2].

Эффективным путем повышения чувствительности виброгироскопа и, как следствие, обеспечения высокой точности измерения угловой скорости вращения основания является использование адаптивной системы управления вибрационным

гироскопом. Задача управления состоит в обеспечении желаемых автоколебаний по осям Bx, By и оценивании угловой скорости вращения основания Ω_z в условиях параметрической неопределенности. Желаемые автоколебания для подсистемы S_1 с частотами ω_1, ω_2 соответственно вдоль осей Bx и By можно задать с помощью явной эталонной модели вида

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m\mathbf{q}_m = 0, \mathbf{q}_m(0) \neq 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{q}_m = (x_m \ y_m)^T$ — вектор желаемых амплитуд; $\mathbf{K}_m = \text{diag}\{\omega_1^2 \ \omega_2^2\}$.

Введем ошибку слежения в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\boldsymbol{\varepsilon}_x^T \ \boldsymbol{\varepsilon}_y^T), \boldsymbol{\varepsilon}_x = (e_x \ \dot{e}_x)^T, \boldsymbol{\varepsilon}_y = (e_y \ \dot{e}_y)^T,$$

где $e_x = x - x_m, e_y = y - y_m$, и формализуем цель управления в форме целевого неравенства:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \Delta \text{ при } t \geq t_\varepsilon, \quad (2)$$

где $\Delta > 0$ — точность слежения.

Требуется синтезировать адаптивную систему управления, обеспечив достижение подсистемой S_1 цели управления (ЦУ) (2) в условиях параметрической неопределенности и идентификацию параметров гироскопа, т. е. их асимптотическую оценку:

$$\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_* \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор параметров подсистемы S_1 , а $\boldsymbol{\theta}_* = (d_{xx} \ d_{xy} \ d_{yy} \ \Omega_z \ \omega_x^2 \ \omega_{xy} \ \omega_y^2)^T$ — вектор оценки данных параметров.

Обеспечим высокочастотное колебательное вращение по отношению к диапазону измеряемой угловой скорости Ω_z вращения основания гироскопа. В этом случае квазистационарную угловую скорость Ω_z можно рассматривать в модели механической подсистемы S_1 в качестве неизвестного параметра, подлежащего идентификации.

Для повышения астатизма, получения гладких алгоритмов управления для механической подсистемы введем подсистему интеграторов. При этом получаем каскадную систему вида

$$\begin{aligned} S_1: \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} + 2\Omega\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{u}, \\ S_2: \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ — новый управляемый вход ($\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$); $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y)^T$ — вектор возмущения, который предполагается ограниченным ($\|\boldsymbol{\eta}\| \leq C_\eta$).

Для расширенной системы (3) поставим задачу обеспечения ограниченности траекторий замкнутой системы, достижения основного целевого неравенства (2) и дополнительной цели — идентификации параметров.

Синтез алгоритмов управления

Выберем целевой функционал для конечного каскада S_1 ОУ (3) с эталонной моделью (1) в виде

$$Q(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0,5(\boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{H}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{H}_y \boldsymbol{\varepsilon}_y), \quad (4)$$

где $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T > 0$, $i = \{x, y\}$.

В соответствии с ЦУ (2) введем целевое неравенство вида

$$Q(\boldsymbol{\varepsilon}) \leq \Delta_\varepsilon \text{ при } t \geq t_\varepsilon. \quad (5)$$

Очевидно, что при $Q(\boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ ЦУ (2) достигается.

Проведем синтез алгоритма управления методом скоростного биградиента [7], который включает в себя три этапа: на первом этапе в условиях полной априорной информации об объекте синтезируется "идеальное" виртуальное управление конечным каскадом, обеспечивающее достижение цели управления при полной априорной информации. На втором этапе неизвестные параметры "идеального" виртуального управления заменяются настраиваемыми, и синтезируется алгоритм адаптации в направлении антиградиента от скорости изменения целевого функционала по настраиваемым параметрам. На третьем этапе формируется многообразие пересечения в виде равенства нулю невязки между реальным входом выходного каскада и виртуальным управлением. Вводится дополнительный квадратичный функционал по отклонению траектории замкнутой системы от пересечения гиперповерхностей. Синтезируется управление в направлении антиградиента от скорости изменения дополнительного функционала по управлению, обеспечивающее достижение пересечения многообразий гиперповерхностей.

Этап 1. В соответствии с уравнениями (1), (3) модель ошибки имеет вид

$$\ddot{\mathbf{e}} = -(\mathbf{D} + 2\Omega)\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_b\mathbf{e} + \mathbf{K}_m\mathbf{q}_m + \mathbf{u}, \quad (6)$$

где $\mathbf{e}^T = (e_x, e_y)$.

Представим (6) в скалярной форме:

$$\ddot{e}_x = -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_x + \omega_1^2 x_m + u_x, \quad (7)$$

$$\ddot{e}_y = -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_y + \omega_2^2 y_m + u_y, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\mu}_x = (\dot{x} \mid \dot{y} \mid 0 \mid -2\dot{y} \mid x \mid y \mid 0)^T$,

$$\boldsymbol{\mu}_y = (0 \mid \dot{x} \mid \dot{y} \mid 2\dot{x} \mid 0 \mid x \mid y)^T.$$

Выберем "идеальное" виртуальное управление $\mathbf{u}_*^{virt} = (u_{x*}^{virt} \ u_{y*}^{virt})^T$ в форме суммы компенсирующей и линейной стабилизирующей обратной связи:

$$u_{x*}^{virt} = \boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_x + v_x, \quad (9)$$

$$u_{y*}^{virt} = \boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_y + v_y, \quad (10)$$

где $v_x = -\omega_1^2 x_m - \lambda_{0x} e_x - \lambda_{1x} \dot{e}_x$, $v_y = -\omega_2^2 y_m - \lambda_{0y} e_y - \lambda_{1y} \dot{e}_y$; $\lambda_{jx} > 0$, $\lambda_{jy} > 0$, $j = 0, 1$.

Структурная схема конечного каскада, замкнутого "идеальным" виртуальным управлением (при виртуальном выполнении $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*^{virt}$), приведена на рис. 2.

Производная по времени $\omega(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}_*)$ от целевого функционала $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$ при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*^{virt}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}_*) &= \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{H}_x \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{H}_y \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_y = \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{A}_{x*} \boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{A}_{y*} \boldsymbol{\varepsilon}_y \leq \\ &\leq -\rho_1 0,5 \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{H}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x - \rho_2 0,5 \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{H}_y \boldsymbol{\varepsilon}_y \leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}_{x*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_{0x} & -\lambda_{1x} \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}_{y*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_{0y} & -\lambda_{1y} \end{pmatrix}$ — гурвицевы матрицы, удовлетворяющие уравнениям

Лиapunова

$$\mathbf{H}_i \mathbf{A}_{i*} + \mathbf{A}_{i*}^T \mathbf{H}_i = -\mathbf{G}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T > 0, \quad i \in \{x, y\}, \quad (11)$$

$$\rho_i = \lambda_{\min}(\mathbf{G}_i) / \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i), \quad \rho = \min\{\rho_x, \rho_y\} > 0.$$

Следовательно, $Q(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \leq Q(\boldsymbol{\varepsilon}(0)) \exp(-\rho t)$, $Q(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и, в силу квадратичной формы $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$, получаем $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

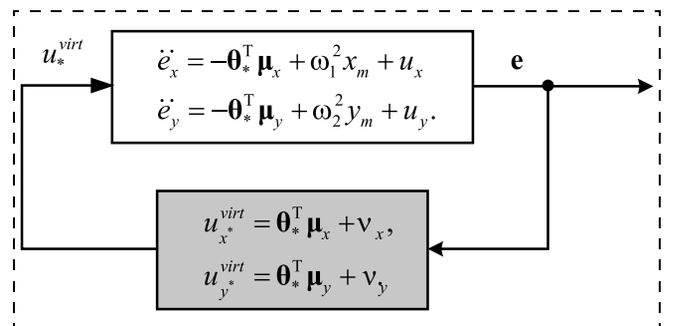


Рис. 2. Выходной каскад с "идеальным" виртуальным управлением

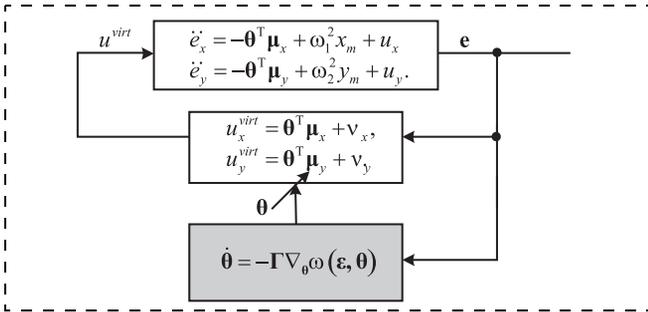


Рис. 3. Конечный каскад с адаптивным виртуальным управлением

Этап 2. Заменяем в соотношениях (9) и (10) неизвестные параметры θ_* настраиваемыми θ . Получим виртуальные управления вида

$$u_x^{virt} = \theta^T \mu_x + v_x, \quad (12)$$

$$u_y^{virt} = \theta^T \mu_y + v_y. \quad (13)$$

Вычисляя скорость изменения по времени $\omega(\epsilon, \theta)$ целевого функционала $Q(\epsilon)$, а затем градиенты по настраиваемым параметрам, получаем алгоритм адаптации в дифференциальной форме:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} \omega(\epsilon, \theta) = -\Gamma(\delta_x \mu_x + \delta_y \mu_y), \quad (14)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ — матрица коэффициентов усиления (в частности, $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i, i = \overline{1, 7}\}$, $\gamma_i > 0$), $\delta_x = e_x h_{12}^x + \dot{e}_x h_{22}^x$, $\delta_y = e_y h_{12}^y + \dot{e}_y h_{22}^y$; $\mathbf{H}_x = (h_{ij}^x)$, $\mathbf{H}_y = (h_{ij}^y)$ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова (11).

Структурная схема конечного каскада с адаптивным виртуальным управлением представлена на рис. 3.

Этап 3. Выберем отклонение от пересечения многообразий гиперповерхностей $\sigma \equiv \mathbf{0}$ в форме невязки между входом подсистемы S_1 и настраиваемым виртуальным управлением $\mathbf{u}^{virt} = (u_x^{virt} \ u_y^{virt})^T$:

$$\sigma = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}. \quad (15)$$

Введем дополнительную целевую функцию (ЦФ), характеризующую отклонение траектории системы от пересечения многообразий:

$$R(\sigma) = 0,5\sigma^T \sigma. \quad (16)$$

Семейство алгоритмов управления, обеспечивающих достижение целевого неравенства

$$R(\sigma) \leq \Delta_{\sigma}, \text{ при } t \geq t_{\sigma}, \quad (17)$$

имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \gamma_m \boldsymbol{\varphi}(\sigma), \quad (18)$$

где \mathbf{v}_0 — априорное заданное управление (может быть выбрано равным нулю), вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}(\sigma)$ удовлетворяет условию усиленной псевдоградиентности: $\boldsymbol{\varphi}(\sigma)^T \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\sigma, \mathbf{v}) \geq \beta \|\nabla_{\mathbf{v}} \mu(\sigma, \mathbf{v})\|^{\delta}$, где $\beta > 0$, $\delta = 1, 2, \dots$ — некоторые числа, $\mu(\sigma, \mathbf{v}) = \sigma^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) = \sigma^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau})$ — производная по времени от ЦФ (16),

$\nabla_{\mathbf{v}} \mu(\sigma, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}$ — градиент по управлению \mathbf{v} . Здесь $\boldsymbol{\tau}^T = (\dot{\theta}^T \mu_x + \theta^T \dot{\mu}_x + \dot{v}_x \theta^T \mu_y + \theta^T \dot{\mu}_y + \dot{v}_y)$.

Условию усиленной псевдоградиентности удовлетворяют, например, функции

$$\boldsymbol{\varphi}(\sigma) = \tilde{\Gamma}_2 \text{sign} \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\sigma, \mathbf{v}) \text{ при } \delta = 1, \beta = \frac{\lambda_{\min}(\tilde{\Gamma}_2)}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\sigma) = \tilde{\Gamma}_1 \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\sigma, \mathbf{v}) \text{ при } \delta = 2, \beta = \lambda_{\min}(\tilde{\Gamma}_1),$$

где $\tilde{\Gamma}_i = \tilde{\Gamma}_i^T > 0$ — (2×2) -мерные матрицы усилителя;

$\lambda_{\min}(\tilde{\Gamma}_i)$ — минимальное собственное значение $\tilde{\Gamma}_i$.

При $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ получаем гладкие и релейные алгоритмы вида

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\sigma, \mathbf{v}) = -\gamma_m \boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign} \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\sigma, \mathbf{v}) = -\gamma_m \text{sign} \boldsymbol{\sigma}.$$

Заметим, что релейный алгоритм ($\delta = 1$) относится к классу систем с настраиваемым скользящим режимом [8, 9]. Гладкие и релейные алгоритмы управления (18) с алгоритмом адаптации (14) относятся к классу алгоритмов скоростного биградиента [7] (алгоритмы формируются в направлениях, антиградиентных скоростям изменения по времени целевых функций $Q(\epsilon)$ и $R(\sigma)$).

Структурная схема системы управления вибрационным гироскопом с релейным управлением представлена на рис. 4.

Теорема 1. Для системы (1), (3), (12)–(15), (18) справедливы утверждения:

1. При $\delta = 1$ существует $\bar{\gamma}_1 > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_1$ цели управления (4), (17) достигаются при любых $\Delta_{\epsilon} > 0$, $\Delta_{\sigma} > 0$, все траектории системы ограничены, $Q(\epsilon) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \epsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Существует момент времени t^* такой, что $R(\sigma) \equiv 0 \Leftrightarrow \sigma \equiv 0$ при $t \geq t^*$. Алгоритм адаптации (14) обладает идентифицирующими свойствами: $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$.

2. При $\delta > 1$ для любого $\Delta = \min\{\Delta_{\epsilon}, \Delta_{\sigma}\} > 0$ существует $\bar{\gamma}_2(\Delta) > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_2$ цели управления (4), (17) достигаются при любых $\Delta_{\epsilon} > 0$, $\Delta_{\sigma} > 0$, все траектории системы ограничены. При $\gamma_m \rightarrow \infty$ справедливо: $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(\epsilon) \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$, алгоритм адаптации (14) обладает идентифицирующими свойствами: $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$.

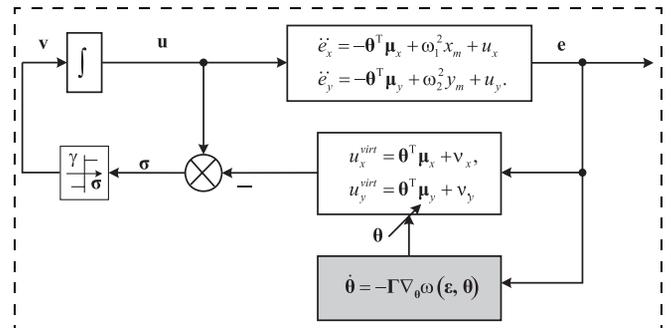


Рис. 4. Замкнутая адаптивная система управления

3. Существует функция Ляпунова вида

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2, \quad (19)$$

где $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_j\}$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1, 7}$.

Из теоремы 1 следует, что гладкий алгоритм управления обладает более слабыми свойствами сходимости и идентификации, поэтому его предпочтительнее использовать в комбинации с релейным алгоритмом. При этом в замкнутой системе достигается асимптотическая устойчивость $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Анализ устойчивости

Определим производную по времени от функции Ляпунова (19) поэлементно. Вычислим производную по времени от первого слагаемого $Q_x \triangleq 0,5\boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{H}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x$ при $u_x = \sigma_x + u_x^{vir}$ (15), где u_x^{vir} определяется из равенства (12):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_x &= \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{H}_x \begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_x + \omega_1^2 x_m + \sigma_x + u_x^{vir} \pm u_{x*}^{vir} \end{pmatrix} = \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{H}_x \begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ -\lambda_{1x} \dot{e}_x - \lambda_{0x} e_x + (u_x^{vir} - u_{x*}^{vir}) + \sigma_x \end{pmatrix} \leq \\ &\leq -\rho_x Q_x + \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \mathbf{H}_x \begin{pmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\mu}_x + \sigma_x \end{pmatrix} = \\ &= -\rho_x Q_x + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_x \sigma_x. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим производную от второго слагаемого $Q_y \triangleq 0,5\boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{H}_y \boldsymbol{\varepsilon}_y$ при $u_y = \sigma_y + u_y^{vir}$, где u_y^{vir} определяется из равенства (13):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_y &= \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{H}_y \begin{pmatrix} \dot{e}_y \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_y + \omega_2^2 y_m + \sigma_y + u_y^{vir} \pm u_{y*}^{vir} \end{pmatrix} = \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{H}_y \begin{pmatrix} \dot{e}_y \\ -\lambda_{1y} \dot{e}_y - \lambda_{0y} e_y + (u_y^{vir} - u_{y*}^{vir}) + \sigma_y \end{pmatrix} \leq \\ &\leq -\rho_y Q_y + \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \mathbf{H}_y \begin{pmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\mu}_y + \sigma_y \end{pmatrix} = \\ &= -\rho_y Q_y + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_y \boldsymbol{\mu}_y + \delta_y \sigma_y. \end{aligned}$$

Производная от $R(\boldsymbol{\sigma}) = 0,5\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}$ имеет вид

$$\mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}). \quad (20)$$

Вычислим производную от последнего слагаемого:

$$0,5 \frac{d}{dt} \{(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)\} = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Объединяя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho_x Q_x - \rho_y Q_y + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T (\delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y + \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \\ &+ \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\delta} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}), \quad \boldsymbol{\delta} \triangleq (\delta_x, \delta_y). \end{aligned}$$

В силу алгоритмов адаптации (14) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}. \quad (21)$$

Подставляя управление \mathbf{v} (18) в неравенство (21), получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_0) - \gamma_m \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}).$$

Положим $\mathbf{v}_* = -\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\tau} - 0,5\rho_R \boldsymbol{\sigma}$, где $\rho_R > 0$. Тогда с учетом условия усиленной псевдоградиентности имеем

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta, \\ &\beta > 0, \delta = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим два случая: $\delta = 1$ и $\delta > 1$.

Пусть $\delta = 1$. С учетом равенства $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{2} \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}$ соотношение (22) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_0 \|\boldsymbol{\sigma}\| \leq \\ &\leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\gamma_m \beta = \gamma_1 \beta + \gamma_0$; $\gamma_0 > 0$; $\tilde{\gamma}_0 = \sqrt{2} \gamma_0 > 0$; γ_1 удовлетворяет равенству

$$\gamma_1 \beta = \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|.$$

Интегрируя неравенство (23), получаем, что при любых ограниченных начальных условиях справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \{-\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}\} dt \leq V(0) < \infty. \quad (24)$$

Из (24) следует ограниченность $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|$. Из ограниченности траекторий эталонной модели $\mathbf{q}_m(t)$ и $\dot{\mathbf{q}}_m(t)$ и ограниченности $\boldsymbol{\theta}_*$ следуют ограниченность \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ и $\boldsymbol{\theta}$ соответственно. Из ограниченности \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ и $\boldsymbol{\theta}$ в силу соотношений (12), (13) следует ограниченность \mathbf{u}^{virt} . Из ограниченности \mathbf{u}^{virt} и $\boldsymbol{\sigma}$ в силу равенства (15) следует ограниченность \mathbf{u} . Тогда из ограниченности правых частей уравнений (7), (8) следует ограниченность $\ddot{\mathbf{e}}_x$ и $\ddot{\mathbf{e}}_y$, и, как следствие, $\ddot{\mathbf{q}}$ ограничено. Из анализа правой части уравнения (14) следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\theta}}$. Из ограниченности \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}_m$, $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ следует ограниченность $\boldsymbol{\tau}$. Из ограниченности \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$ и $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq C_\eta$ следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}$. Ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ приводит к равномерной непрерывности $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ соответственно. Следовательно, подынтегральная функция в (24) равномерно непрерывна. Тогда из леммы Барбалата следует $Q(\boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow 0$, $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из квадратичного вида $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $R(\boldsymbol{\sigma})$ следует $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$, $\boldsymbol{\sigma}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из неравенства (23) вытекает возможность более быстрой сходимости $R(\sigma) \rightarrow 0$ по отношению к $Q(\epsilon) \rightarrow 0$. Рассмотрим вопрос о сходимости к пересечению гиперповерхностей $\sigma \equiv 0$ более подробно. Вновь вернемся к равенству (20). При выбранном в неравенстве (23) коэффициенте усиления $\gamma_m \beta$ получаем $\dot{R} \leq -\rho_R R(\sigma) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\sigma)} \leq -\tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\sigma)}$. Интегрируя последнее неравенство, получаем $\sqrt{R(\sigma(t))} \leq \sqrt{R(\sigma(0))} - \frac{\tilde{\gamma}_0}{2} t$. В левой части неравенства — неотрицательная функция, в правой части — линейно убывающая функция, следовательно, существует момент времени t^* такой, что $R(\sigma(t^*)) = 0$, и справедлива оценка $t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\sigma(0))}$. Таким образом, в замкнутой системе возникает настраиваемый скользящий режим и $\sigma(t) \equiv 0$ при $t \geq t^*$. При этом в скользящем режиме справедливы оценки $Q(\epsilon(t)) \leq Q(\epsilon(t^*)) - \int_{t^*}^t \rho Q d\tau$ и $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{virt}(t)$ при $t \geq t^*$. Для случая $\delta = 1$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $\delta > 1$. Из неравенства (22) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\epsilon) - \rho_R R(\sigma) + d \|\sigma\| - \gamma_m \beta \|\sigma\|^\delta, \quad \text{где } d \triangleq \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|. \quad (25)$$

Для фиксированного Δ : $0 < \Delta < V_0 = Q(\epsilon(0)) + R(\sigma(0)) + 0,5 \|\theta(0) - \theta_*\|_{\Gamma^{-1}}^2$, положим $\bar{\rho}_1(\Delta) = \inf_{Q(\epsilon) > \Delta} \rho Q(\epsilon)$, $\bar{\rho}_2(\Delta) = \inf_{R(\sigma) > \Delta} \rho_R R(\sigma)$, $\bar{d} = \sup d$, где $\Omega_0 = \cup((\epsilon, \theta, \sigma) : Q(\epsilon) + R(\sigma) \leq V_0, 0,5 \|\theta - \theta_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 \leq V_0)$.

Тогда из (25) получаем $\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d} \|\sigma\| - \gamma_m \beta \|\sigma\|^\delta$.

Максимизируя последние два слагаемых по $\|\sigma\|$:

$$\max_{\|\sigma\|} (\bar{d} \|\sigma\| - \gamma_m \beta \|\sigma\|^\delta),$$

получаем

$$\bar{d} - \delta \gamma_m \beta \|\sigma\|^{\delta-1} = 0 \Leftrightarrow \|\sigma\| = \left(\frac{\bar{d}}{\delta \gamma_m \beta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}.$$

Тогда

$$\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d} \frac{\delta-1}{\delta} \left(\frac{\bar{d}}{\delta \gamma_m \beta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}. \quad (26)$$

В силу неравенства (26) для достаточно большого γ_m существуют $\epsilon_0 > 0$ и $\epsilon_1 > 0$ такие, что при $\gamma_m > \gamma_2$ неравенство $\dot{V} \leq -\epsilon_0$ будет выполняться, если будут выполняться неравенства

$$\Delta - \epsilon_1 \leq Q + R \leq V_0, \quad (27)$$

где Q, R — значения функционалов в момент времени t .

Левая часть неравенства (27) не может выполняться в течение времени, большего, чем V_0/ϵ_0 . Неравенство $Q + R \leq V_0$ не может нарушиться, так как $V \leq V_0$. Поэтому существует такой момент времени $\tau > 0$, что

$$Q + R \leq \Delta - \epsilon_1, \quad (28)$$

и, следовательно, при любом $t > \tau$ множество $G_t = \{s: s < t, Q + R \leq \Delta - \epsilon_1\}$ непустое. Выберем $\tau_t = \sup G_t$. Функции $\rho Q > 0$, $\rho_R R > 0$ при любых $Q \neq 0$, $R \neq 0$, следовательно $\bar{\rho}_1(\Delta) > 0$, $\bar{\rho}_2(\Delta) > 0$ при любом $\Delta > 0$. Выберем $\Delta = \min\{\Delta_\epsilon, \Delta_\sigma\}$. В силу (28) $Q(\epsilon) \leq \Delta - \epsilon_1 < \Delta_\epsilon$, $R(\sigma) \leq \Delta - \epsilon_1 < \Delta_\sigma$ при любом $t > \tau_t$. Заметим, что из (26) следует, что при $\gamma_m \rightarrow \infty$ последние два слагаемых правой части неравенства (25) стремятся к нулю и, как следствие, $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(\epsilon) \rightarrow 0$ ($\sigma \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$.

Наконец, ограниченность траекторий $\epsilon, \mathbf{u}, \theta, \sigma$ вытекает из условия $\dot{V} \leq 0$ (на траекториях системы, где не выполняются целевые неравенства (5), (17)) и квадратичной формы функционалов $R(\sigma)$ и $Q(\epsilon)$. Для случая $\delta > 1$ теорема доказана.

Из анализа правой части алгоритма адаптации (14), достижения $(\sigma, \epsilon) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для случая $\delta = 1$ и предельного достижения (при $\gamma_m \rightarrow \infty$) для случая $\delta > 1$ следует, что $\|\theta - \theta_*\| \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$. Из анализа траекторий системы при $\sigma = 0$, $\epsilon = 0$ следует, что алгоритм адаптации обладает идентифицирующими свойствами, если выполнено условие интегральной невырожденности [10, 11] матрицы $\Phi(t)$:

$\int_{\tau}^{\tau+L} \Phi(s) \Phi(s)^T ds \geq \alpha \mathbf{I}$, где τ, L, α — некоторые положительные числа;

$$\Phi(t) \Phi(t)^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}^2 & \dot{x}\dot{y} & 0 & -2\dot{x}\dot{y} & x\dot{x} & \dot{x}y & 0 \\ \dot{x}\dot{y} & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 & \dot{x}\dot{y} & 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 & x\dot{y} & x\dot{x} + y\dot{y} & \dot{x}y \\ 0 & \dot{x}\dot{y} & \dot{y}^2 & 2\dot{x}\dot{y} & 0 & x\dot{y} & y\dot{y} \\ -2\dot{x}\dot{y} & 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 & 2\dot{x}\dot{y} & 4\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 & -2\dot{x}\dot{y} & 2x\dot{x} - 2y\dot{y} & 2\dot{x}y \\ x\dot{x} & \dot{x}y & 0 & -2x\dot{y} & x^2 & xy & 0 \\ \dot{x}y & x\dot{x} + y\dot{y} & x\dot{y} & 2x\dot{x} - 2y\dot{y} & xy & x^2 + y^2 & xy \\ 0 & \dot{x}y & y\dot{y} & 2x\dot{y} & 0 & xy & y^2 \end{bmatrix}.$$

В установившемся режиме движение чувствительного элемента гироскопа имеет колебательный характер, поэтому $\Phi(t) \Phi(t)^T$ — полного ранга, и условие идентифицируемости выполнено.

Результаты математического моделирования

В работах [1–4] отмечалось, что основное влияние на точность измерения скорости вращения оказывают перекрестные связи вибрационного гироскопа. Поэтому будем считать неизвестными па-

m	$\omega_1 = \omega_2$	q_0	d_{xx}	d_{xy}	d_{yy}	ω_x	ω_{xy}	ω_y	Ω_z	γ_2	γ_4	γ_6
10^{-8} кг	1 кГц	1 мкм	0,05	0,005	0,06	1,05	0,01	0,97	5	5,5	10	4

параметрами $\theta_2^* = d_{xy}$, $\theta_4^* = \Omega_z$, $\theta_6^* = \omega_{xy}$. Остальные параметры d_{xx} , d_{yy} , ω_x^2 , ω_y^2 считаются известными.

$$\text{Выбирая } \mathbf{A}_i^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, i = \{x, y\},$$

получаем $\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. При данных предположениях релейный и комбинированный алгоритмы управления имеют вид

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign} \boldsymbol{\sigma}; \quad (29)$$

$$\mathbf{v} = -\gamma_{m1} \boldsymbol{\sigma} - \gamma_{m2} \text{sign} \boldsymbol{\sigma}, \quad (30)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}$,

$$\mathbf{u}^{virt} = \begin{pmatrix} d_{xx}\dot{x} + (\theta_2 - 2\theta_4)\dot{y} + \omega_x^2 x + \theta_6 y - \omega_1^2 x_m - 2\dot{e}_x - e_x \\ d_{yy}\dot{y} + (\theta_2 + 2\theta_4)\dot{x} + \theta_6 x + \omega_y^2 y - \omega_2^2 y_m - 2\dot{e}_y - e_y \end{pmatrix},$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma_2(\delta_x \dot{y} + \delta_y \dot{x}), \dot{\theta}_4 = -\gamma_4(\delta_y \dot{x} - \delta_x \dot{y}),$$

$$\dot{\theta}_6 = -\gamma_6(\delta_x y + \delta_y x), \delta_i = e_i + \dot{e}_i, i = x, y.$$

Моделирование проводили при $x_m = 0,3 \cos \omega_1 t$, $y_m = 0,5 \sin \omega_2 t$, $\boldsymbol{\eta}^T = (0,8 \sin(20(2\pi t)) \ 0,8 \cos(20(2\pi t)))$ и параметрах (объекта, эталонной модели, регулятора), приведенных в таблице.

Результаты математического моделирования системы управления с релейным алгоритмом управления (29) при $\gamma_m = 8$ приведены на рис. 5–10.

Результаты математического моделирования системы управления с алгоритмом управления (30) при $\gamma_{m1} = 60$, $\gamma_{m2} = 5$ приведены на рис. 11–16.

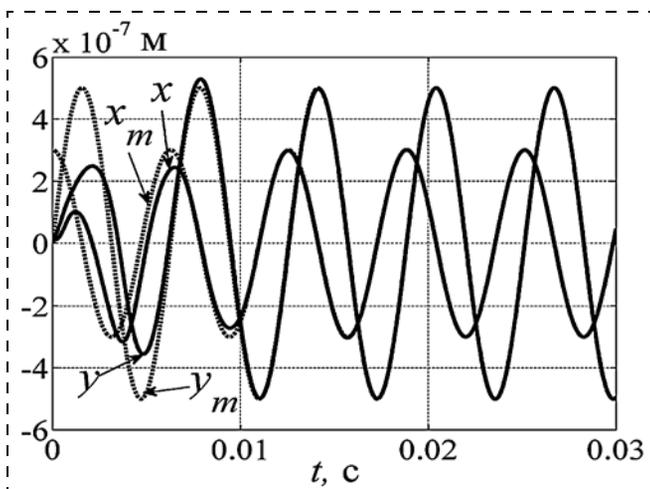


Рис. 5. Траектории объекта и эталонной модели

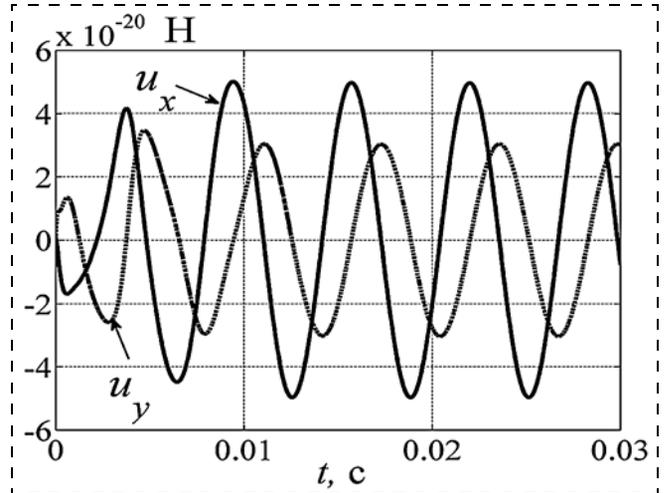


Рис. 6. Входы выходного каскада

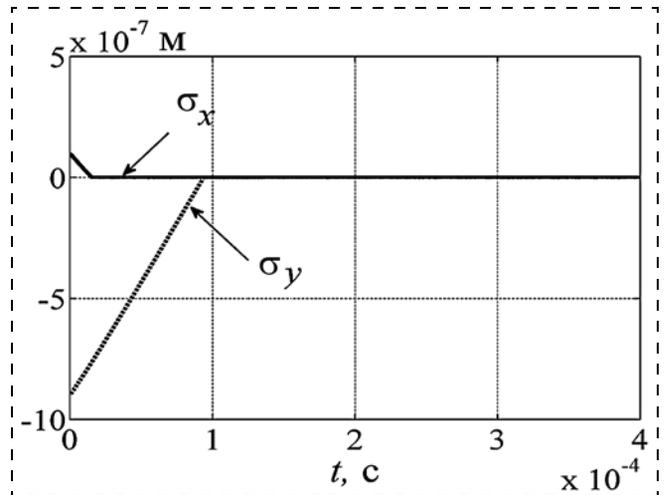


Рис. 7. Отклонение от многообразия скольжения

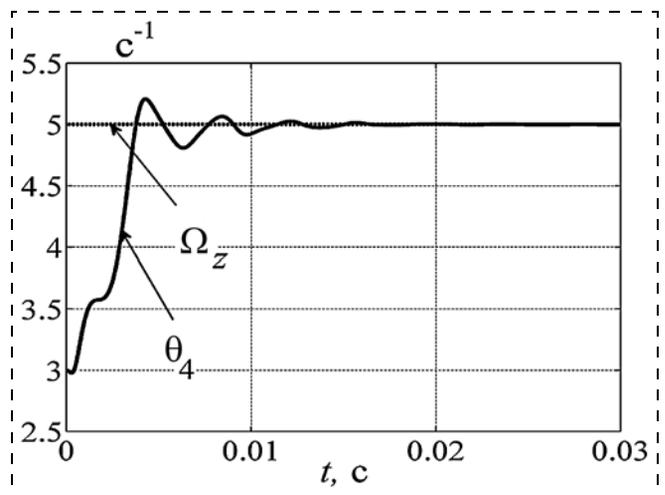


Рис. 8. Результаты идентификации угловой скорости Ω_z

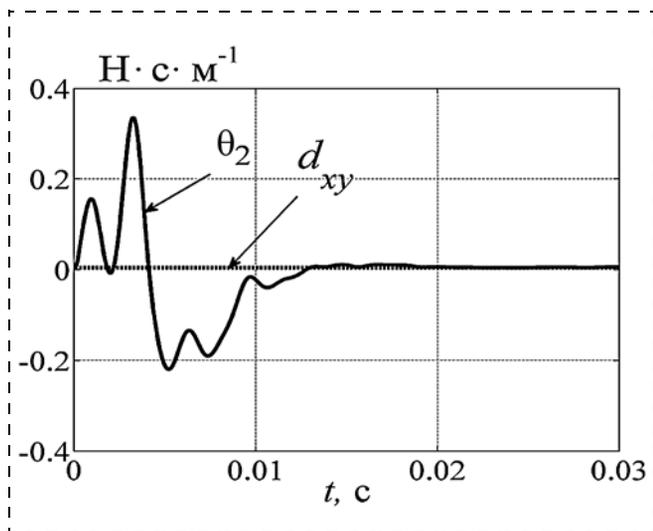


Рис. 9. Результаты идентификации параметра d_{xy}

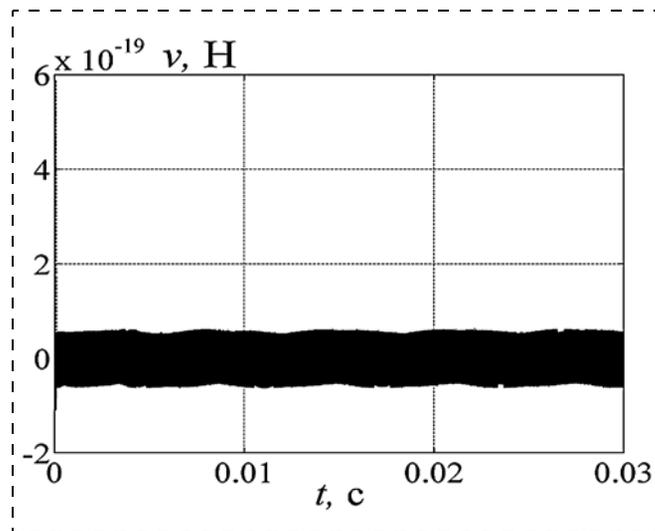


Рис. 12. Управление

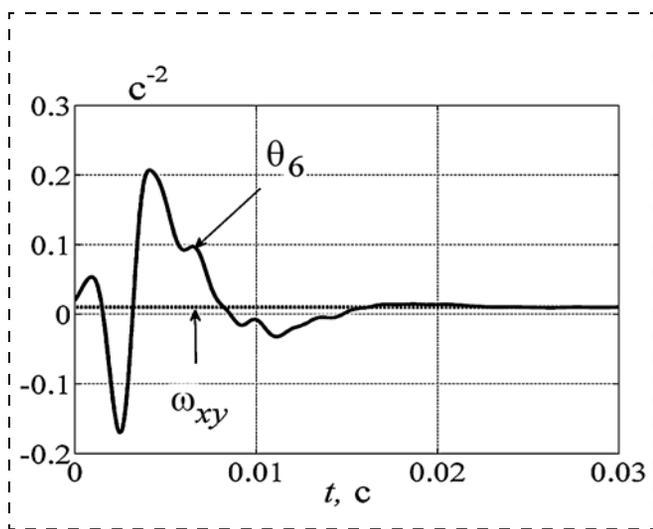


Рис. 10. Результаты идентификации параметра ω_{xy}

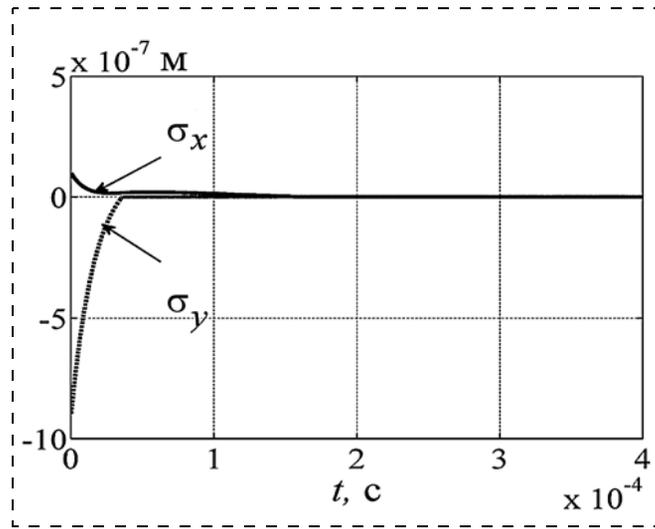


Рис. 13. Отклонение от многообразия скольжения

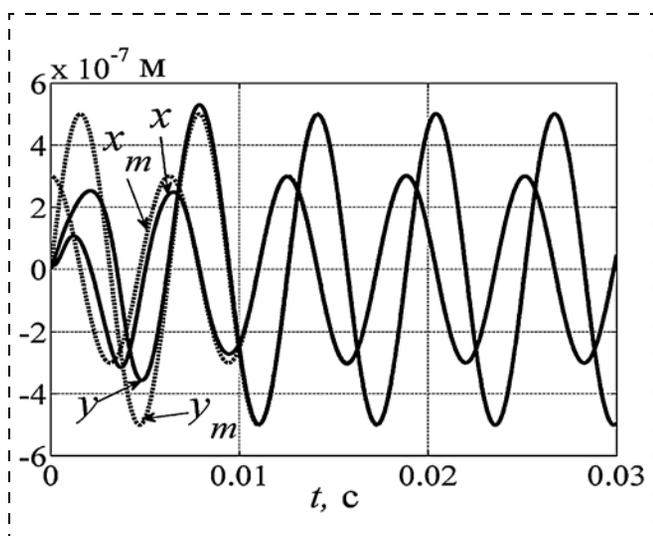


Рис. 11. Траектории объекта и эталонной модели

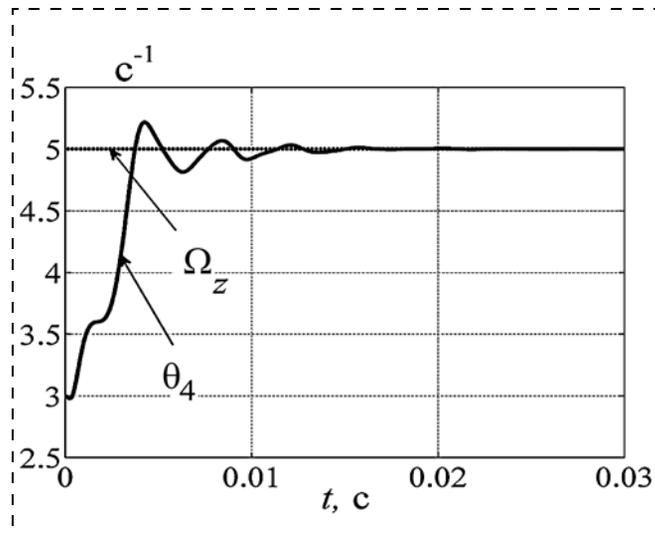


Рис. 14. Результаты идентификации угловой скорости Ω_z

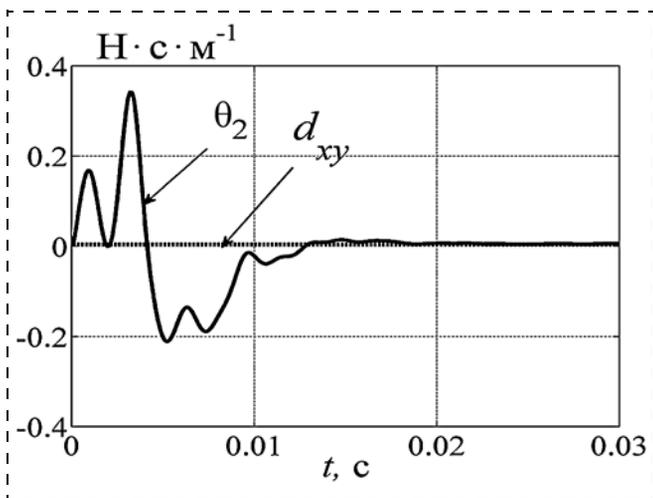


Рис. 15. Результаты идентификации параметра d_{xy}

Как видно из рис. 5–16, релейный и комбинированный алгоритмы управления обеспечивают достижение асимптотической устойчивости $(\sigma, \varepsilon, \theta - \theta_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В комбинированном алгоритме это достигается за счет релейной составляющей с меньшим, по сравнению с релейным алгоритмом, коэффициентом усиления.

Заключение

Для одноосного вибрационного гироскопа с интегратором методом скоростного биградиента синтезированы гладкие, релейные и комбинированные алгоритмы управления с настраиваемыми многообразиями. Синтезированные алгоритмы обеспечивают гладкость сил, воздействующих на чувствительную массу гироскопа.

Релейные и комбинированные (по входам интеграторов) алгоритмы обеспечивают возникновение настраиваемого скользящего режима, робастность по отношению к внешним воздействиям на входах интеграторов, стремление траекторий системы к настраиваемому многообразию скольжения и желаемым колебаниям чувствительного элемента гироскопа, обладают идентифицирующими свойствами.

Гладкие алгоритмы характеризуются более слабыми свойствами: обеспечивают стремление траекторий замкнутой системы к настраиваемому многообразию скольжения с заданной конечной точностью и, как следствие, конечную точность воспроизведения желаемых колебаний чувствительного элемента, конечную точность оценивания параметров, включая угловую скорость основания гироскопа. Точность повышается при увеличении коэффициента усиления алгоритма управления.

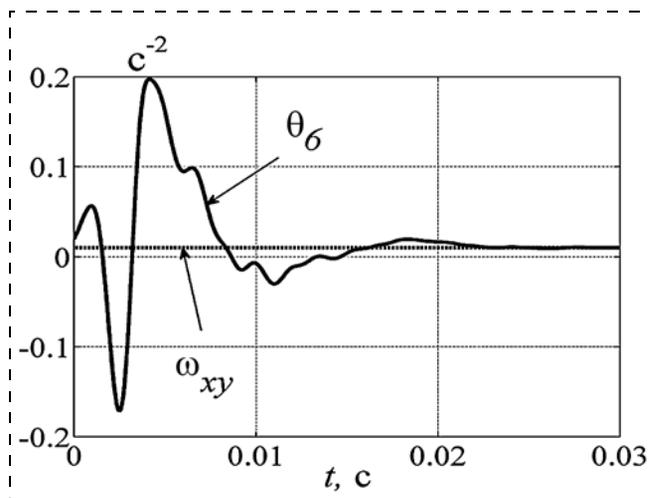


Рис. 16. Результаты идентификации параметра ω_{xy}

Список литературы

1. Бугров Д. И. Одноосный вибрационный гироскоп // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2005. Т. 11. № 8. С. 149–163.
2. Acar C. and Shkel A. M. Micro-gyroscopes with dynamic disturbance rejection // *International Conference On Modeling and Simulation of Microsystems, USA*. 1999. P. 605–608.
3. Hameed S., Jagannathan. Adaptive force-balancing control of MEMS gyroscope with actuator limits // *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. 2004. Vol. 2. P. 1862–1867.
4. Fei J., Batur C. A novel adaptive sliding mode control for MEMS gyroscope // *Proc. of 47th IEEE Conference on Decision and Control*. 2007.
5. Мышляев Ю. И., Фиошин А. В. Адаптивное управление одноосным вибрационным гироскопом // *Тр. ФГУП "НПЦАП" "Системы и приборы управления"*. 2014. № 1. С. 78–89.
6. Мышляев Ю. И., Фиошин А. В., Тар Яр Мью. Адаптивное управление одноосным вибрационным гироскопом с интегратором // XII Всеросс. совещание по проблемам управления, Россия, Москва, Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН, 16–19 июня 2014 г. С. 2246–2256.
7. Мышляев Ю. И. Метод бискоростного градиента // *Известия ТулГУ. Технические науки*. Вып. 5. Ч. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. С. 168–178.
8. Мышляев Ю. И. Алгоритмы управления линейными объектами в условиях параметрической неопределенности на основе настраиваемого скользящего режима // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2009. № 2. С. 11–16.
9. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V. Sliding mode with tuning surface in problem of synchronization of two-pendulum system motion, 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, University of Caen Basse-Normandie, Caen, France, July 3–5, 2013. P. 221–226.
10. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990.
11. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

Speed Bigradient Method in the Control Problem of the Vibratory Gyroscope

Yu. I. Myshlyayev, uimysh@mail.ru✉, **A. V. Finoshin**, earlov@gmail.co,
Tar Yar Myo, brightxstar@gmail.com, Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga,
248000, Russian Federation

Corresponding author: **Myshlyayev Yury I.**, Ph. D., Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University,
Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russian Federation, e-mail: uimysh@mail.ru

Received on July 30, 2015
Accepted on August 07, 2015

The article deals with the problem of adaptive control of a single-axis vibratory gyroscope. In order to improve both the control quality of the vibratory gyroscope and the identifying properties of the adaptation algorithm, an extension of the original system is proposed by adding additional integrators to the gyroscope inputs, i. e. enhancing of the astaticism. On the other hand, smoothness of the electrostatic forces applied to the axes of a gyroscope is improved. Smooth control algorithms as well as algorithms of the sliding mode with a tuning surface for the gyroscope with integrator was designed by the speed bigradient method (SBGM). SBGM consists of three stages. At the first stage, an "ideal" virtual control for an output subsystem, which is the gyroscope, is designed. The "ideal" virtual control ensures achievement of the control goal for the output subsystem, assuming the object parameters are known. At the second stage, the unknown parameters are replaced with the tunable ones, and adaptation algorithm is designed. At the third stage, a deviation of the manifold, that is a difference between the input subsystem, which is an integrator of the output and virtual control, is selected. Control law ensuring the convergence of the system trajectories to the manifold is designed. The relevance of adding of the additional integrators to the inputs of the vibratory gyroscope; analysis of the robust properties of designed adaptive control algorithms with respect to the additive disturbances; comparative analysis of the convergence, accuracy, and presence of the identifying properties of the designed algorithms are presented. The theoretical results are proved by a computer simulation in MATLAB.

Keywords: speed bigradient method, tunable sliding mode, vibratory gyroscope, stability, Lyapunov function

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of Kaluga Region, project no. 14-48-03115.

For citation:

Myshlyayev Yu. I., Finoshin A. V., Tar Yar Myo. Speed Bigradient Method in the Control Problem of the Vibratory Gyroscope, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no 11, pp. 783–792.

DOI: 10.17587/mau/16.783-792

References

1. **Bugrov D. I.** *Odnoosnyi vibratsionnyi giroskop* (Single-axis vibratory gyroscope), *Fundam. Prikl. Mat.*, 2005, vol. 11, no. 8, pp. 149–163 (in Russian).
2. **Acar C. and Shkel A. M.** Micro-gyroscopes with dynamic disturbance rejection, *International Conference On Modeling and Simulation of Microsystems*, USA, 1999, pp. 605–608.
3. **Hameed S., Jagannathan.** Adaptive force-balancing control of MEMS gyroscope with actuator limits, *Proc. of the 2004 American Control Conference*, 2004. vol. 2, pp. 1862–1867.
4. **Fei J., Batur C.** A novel adaptive sliding mode control for MEMS gyroscope, *Proc. of 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
5. **Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V.** *Adaptivnoe upravlenie odnoosnym vibratsionnym giroskopom* (Adaptive control single-axis vibratory gyroscope), *Works of NPSAP, Systems and Devices Control* (in Russian), 2014, no. 1, pp. 78–89 (in Russian).
6. **Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V., Tar Yar Myo.** *Adaptivnoe upravlenie odnoosnym vibratsionnym giroskopom s integratorom* (Adaptive control single-axis vibratory gyroscope with an integrator), XII All-Russian Conference on Control Problems, Russia, Moscow, Institute of Control Sciences VA Trapeznikova RAS, June 16–19, 2014, pp. 2246–2256 (in Russian).
7. **Myshlyayev Y. I.** *Metod biskorostnogo gradienta* (Speed bigradient method), *Proc. of the TSU. Technical sciences*, vol. 5, part 1, 2011, pp. 168–178 (in Russian).
8. **Myshlyayev Y. I.** *Algoritmy upravleniya lineinymi ob'ektami v usloviyakh parametriceskoi neopredelennosti na osnove nastraivaemogo skol'z'yashchego rezhima* (Linear system control algorithms in the case of parameter variations by sliding mode with tuning surface), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 2, pp. 11–16 (in Russian).
9. **Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V.** Sliding mode with tuning surface in problem of synchronization of two-pendulum system motion, 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, University of Caen Basse-Normandie, Caen, France, July 3–5, 2013. P. 221–226.
10. **Fradkov A. L.** *Adaptivnoe upravlenie v slozhnykh sistemakh* (Adaptive control in complex systems), Moscow, Nauka, 1990 (in Russian).
11. **Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L.** *Nelineinoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinameshskimi sistemami* (Nonlinear and adaptive control of complex dynamic systems), St. Petersburg, Nauka, 2000 (in Russian).

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 25.08.2015. Подписано в печать 00.00.2015. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН1115. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансд солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансд солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.