УДК 517.93 DOI: 10.17587/mau.19.19-25

В. Т. Матвиенко, канд. физ.-мат. наук, доц., matvienko.vt@gmail.com,
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, г. Киев, Украина

Оптимальное терминальное управление линейными дискретными системами с использованием псевдообращения матриц

Рассматривается проблема построения общих решений задач терминального управления для множества начальных возмущений. Приводятся условия существования общего решения этих задач для класса линейных динамических систем с дискретным аргументом. Получено оптимальное решение задачи терминального управления с дискретным аргументом, обеспечивающее прохождение траектории системы как можно ближе к наперед заданным точкам. Получено также полное множество решений задачи управления пучком траекторий для систем с дискретным аргументом.

Ключевые слова: *линейные дискретные системы, псевдообращение, множество решений*

В теории и практике управления все большее распространение получают так называемые системы терминального управления, в которых целью управления является достижение заданной точки пространства состояний объекта в заданный (терминальный) момент времени [1]. Наиболее широкое применение системы терминального управления имеют в авиационно-ракетно-космической технике [2]. Классическими примерами работы систем терминального управления движущимися объектами являются процессы выведения ракет-носителей; стартовый маневр и самонаведение крылатых ракет; сближение, причаливание, спуск и мягкая посадка космических аппаратов; взлет, смена эшелона, уход на второй круг и мягкая посадка самолета и т. д.

Задача терминального управления является одной из основных задач современной теории управления [2] и заключается в нахождении таких управлений, которые за некоторый конечный интервал времени переводят рассматриваемую систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. При этом решение и без того трудных задач терминального управления весьма осложняется наложением на переменные состояния и управления ограничений [3, 4]. В частности, большинство разработанных к настоящему времени методов решения терминальных задач (см., например, [5—9]) не дают возможности учета ограничений, наложенных на состояние системы.

Настоящая статья базируется на результатах автора, представленных в работах [4, 10], а также в работах [11—13]. В статье рассматриваются задачи построения оптимального терминального управления дискретной системой с фазовыми ограничениями с использованием аппарата псевдообращения матриц. Приводятся условия существования общего решения задачи и описано полное множество ее решений.

Задача оптимального перевода системы из начального состояния в конечное

Рассмотрим класс линейных вполне управляемых дискретных систем, описываемых векторным разностным уравнением состояния вида

$$\mathbf{x}(i + 1) = \mathbf{A}(i)\mathbf{x}(i) + \mathbf{B}(i)\mathbf{u}(i), \tag{1}$$

где $i = 0, 1, 2, ..., N$ — дискретное время; $\mathbf{u}(i)$ — m-мерный вектор управления, $\mathbf{x}(i)$ — n-мерный вектор состояния системы; $\mathbf{A}(i)$ и $\mathbf{B}(i)$ — матрицы системы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Поставим следующую задачу терминального управления: требуется систему (1) перевести за конечное время из начального состояния $\mathbf{x}(0) = 0$ в целевое конечное состояние $\mathbf{x}(N + 1) = \mathbf{x}_{(1)}$.

Введем требование оптимальности процесса управления по следующему критерию качества:

$$I(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k), \tag{2}$$

где $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(0), \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(1), ..., \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(N))$ — вектор управления размерности $m(N + 1)$, $\mathbf{D}(i)$ — симметричная положительно-определенная матрица размерности $m \times m$.

Известно [12], что множество функций управления, переводящих систему (1) из начального состояния $\mathbf{x}(0) = 0$ в конечное состояние $\mathbf{x}(N + 1) = \mathbf{x}_{(1)}$, можно выразить через матрицу псевдообращения следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+}\mathbf{x}_{(1)} + (\mathbf{E} - \mathbf{W}^{+}\mathbf{W})\mathbf{v}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{W} = (\mathbf{W}(N + 1, 0), \mathbf{W}(n + 1, 1), ..., \mathbf{W}(N + 1, N))$ — матрица размерности $n \times m(N + 1)$, $\mathbf{W}(m, k) = \mathbf{A}(m - 1)\mathbf{A}(m - 2)...\mathbf{A}(k + 1)\mathbf{B}(k)$ — матрица размерности $n \times m$; $\mathbf{E}$ — единичная матрица размерности $m(N + 1) \times m(N + 1)$; $\mathbf{v}$ — вектор произвольных параметров размерности $m(N + 1)$.

Согласно формуле (3) критерий качества (2) можно записать в виде

$$I(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) = [\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{E} - \mathbf{W}^{+}\mathbf{W})^{\mathrm{T}} +$$

$$+ \mathbf{x}_{(1)}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+})^{\mathrm{T}}]\begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix} \times$$

$$\times (\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+}\mathbf{x}_{(1)} + (\mathbf{E} - \mathbf{W}^{+}\mathbf{W})\mathbf{v}). \quad (4)$$

Поскольку данный критерий качества зависит от произвольного вектора $\mathbf{v}$, то необходимое условие его оптимальности имеет вид

$$\frac{\partial I(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\sum_{k=0}^{N} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)\right) =$$

$$= 2(\mathbf{E} - \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+})\begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix} \times$$

$$\times (\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{(1)} + 2(\mathbf{E} - \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+}) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix} (\mathbf{E} - (\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})\mathbf{W})\mathbf{v} = 0.$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{E} - \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+})\begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix}.$$

Тогда оптимальный вектор параметров $\mathbf{v}$ представляется в виде

$$\mathbf{v} = [\mathbf{R}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}) - \mathbf{E}]^{+}\mathbf{R}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{(1)}. \quad (5)$$

Таким образом, оптимальная функция управления (3) с вектором параметров (5) имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+}\mathbf{x}_{(1)} + (\mathbf{E} - \mathbf{W}^{+}\mathbf{W}) \times$$

$$\times [\mathbf{R}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}) - \mathbf{E}]^{+}\mathbf{R}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W})^{+}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{(1)}. \quad (6)$$

Управление (6) минимизирует функционал (4), и при этом вектор состояния системы (1) переводится с начального состояния $\mathbf{x}(0) = 0$ в заданное конечное состояние $\mathbf{x}(N + 1) = \mathbf{x}_{(1)}$.

Задача оптимального перевода системы из начального состояния в конечное с ограничением на фазовые координаты

Рассмотрим задачу терминального управления, заключающуюся в переводе системы (1) из начального состояния $\mathbf{x}(0) = 0$ в конечное состояние $\mathbf{x}(N + 1) = \mathbf{x}_{(1)}$ с оптимизацией следующего критерия качества:

$$I(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{l} (\mathbf{x}(k_i) - \bar{\mathbf{x}}(k_i))^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(k_i)(\mathbf{x}(k_i) - \bar{\mathbf{x}}(k_i)), \quad (7)$$

где $\mathbf{F}(k_i)$ — симметричные весовые матрицы размерности $n \times n$; $\bar{\mathbf{x}}(k_i)$ — векторы размерности n заданы, $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_l$; $\mathbf{v}$ — вектор произвольных параметров размерности $m(N + 1)$. Данная задача, фактически, связана с нахождением терминального управления, обеспечивающего достижение терминальной цели управления и прохождение при этом траектории движения системы (1) как можно ближе к наперед заданным точкам $\bar{\mathbf{x}}(k_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Записывая необходимые условия минимума критерия (7), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения вектора параметров $\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(0), \mathbf{v}^{\mathrm{T}}(1), \dots, \mathbf{v}^{\mathrm{T}}(N))$:

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{d}. \quad (8)$$

Здесь элементы вектора $\mathbf{d}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{d}^{\mathrm{T}}(0), \mathbf{d}^{\mathrm{T}}(1), \dots, \mathbf{d}^{\mathrm{T}}(N))$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{d}(k) = \sum_{i=1}^{l}\left\{\left[\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(k_i, k) - \mathbf{W}^{\mathrm{T}}(N + 1, k)(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+} \times\right.\right.$$

$$\left.\times \sum_{j=0}^{k_i - 1} \mathbf{W}(N + 1, j)\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(k_i, j)\right]\mathbf{F}(k_i) \times$$

$$\left.\times \left[\bar{\mathbf{x}}(k_i) - \sum_{j=0}^{k_i - 1} \mathbf{W}(k_i, j)\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(N + 1, j)(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+}\mathbf{x}_{(1)}\right]\right\},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N, \ \mathbf{W}(i, j) = 0 \text{ при } j \geqslant i,$$

а элементы матрицы $\mathbf{Q}$ — следующий вид:

$$\mathbf{q}_{pk} = \sum_{i=1}^{l}\left\{\left[\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(k_i, k) - \mathbf{W}^{\mathrm{T}}(N + 1, k)(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+} \times\right.\right.$$

$$\left.\times \sum_{j=0}^{k_i - 1} \mathbf{W}(N + 1, j)\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(k_i, j)\right]\mathbf{F}(k_i)\left[\mathbf{W}(k_i, p) - \right.$$

$$\left.\left.- \sum_{j=0}^{k_i - 1} \mathbf{W}(k_i, j)\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(N + 1, j)(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+}\mathbf{W}(N + 1, p)\right]\right\},$$

$$p = 0, 1, \dots, N, \ k = 0, 1, 2, \dots, N; \ \mathbf{W}(i, j) = 0 \text{ при } j \geqslant i.$$

В работах [13, 14] показано, что решение системы (8) существует и единственно, если

$$\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})\mathbf{d} = 0,$$

$$\det(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}) > 0,$$

где

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{I}_{m(N+1)} - \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{+}.$$

Задача терминального управления пучком траекторий

Рассмотрим следующую задачу нахождения управляющего воздействия, обеспечивающего перевод системы

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{A}(i)\mathbf{x}(i) + \mathbf{b}(i)u(i),\ i = 0, 1, 2, ..., N, \quad (9)$$

из заданного множества начальных состояний

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), ..., \mathbf{x}_s(0)\} \quad (10)$$

в заданное множество конечных состояний

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x}_1(N+1), \mathbf{x}_2(N+1), ..., \mathbf{x}_s(N+1)\}. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{x}(i)$ — n-мерный вектор состояния, а $u(i)$ — скалярный управляющий вход объекта; $\mathbf{A}(i)$ и $\mathbf{b}(i)$ — матрица и вектор размерности $n \times n$ и n, соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(0) \end{pmatrix}$$ — вектор начальных значений состояния размерности ns;

$$\bar{\mathbf{x}}(N+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(N+1) \\ \mathbf{x}_2(N+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(N+1) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_{(1)}$$ — вектор конечных состояний размерности ns.

Тогда задача перевода системы (9) из области начальных состояний (10) в множество конечных состояний (11) эквивалентна задаче перевода системы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(i+1) \\ \mathbf{x}_2(i+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(i) \\ \mathbf{x}_2(i) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}(i) \\ \mathbf{b}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{b}(i) \end{pmatrix} u(i),\ i = \overline{0, N} \quad (12)$$

из области Ω_0 в область Ω_1 на конечном интервале времени.

Введем обозначения

$$\bar{\mathbf{A}}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}(k) \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{x}}(i+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(i+1) \\ \mathbf{x}_2(i+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(i+1) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_{(1)};\ \bar{\mathbf{b}}(i) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}(i) \\ \mathbf{b}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{b}(i) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (12) примет вид

$$\bar{\mathbf{x}}(i+1) = \bar{\mathbf{A}}(i)\bar{\mathbf{x}}(i) + \bar{\mathbf{b}}(i)u(i),\ i = \overline{0, N}, \quad (13)$$

где векторы $\bar{\mathbf{x}}(i)$ и $\bar{\mathbf{b}}(i)$ — размерности ns, а блочная матрица $\bar{\mathbf{A}}(i)$ — размерности $ns \times ns$.

Можно показать [11, 12, 15], что в конечный момент времени состояние системы (13) описывается уравнением

$$\bar{\mathbf{x}}(N+1) = \sum_{k=0}^{N} \overline{\mathbf{W}}(N+1, k)u(k) + \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1) \dots \bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0), \quad (14)$$

где матрица $\overline{\mathbf{W}}(N, k)$ имеет вид

$$\overline{\mathbf{W}}(N, k) = \bar{\mathbf{A}}(N-1)\bar{\mathbf{A}}(N-2) \dots \bar{\mathbf{A}}(k+1)\bar{\mathbf{b}}(k).$$

Систему (14) запишем в виде

$$\bar{\mathbf{x}}(N+1) - \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1) \dots \bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0) = \sum_{k=0}^{N} \overline{\mathbf{W}}(N+1, k)u(k). \quad (15)$$

Вводя обозначение

$$\tilde{\mathbf{x}}(N+1) = \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} = \bar{\mathbf{x}}(N+1) - \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1) \dots \bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0),$$

систему алгебраических уравнений (15) относительно функции управления можно представить следующим образом:

$$(\overline{\mathbf{W}}(N+1, 0), \overline{\mathbf{W}}(N+1, 1), ..., \overline{\mathbf{W}}(N+1, N-1), \overline{\mathbf{W}}(N+1, N)) \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}(N+1). \quad (16)$$

Решение системы (16) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}^{+}\tilde{\mathbf{x}}_{(1)}, \quad (17)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = (u(0), u(1), ..., u(N))^{\mathrm{T}}$ — вектор размерности $N+1$, $\mathbf{W}$ — матрица размерности $ns \times (N+1)$, определяемая равенством

$$\mathbf{W} = (\overline{\mathbf{W}}(N+1, 0), \overline{\mathbf{W}}(N+1, 1), \dots, \overline{\mathbf{W}}(N+1, N-1), \overline{\mathbf{W}}(N+1, N)).$$

Матрицу $\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,k)$ запишем в виде

$$\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,k)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1)\end{pmatrix}\overline{\mathbf{b}}\,(k);$$

$$\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,k)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k)\\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k)\\ \vdots\\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1)\\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1)\\ \vdots\\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\ldots\mathbf{A}(k+1)\end{pmatrix}\mathbf{b}(k).$$

Уравнение (17) представим в виде:

$$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{W}^{+}\tilde{\mathbf{x}}_{(1)}=\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+}\tilde{\mathbf{x}}_{(1)},$$

где

$$\mathbf{W}^{+}=\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{+}=$$

$$=\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=0}^{N}\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,j)\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,j\right)^{+},$$

или

$$\tilde{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,0)\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,1)\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,N)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{N}\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,j)\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,j\right)^{+}\tilde{\mathbf{x}}_{(1)}+$$

$$+\left[\mathbf{E}-\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,0)\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,1)\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,N)\end{pmatrix}\times\right.$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{N}\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,j)\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,j)\right)^{+}\times$$

$$\left.\times(\overline{\mathbf{W}}(N+1,0),\,\overline{\mathbf{W}}(N+1,1),\,...,\,\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,N))\right]\tilde{\mathbf{v}},\quad(18)$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ — произвольный вектор размерности $N+1$.

Соотношение (18) представляет собой общее решение сформулированной задачи.

Упростив уравнение (18), получим:

$$\tilde{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,0)\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,1)\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,N)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{N}\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,j)\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,j)\right)^{+}\tilde{\mathbf{x}}_{(1)}+$$

$$+\tilde{\mathbf{v}}-\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,0)\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,1)\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,N)\end{pmatrix}\left(\sum_{j=0}^{N}\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,j)\times\right.$$

$$\left.\times\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,j)\right)^{+}\sum_{j=0}^{N}\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,j)v(j),\qquad(19)$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}}=(v(0),\,v(1),\,...,\,v(N))^{\mathrm{T}}\ \forall v(k)\in R^{1},\ k=\overline{0,\,N}.$$

Представим псевдообратную матрицу следующим образом:

$$\left(\sum_{j=0}^{N}\overline{\mathbf{W}}(N+1,\,j)\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1,\,j)\right)^{+}=$$

$$=\left[\sum_{j=0}^{N}\begin{pmatrix}A(N)A(N-1)\ldots A(j+1)\mathbf{b}(j)\\ A(N)A(N-1)\ldots A(j+1)\mathbf{b}(j)\\ \vdots\\ A(N)A(N-1)\ldots A(j+1)\mathbf{b}(j)\end{pmatrix}\times\right.$$

$$\left.\times\,(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(j)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(j+1)...\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(N)...\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(j)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(j+1)...\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(N))\right]^{+}=$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j) & \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j) & \ldots & \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j)\\ \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j) & \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j) & \ldots & \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j) & \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j) & \ldots & \sum_{j=0}^{N}\mathbf{D}(j)\end{bmatrix}^{+},$$

где

$$\mathbf{D}(j) = \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)...$$
$$...\mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j)\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(j)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(j+1)...\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(N).$$

Обозначим $\sum\limits_{j=0}^{N} \mathbf{D}(j) = \mathbf{C}$, тогда уравнение (19) можно представить следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, 0) \\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, 1) \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix}^{+} \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} + \tilde{\mathbf{v}} -$$

$$-\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, 0) \\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, 1) \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix}^{+} \sum_{j=0}^{N} \overline{\mathbf{W}}(N+1, j)\mathbf{v}(j). \quad (20)$$

Известно [13], что если $\tilde{\mathbf{A}}$ — матрица, составленная из всех линейно-независимых строк матрицы $\mathbf{A}$, матрица $\bar{\mathbf{A}}$ — из всех линейно-независимых столбцов матрицы $\mathbf{A}$, а матрица $\bar{\tilde{\mathbf{A}}}$ получена из $\mathbf{A}$ последовательным применением предыдущих двух операций, тогда

$$\mathbf{A}^{+} = \tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{\tilde{\mathbf{A}}}(\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}.$$

Используя этот результат, псевдообратную матрицу в формуле (20) можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix}^{+} = (\mathbf{C}\mathbf{C}...\mathbf{C})^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \left((\mathbf{C}\mathbf{C}\dots\mathbf{C}) \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \right)^{-1} \mathbf{C} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$= (\mathbf{C}\mathbf{C}...\mathbf{C})^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=0}^{s} \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \mathbf{C} \left(\sum_{i=0}^{s} \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} \right)^{-1} (\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}...\mathbf{C}^{\mathrm{T}}) =$$

$$= s^{-2} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{C}^{-1}, \mathbf{C}^{-1}, ..., \mathbf{C}^{-1}) =$$

$$= s^{-2} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} (\mathbf{E}, \mathbf{E}, ..., \mathbf{E}),$$

при условии, что матрица $\mathbf{C}$ полного ранга и

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\mathbf{C} = n.$$

Тогда функция управления пучком траекторий имеет следующий вид:

$$u(k) = s^{-2}\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, k) \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} +$$

$$+ v(k) - s^{-2}\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(N+1, k) \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \overline{\mathbf{W}}(N+1, j)v(j), \ k = \overline{0, N}, \ \forall v(k) \in R^{1}.$$

Данная функция управления $u(k)$, $k = \overline{0, N}$, переводит множество точек (10) системы (12) в точку

$$\tilde{\mathbf{x}}(N+1) = \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} =$$
$$= \bar{\mathbf{x}}(N+1) - \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1)...\bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы задача терминального управления, связанная с переводом системы (12) из области (10) в точку $\tilde{\mathbf{x}}_{(1)}$, имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathrm{rank} \sum_{j=0}^{N} \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)...$$
$$...\mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j)\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(j)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(j+1)...\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(N) = n, \ N \geqslant n.$$

В результате получено оптимальное решение задачи терминального управления системой с дискретным аргументом, обеспечивающее прохождение ее траектории движения как можно ближе к наперед заданным точкам. Описано полное множество решений задачи управления пучком траекторий для систем с дискретным аргументом.

Полученные в статье результаты могут быть использованы при решении ряда прикладных задач, в частности, при разработке систем автоматического управления подвижными объектами.

Список литературы

1. **Батенко А. П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
2. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Методы "гибких" траекторий в задачах терминального управления вертикальными маневрами летательных аппаратов. Гл. 2 // Проблемы управления сложными динамическими объектами авиационной и космической техники. М.: Машиностроение, 2015. С. 51—110.

3. **Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.** Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999. 467 с.

4. **Кириченко Н. Ф., Матвиенко В. Т.** Общее решение задач терминального управления и наблюдения // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 2. С. 80—89.

5. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Полиэдральная формализация дискретных задач терминального управления с ресурсными ограничениями // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск "Перспективные системы и задачи управления". 2014. № 3 (152). С. 35—41.

6. **Тюлюкин В. А., Шориков А. Ф.** Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. Вып. 4. С. 115—127.

7. **Шушляпин Е. А., Подольская О. Г.** Управление терминальными нелинейными дискретными системами методом конечного состояния // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. 2003. № 2. С. 138—142.

8. **Зубер И. Е.** Терминальное управление по выходу для нелинейных нестационарных дискретных систем // Электронный журнал. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. № 2. С. 35—42.

9. **Матвеев А. С.** Исследование терминального управления дискретной нелинейной системой // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 1. С. 49—55.

10. **Зыбин Е. Ю., Рябченко В. Н., Зубов Н. Е., Микрин Е. А.** О неединственности решения задачи терминального управления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 10 (22). С. 25—30.

11. **Кириченко Н. Ф., Матвиенко В. Т.** Общее решение задач терминального управления и наблюдения в линейных конечномерных системах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 7. С. 2—6.

12. **Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.** Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 4. С. 107—124.

13. **Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.** Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей // Проблемы управления и информатики. 2001. № 1. С. 6—22.

14. **Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.** Псевдообращение в задачах управления и наблюдения // Автоматика. 1993. № 5. С. 69—81.

15. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Optimal Terminal Control by Linear Discrete Systems with Use of Matrices Pseudoinversion

V. T. Matvienko, matvienko.vt@gmail.com,
National Taras Shevchenko University, Kyiv, 01033, Ukraine

Corresponding author: **Matvienko Vladimir T.**, Ph. D., Associate Professor
Faculty of Computer Science and Cybernetics, of National Taras Shevchenko University,
Kyiv, Ukraine, e-mail: matvienko.vt@gmail.com

Accepted on August 07, 2017

In this paper obtain the general solution of terminal control problem with a set of initial perturbations. Propose conditions of the general solution existence to discrete linear control systems. Also give the optimal solution of the terminal control problem minimizing the distance between the trajectory and fixed points. Constraints on the trajectory of the system are selected for certain points. Describe the set of all solutions to the control problem of trajectories ensemble with discrete time. The problem of optimal displacement of a discrete system from the initial state to the final one is solved. The problem of optimal displacement of a discrete system from the initial state to the final state with restriction to phase coordinates is solved. The trajectory of the system with optimal terminal control will pass next to the predefined points. The problem of control a set of trajectories for linear discrete systems is formulated and solved. The obtained control of the set trajectories is optimal. Necessary and sufficient conditions for solving this problem are obtained. Consideration is given to the mathematical problem on constructing general solutions of the problem concerning the terminal control for the set of initial perturbations. The existence conditions of the general solution of this problem for linear dynamic systems with the discrete argument is given. The obtained function of control is based on filtration of linearly independent rows and columns of the matrix. The optimal controls for linear dynamic discrete systems will solve of practical important problems.

Keywords: *optimal, linear discrete systems, pseudoinversion, set of all solutions.*

For citation:

Matvienko V. T. Optimal Terminal Control by Linear Discrete Systems with Use of Matrices Pseudoinversion, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no 1, pp. 19—25.

DOI: 10.17587/mau.19.19-25

References

1. **Batenko A. P.** *Sistemy terminal'nogo upravleniya* (Systems of terminal control), Moscow, Radio i svyaz', 1984, 160 p. (in Russian).

2. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Metody "gibkih" traektorij v zadachah terminal'nogo upravleniya vertikal'nymi manevrami letatel'nyh apparatov* (Methods of "flexible" trajectories in problems of terminal control of vertical maneuvers of aircrafts), *Problemy upravleniya slozhnymi dinamicheskimi ob"ektami aviacionnoj i kosmicheskoj tekhniki*, Moscow, Mashinostroenie, 2015, pp. 51—110 (in Russian).

3. **Andrievskij B. R., Fradkov A. L.** *Izbrannye glavy teorii avtomaticheskogo upravleniya s primerami na yazyke MATLAB* (Selected chapters of the theory of automatic control with examples in the language MATLAB), SPb., Nauka, 1999, 467 p. (in Russian).

4. **Kirichenko N. F., Matvienko V. T.** *Obshchee reshenie zadach terminal'nogo upravleniya i nablyudeniya* (General solution of the tasks of terminal control and monitoring), *Kibernetika i Sistemnyj Analiz,* 2002, no. 2, pp. 80—89 (in Ukraine).

5. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Poliehdral'naya formalizaciya diskretnyh zadach terminal'nogo upravleniya s resursnymi ogranicheniyami* (The polyhedral formalization of discrete terminal control problems with resource constraints), *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki. Tematicheskij vypusk "Perspektivnye sistemy i zadachi upravleniya",* 2014, no. 3 (152), pp. 35—41 (in Russian).

6. **Tyulyukin V. A., Shorikov A. F.** *Algoritm resheniya zadachi terminal'nogo upravleniya dlya linejnoj diskretnoj sistemy* (Algorithm of solving the terminal control problem for a linear discrete system), *Avtomatika i Telemekhanika.* 1993, iss. 4, pp. 115—127 (in Russian).

7. **Shushlyapin E. A., Podol'skaya O. G.** *Upravlenie terminal'nymi nelinejnymi diskretnymi sistemami metodom konechnogo sostoyaniya* (Control of terminal nonlinear discrete systems by the finite state method), *Radioelektronika. Informatika. Upravleniya*, 2003, no. 2, pp. 138—142 (in Russian).

8. **Zuber I. E.** *Terminal'noe upravlenie po vyhodu dlya nelinejnyh nestacionarnyh diskretnyh system* (Terminal control for the output for non-linear non-stationary discrete systems), *Ehlektronnyj Zhurnal. Differencial'nye Uravneniya i Processy Upravleniya*, 2004, no. 2, pp. 35—42 (in Russian).

9. **Matveev A. S.** *Issledovanie terminal'nogo upravleniya diskretnoj nelinejnoj sistemoj* (Investigation of terminal control of a discrete nonlinear system), *Vestnik SPbGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2008, iss. 1, pp. 49—55 (in Russian).

10. **Zybin E. Yu., Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Mikrin E. A.** *O needinstvennosti resheniya zadachi terminal'nogo upravleniya* (On the nonuniqueness of the solution of the problem of terminal control), *Inzhenernyj Zhurnal: Nauka i Innovacii*, 2013, iss. 10 (22), pp. 25—30 (in Russian).

11. **Kirichenko N. F., Matvienko V. T.** *Obshchee reshenie zadach terminal'nogo upravleniya i nablyudeniya v linejnyh konechnomernyh sistemah* (General solution of the problems of terminal control and observation in linear finite-dimensional systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2006, no. 7, pp. 2—6 (in Russian).

12. **Kirichenko N. F., Lepekha N. P.** *Primenenie psevdoobratnyh i proekcionnyh matric k issledovaniyu zadach upravleniya, nablyudeniya i identifikacii* (Perturbation of pseudoinverse and projection matrices and their application to the identification of linear and nonlinear dependencies), *Kibernetika i Sistemnyj Analiz*, 2002, no. 4, pp. 107—124 (in Ukraine).

13. **Kirichenko N. F., Lepekha N. P.** *Vozmushchenie psevdoobratnyh i proekcionnyh matric i ih primenenie k identifikacii linejnyh i ne linejnyh zavisimostej* (Perturbation of pseudoinverse and projection matrices and their application to the identification of linear and nonlinear dependencies), *Problemy Upravleniya i Informatiki*, 2001, no. 1, pp. 6—22 (in Ukraine).

14. **Kirichenko N. F., Lepekha N. P.** *Psevdoobrashchenie v zadachah upravleniya i nablyudeniya* (Pseudoinverse in control and observation problems), *Avtomatika*, 1993, no. 5, pp. 69—81 (in Ukraine).

15. **Krasovskij N. N.** *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of control motions), Moscow, Nauka, 1968, 476 p. (in Russian).