

Н. В. Фалдин, д-р техн. наук, проф., nvfaldin@yandex.ru,

А. В. Моржов, канд. техн. наук, доц., morzhov@mail.ru,

Тулский государственный университет

Чувствительность вынужденных периодических движений релейной системы к изменению параметров объекта управления¹

Рассматриваются системы с двухпозиционным релейным элементом и гладким нелинейным объектом управления, работающие в режиме вынужденных колебаний. Разработаны методы получения функций чувствительности характеристик периодического движения: периодической траектории, алгебраического критерия устойчивости. Приводится пример, иллюстрирующий получение функций чувствительности.

Ключевые слова: релейная система, вынужденные колебания, чувствительность, периодическая траектория, критерий устойчивости

В релейных системах управления в качестве рабочего часто используется режим вынужденных колебаний. В таких системах частота колебаний определяется частотой вынуждающего сигнала и остается постоянной при изменении параметров объекта управления. С позиции теории к релейным системам, работающим в режиме вынужденных колебаний, относятся широко распространенные в технике системы с симметричной широтно-импульсной модуляцией (ШИМ).

Вообще говоря, в релейных системах рассматриваемого класса могут возникать [1] низкочастотные (субгармонические) колебания. Они имеют частоту, кратную частоте вынуждающего сигнала. Однако такие колебания не используются в качестве рабочих в системах управления. Поэтому в статье рассматриваются только периодические движения основной частоты.

При создании систем автоматического управления весьма важно иметь информацию о чувствительности системы к изменению параметров объекта управления. На практике отклонение параметров от номинальных значений всегда имеет место. Функции чувствительности позволяют легко определить, как влияют указанные отклонения на выходные характеристики системы.

Теория чувствительности как самостоятельное научное направление в теории автоматического управления сформировалась в 60-е годы прошлого столетия. В настоящее время библиография опубликованных по теории чувствительности работ содержит свыше 2500 наименований. Достаточно хорошее представление о состоянии теории дают монографии [2–4]. Однако, несмотря на общее

обилие работ, чувствительность релейных систем, работающих в режиме вынужденных колебаний, исследована весьма слабо. Имеется лишь небольшое число узконаправленных работ, в которых (в основном с помощью метода гармонической линеаризации) рассматривается чувствительность конкретных релейных систем с линейными объектами управления. Между тем, реальные объекты управления, как правило, являются нелинейными.

Основными характеристиками релейной системы управления, работающей в режиме вынужденных колебаний, являются: параметры периодического движения, его устойчивость, ошибка слежения. Данная статья посвящена разработке методов получения функций чувствительности периодической траектории и критерия устойчивости релейных систем с нелинейным объектом управления.

Чувствительность периодической траектории

Условия существования вынужденного периодического движения, определение траектории и критерий устойчивости получены в работе [1]. Именно на результатах этой работы базируется настоящая статья.

Рассмотрим релейную систему, работающую в режиме вынужденных колебаний (рис. 1). Здесь:

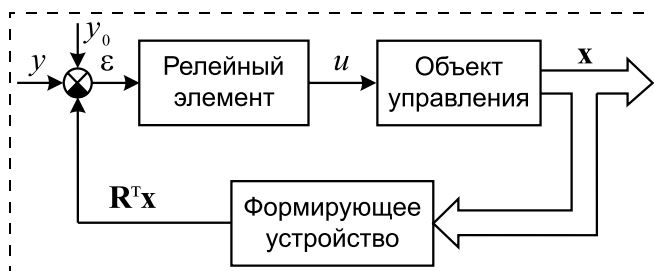


Рис. 1

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00662).

$y_0(t) = Hf_0(t)$ — вынуждающий периодический сигнал периода $2T$, причем $\max_t |f_0(t)| = 1$, $H > 0$ — константа; $y(t)$ — входной сигнал; $\mathbf{R}^T$ — матрица-строка. Вынуждающий сигнал обладает симметрией, т. е. $f_0(t + T) = -f_0(t)$.

При отсутствии входного сигнала (периодические движения рассматриваются при $y(t) \equiv 0$) движение системы задается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u); \quad (1)$$

$$u = \Phi(y_0 - \mathbf{R}^T \mathbf{x}), \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — n -мерные векторы. Релейный элемент является двухпозиционным. Функция Φ задается статической характеристикой релейного элемента (рис. 2). В равенстве (1) α — некоторый скалярный параметр. Будем предполагать, как это обычно имеет место в следящих системах, что объект управления обладает симметрией:

$$\mathbf{f}(-\mathbf{x}, \alpha, -u) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u),$$

причем симметрия сохраняется при любом значении параметра α .

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — простое вынужденное периодическое движение системы (1), (2) периода $2T$, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{x}(t + T) = -\mathbf{x}(t).$$

Предполагается, что момент $t = 0$ совмещен с моментом переключения релейного элемента с $u = -A$ на $u = A$. В интервале $0 < t < 2T$ управление имеет только одно переключение. Именно такого вида вынужденные колебания возникают, как правило, в релейной системе (1), (2).

В соответствии с работой [1] условия существования вынужденного периодического движения задаются соотношениями

$$\begin{cases} y_0(t^*) - \mathbf{R}^T \mathbf{x}^*(T) = b; \\ \dot{y}_0(t^*) - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{z}}^-(T) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

В системе (3) t^* — фаза вынуждающего сигнала, которая устанавливает соответствие между функ-

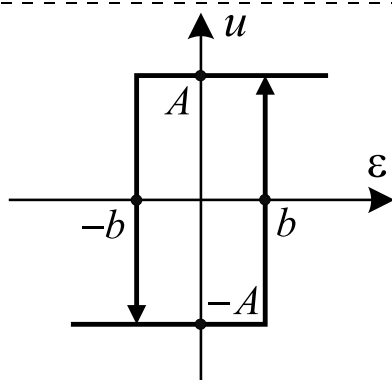


Рис. 2

цией $Hf_0(t)$ и периодическим решением $\mathbf{x}(t)$, вектор $\mathbf{z}^-(T)$ задает значение $\dot{\mathbf{x}}(t)$ (его предел слева) в момент переключения релейного элемента с минуса на плюс. Далее, символом $\mathbf{x}^*(T)$ обозначен фазовый годограф [5, 6] объекта управления. Фаза входного сигнала легко определяется из уравнения (3), например, графическим способом.

Дадим параметру α малое приращение $\delta\alpha$. Изменение параметра α приведет к малому изменению вынужденного периодического движения. Периодическую траекторию параметрически возмущенной системы обозначим

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t),$$

здесь $\delta\mathbf{x}(t)$ — малая величина.

Будем предполагать, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u)$ непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$ и α . В соответствии с (1)

$$\frac{d(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \alpha + \delta\alpha, u). \quad (4)$$

Принимая во внимание, что траектория $\mathbf{x}(t)$ при номинальном значении параметра α удовлетворяет уравнению (1), и опуская величины, имеющие порядок малости выше первого, из соотношения (4) получим

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u)}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u)}{\partial \alpha} \delta\alpha. \quad (5)$$

Равенство (5) называется уравнением в вариациях. Оно связывает вариацию периодической траектории с вариацией параметра α .

Периодические траектории $\mathbf{x}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ обладают симметрией. Поэтому можно ограничиться рассмотрением их на полупериоде.

На полупериоде управление $u(t)$ является постоянной величиной ($u = A$ либо $u = -A$). При $u = \text{const}$ равенство (5) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами.

Положим в уравнении (5) $u = A$. Обозначим $\mathbf{V}^0(t_0, t)$ нормированную фундаментальную матрицу решений данного уравнения, здесь t_0 — начальный момент времени. Пусть, далее, вектор $\mathbf{r}(t)$, $0 \leq t \leq T$, является решением уравнения (5) при нулевых начальных условиях и $\delta\alpha = 1$. Общее решение уравнения (5) задается равенством

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}^0(0, t)\delta\mathbf{x}(0) + \mathbf{r}(t)\delta\alpha. \quad (6)$$

Определим вариацию фазы вынуждающего сигнала. В соответствии с системой (3)

$$y_0(t^* + \delta t^*) - \mathbf{R}^T[\mathbf{x}^*(T) + \delta\mathbf{x}^*(T)] = b, \quad (7)$$

здесь $\delta\mathbf{x}^*(T)$ — вариация фазового годографа. Из равенства (7) следует

$$y_0(t^*) + \dot{y}_0(t^*)\delta t^* - \mathbf{R}^T \mathbf{x}^*(T) - \mathbf{R}^T \delta\mathbf{x}^*(T) = b. \quad (8)$$

В равенстве (8) опущены величины, имеющие порядок малости выше первого. Принимая во внимание соотношение (3), получим

$$\delta t^* = \frac{\mathbf{R}^T \delta \mathbf{x}^*(T)}{\dot{y}_0(t^*)}. \quad (9)$$

Ниже равенства, в которых опущены величины, имеющие порядок малости выше первого, будем записывать, не оговаривая это особо.

Для параметрически возмущенной системы фазовый годограф по определению задается вектором

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(T) = \mathbf{x}(0) + \delta \mathbf{x}(0).$$

Здесь, как и выше, предполагается, что на периодической траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ момент $t = 0$ совмещен с моментом переключения управления с $u = -A$ на $u = A$. Так как $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ — симметричная траектория, то

$$\mathbf{x}(T) + \delta \mathbf{x}(T) = -\mathbf{x}(0) - \delta \mathbf{x}(0)$$

и, следовательно,

$$\delta \mathbf{x}(0) = -\delta \mathbf{x}(T).$$

Равенство (6) можно записать в виде уравнения

$$[\mathbf{I} + \mathbf{V}^0(0, T)] \delta \mathbf{x}(0) = -\mathbf{r}(T) \delta \alpha, \quad (10)$$

здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Из (10) следует, что

$$\delta \mathbf{x}(0) = -[\mathbf{I} + \mathbf{V}^0(0, T)]^{-1} \mathbf{r}(T) \delta \alpha.$$

Таким образом, вариация фазового годографа

$$\delta \mathbf{x}^*(T) = \delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{B} \delta \alpha, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{B} = -[\mathbf{I} + \mathbf{V}^0(0, T)]^{-1} \mathbf{r}(T).$$

В соответствии с соотношениями (9) и (11) коэффициент чувствительности фазы вынуждающего сигнала к изменению параметра α равен

$$K_\alpha^* = \frac{d(t^*)}{d\alpha} = \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{B}}{\dot{y}_0(t^*)}. \quad (12)$$

Возмущенная малым изменением параметра α система (1), (2) имеет периодическую траекторию

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + (\mathbf{V}^0(0, t) \mathbf{B} + \mathbf{r}(t)) \delta \alpha, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Функция чувствительности периодической траектории

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{d\alpha} &= \lim_{\delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t) + (\mathbf{V}^0(0, t) \mathbf{B} + \mathbf{r}(t)) \delta \alpha - \mathbf{x}(t)}{\delta \alpha} = \\ &= \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{V}^0(0, t) \mathbf{B} + \mathbf{r}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (13)$$

Чувствительность критерия устойчивости

Ниже, чтобы не вносить изменения в полученные формулы, вынуждающий сигнал для системы с номинальным значением параметра α будем записывать в виде $y_0(t^* + t)$, а для параметрически возмущенной системы — в виде $y_0(t^* + \delta t^* + t)$.

Рассмотрим сначала устойчивость периодического решения в системе с номинальным значением параметра α , т. е. устойчивость траектории $\mathbf{x}(t)$. В работе [1] получен алгебраический критерий устойчивости вынужденного периодического решения по Ляпунову. Устойчивость оценивается по собственным числам некоторой матрицы. Для траектории $\mathbf{x}(t)$ эта матрица имеет вид

$$\mathbf{G}^0 = \left[\mathbf{I} + \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T)) \mathbf{R}^T}{\dot{y}_0(t^* + T) - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T)} \right] \mathbf{V}^0(0, T), \quad (14)$$

здесь и в дальнейшем символами "минус" и "плюс" обозначаются соответственно пределы слева и справа.

В отличие от автоколебаний, у которых, как правило, оценивается асимптотическая орбитальная устойчивость [6, 9], при исследовании вынужденных периодических движений целесообразно определять устойчивость по Ляпунову. При исследовании устойчивости по Ляпунову исходная и возмущенная (например, изменением начального условия) траектории сравниваются в одни и те же моменты времени t . Из асимптотической устойчивости периодического движения по Ляпунову следует асимптотическая орбитальная устойчивость. Асимптотическая устойчивость по Ляпунову автоколебаний вообще не имеет места.

Определим устойчивость периодической траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Возмущенную (малым изменением начального условия) траекторию обозначим $\hat{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta \tilde{\mathbf{x}}(t)$. Подставим в уравнение (1) функцию $\hat{\mathbf{x}}(t)$:

$$\frac{d[\tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta \tilde{\mathbf{x}}(t)]}{dt} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta \tilde{\mathbf{x}}(t), \alpha + \delta \alpha, u). \quad (15)$$

В равенстве (15) $\delta \tilde{\mathbf{x}}(t)$ и $\delta \alpha$ — малые величины. Из (15) следует

$$\frac{d\delta \tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha + \delta \alpha, u)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \delta \tilde{\mathbf{x}}.$$

Обозначим

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \alpha, u) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u)}{\partial \mathbf{x}}.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha + \delta \alpha, u)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} =$$

$$= \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha + \delta \alpha, u) = \mathbf{M}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, \alpha + \delta \alpha, u).$$

Выше было установлено, что

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + (\mathbf{V}^0(0, t) \mathbf{B} + \mathbf{r}(t)) \delta \alpha$$

и, следовательно,

$$\frac{d\delta \tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\rho} \delta \alpha, \alpha + \delta \alpha, u) \delta \tilde{\mathbf{x}}.$$

Так как $\delta\alpha$ является малой величиной, то можно записать

$$\frac{d\delta\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \alpha, u)\delta\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha, u)\delta\alpha \cdot \delta\tilde{\mathbf{x}}. \quad (16)$$

В равенстве (16)

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha, u) = \frac{d}{d\delta\alpha} [\mathbf{M}(\mathbf{x} + \rho\delta\alpha, \alpha + \delta\alpha, u)]|_{\delta\alpha=0}.$$

Во избежание недоразумений отметим, что $\delta\alpha$ входит в определение траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, т. е. $\delta\alpha$ и $\delta\tilde{\mathbf{x}}$ — независимые малые величины.

В соответствии с соотношением (14) запишем для траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ матрицу устойчивости

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{I} + \frac{(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^+(T))\mathbf{R}^T}{\dot{y}_0(t^* + \delta t^* + T) - \mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T)} \right] \mathbf{V}(0, T), \quad (17)$$

где $\mathbf{V}(0, t)$ — нормированная фундаментальная матрица решений уравнения (16). В работах [7, 8] установлено, что линейризованная по α (не учитываются величины, имеющие относительно α порядок малости выше первого) матрица имеет вид

$$\mathbf{V}(0, t) = \mathbf{V}^0(0, t) + \mathbf{V}^\alpha(0, t)\delta\alpha. \quad (18)$$

В равенстве (18) $\mathbf{V}^\alpha(0, t)$ является матрицей [7, 8], столбцы которой образованы векторами $\mathbf{m}^1(t)$, $\mathbf{m}^2(t)$, ..., $\mathbf{m}^n(t)$, причем каждый вектор $\mathbf{m}^i(t)$ ($i = 1, n$) является решением уравнения

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \alpha, u)\mathbf{m} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha, u)\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t) \quad (19)$$

при $\mathbf{m}(0) = 0$. Это решение зависит от функции $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t)$. Входящий в уравнение (19) вектор $\delta\tilde{\mathbf{x}}^0(t)$ представляет собой столбец матрицы $\mathbf{V}^0(0, t)$, причем вектору $\mathbf{m}^i(t)$ соответствует i -й столбец матрицы $\mathbf{V}^0(0, t)$.

Принимая во внимание соотношение (8), запишем

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{I} + \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T) + \delta\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T) - \delta\dot{\mathbf{x}}^+(T))\mathbf{R}^T}{\dot{y}_0(t^* + T) + \ddot{y}_0(t^* + T)\delta t^* - \mathbf{R}^T(\dot{\mathbf{x}}^-(T) + \delta\dot{\mathbf{x}}^-(T))} \right] \times \\ \times (\mathbf{V}^0(0, T) + \mathbf{V}^\alpha(0, T)\delta\alpha), \quad (20)$$

здесь предполагается, что вынуждающий сигнал $y_0(t)$ имеет в окрестности точки t^* непрерывную вторую производную.

Обозначим

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \alpha, u) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha, u)}{\partial \alpha}.$$

В соответствии с равенством (5)

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^-(T) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, A)\delta\mathbf{x}^-(T) + \mathbf{P}(\mathbf{x}(T), \alpha, A)\delta\alpha, \\ \delta\dot{\mathbf{x}}^+(T) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A)\delta\mathbf{x}^+(T) + \mathbf{P}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A)\delta\alpha.$$

Из непрерывности траекторий $\mathbf{x}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ следует, что $\delta\mathbf{x}^+(T) = \delta\mathbf{x}^-(T)$. Таким образом,

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^-(T) = \mathbf{Q}^+\delta\alpha, \quad \delta\dot{\mathbf{x}}^+(T) = \mathbf{Q}^-\delta\alpha, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{Q}^+ = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, A)\rho(T) + \mathbf{P}(\mathbf{x}(T), \alpha, A), \\ \mathbf{Q}^- = \mathbf{M}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A)\rho(T) + \mathbf{P}(\mathbf{x}(T), \alpha, -A).$$

Подставим (21) в (20):

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{I} - \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))\mathbf{R}^T + (\mathbf{Q}^+ - \mathbf{Q}^-)\mathbf{R}^T\delta\alpha}{\dot{y}_0(t^*) + \ddot{y}_0(t^*) - \frac{\mathbf{R}^T\mathbf{B}\delta\alpha}{\dot{y}_0(t^*)} + \mathbf{R}^T(\dot{\mathbf{x}}^-(T) + \mathbf{Q}^+\delta\alpha)} \right] \times \\ \times (\mathbf{V}^0(T) + \mathbf{V}^\alpha(T)\delta\alpha). \quad (22)$$

В равенстве (22) и ниже для сокращения весьма громоздких равенств вместо $\mathbf{V}^0(0, t)$ и $\mathbf{V}^\alpha(0, t)$ используются обозначения $\mathbf{V}^0(t)$ и $\mathbf{V}^\alpha(t)$. Исключим из (22) слагаемые, имеющие порядок малости выше первого относительно $\delta\alpha$:

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}^0(T) + \mathbf{V}^\alpha(T)\delta\alpha - \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))\mathbf{R}^T\mathbf{V}^0(T) + [(\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))\mathbf{R}^T\mathbf{V}^\alpha(T) + (\mathbf{Q}^+ - \mathbf{Q}^-)\mathbf{R}^T\mathbf{V}^0(T)]\delta\alpha}{\dot{y}_0(t^*) + \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T) + \left[\frac{\ddot{y}_0(t^*)\mathbf{R}^T\mathbf{B}}{\dot{y}_0(t^*)} + \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^+ \right]\delta\alpha}.$$

Выполним линейризацию дроби в окрестности точки $\delta\alpha = 0$:

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}^0(T) - \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))\mathbf{R}^T\mathbf{V}^0(T)}{\dot{y}_0(t^*) + \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T)} + \left[\mathbf{V}^\alpha(T) - \frac{(\dot{y}_0(t^*) + \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T))\mathbf{L} - (\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))\mathbf{R}^T\mathbf{V}^0(T)\mathbf{D}}{(\dot{y}_0(t^*) + \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T))^2} \right] \delta\alpha, \quad (23)$$

здесь

$$\mathbf{L} = (\dot{\mathbf{x}}^-(T) - \dot{\mathbf{x}}^+(T))\mathbf{R}^T\mathbf{V}^\alpha(T) + (\mathbf{Q}^+ - \mathbf{Q}^-)\mathbf{R}^T\mathbf{V}^0(T), \\ \mathbf{D} = \frac{\ddot{y}_0(t^*)\mathbf{R}^T\mathbf{B}}{\dot{y}_0(t^*)} + \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^+.$$

Равенство (23) задает матрицу устойчивости для периодической траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$.

Устойчивость периодической траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ определяется собственными числами матрицы $\mathbf{G}$. Если для каждого собственного числа λ_j матрицы $\mathbf{G}$ справедливо неравенство [1]

$$|\lambda_j| < 1, \quad (24)$$

то периодическая траектория $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Обозначим $\lambda_j^0, j = \overline{1, m}, m \leq n$, собственные числа матрицы $\mathbf{G}$ при $\delta\alpha = 0$. По собственным числам λ_j^0 определяется устойчивость периодической траектории $\mathbf{x}(t)$.

Собственные числа матрицы $\mathbf{G}$ являются корнями многочлена

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}]. \quad (25)$$

Представим

$$\lambda_j = \lambda_j^0 + \delta\lambda_j.$$

Приращение $\delta\lambda_j$ порождено вариацией параметра α . Ясно, что $\delta\lambda_j \rightarrow 0$ при $\delta\alpha \rightarrow 0$. Собственные числа λ_j^0 являются корнями многочлена (25) при $\delta\alpha = 0$.

Пусть λ_j^0 — простое (не кратное) собственное число матрицы (14). Положим в (25) $\lambda = \lambda_j^0 + \delta\lambda_j$. Поскольку $\delta\lambda_j$ и $\delta\alpha$ — зависимые малые величины, то в многочлене $\det[(\lambda_j^0 + \delta\lambda_j)\mathbf{I} - \mathbf{G}]$ можно приравнять к нулю слагаемые, содержащие произведения $\delta\alpha \cdot \delta\lambda_j$ и $(\delta\lambda_j)^n$ при $n \geq 2$ как имеющие порядок малости выше первого. Число λ_j^0 является корнем многочлена (25) при $\delta\alpha = 0$, и поэтому после указанных сокращений получим многочлен первого порядка относительно $\delta\lambda_j$, т. е. равенство вида

$$f_j(\lambda_j^0)\delta\lambda_j = F_j(\lambda_j^0)\delta\alpha. \quad (26)$$

В равенстве (26) $f_j(\lambda_j^0)$ и $F_j(\lambda_j^0)$ — некоторые многочлены.

Из (26) следует, что

$$\delta\lambda_j = \frac{F_j(\lambda_j^0)}{f_j(\lambda_j^0)} \delta\alpha.$$

Функция чувствительности собственного числа λ_j имеет вид

$$\frac{d\lambda_j}{d\alpha} = \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\lambda_j^0 + \delta\lambda_j - \lambda_j^0}{\delta\alpha} = \frac{F_j(\lambda_j^0)}{f_j(\lambda_j^0)}. \quad (27)$$

Рассмотрим случай, когда λ_j^0 является кратным собственным числом матрицы (14) и, следовательно, кратным корнем многочлена

$$\det[\lambda^0 \mathbf{I} - \mathbf{G}^0] = \sum_{i=0}^n C_i(\lambda^0)^i. \quad (28)$$

Положим для простоты, что корень λ_j^0 имеет кратность два. В этом случае

$$\frac{d}{d\lambda_j^0} [\det(\lambda_j^0 \mathbf{I} - \mathbf{G}^0)] = \frac{d}{d\lambda_j^0} \left[\sum_{i=0}^n C_i(\lambda_j^0)^i \right] = 0.$$

Принимая во внимание соотношение (28), запишем

$$\begin{aligned} \det[(\lambda_j^0 + \delta\lambda_j)\mathbf{I} - \mathbf{G}] &= \\ &= \sum_{i=0}^n (C_i + b_i \delta\alpha)(\lambda_j^0 + \delta\lambda_j)^i = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

В равенстве (29) b_i — некоторые коэффициенты, учитывающие изменения, порожденные вариацией параметра α . Опуская в уравнение (29) слагаемые, имеющие порядок малости выше первого, найдем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n C_i(\lambda_j^0)^i + \frac{d}{d\lambda_j^0} \left[\sum_{i=0}^n C_i(\lambda_j^0)^i \right] \delta\lambda_j + \\ + \sum_{i=0}^n b_i(\lambda_j^0)^i \delta\alpha = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку λ_j^0 является кратным корнем многочлена (28), то

$$\sum_{i=0}^n C_i(\lambda_j^0)^i = 0, \quad \frac{d}{d\lambda_j^0} \left[\sum_{i=0}^n C_i(\lambda_j^0)^i \right] = 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^n b_i(\lambda_j^0)^i \delta\alpha = 0.$$

Равенства (26) и (27), как следует из соотношения (30), справедливы и в случае кратного собственного числа λ_j^0 . Но тогда соотношение (27) приводит к неопределенности, и поэтому

$$\frac{d\lambda_j}{d\alpha} = \frac{\lim_{\lambda_j \rightarrow \lambda_j^0} \frac{d}{d\lambda_j} F_j(\lambda_j)}{\lim_{\lambda_j \rightarrow \lambda_j^0} \frac{d}{d\lambda_j} f_j(\lambda_j)}. \quad (31)$$

По собственным числам λ_j матрицы $\mathbf{G}$ оценивается асимптотическая устойчивость по Ляпунову периодической траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. На этом основании производные (27) и (31) можно рассматривать как функции чувствительности критерия устойчивости.

Пример

На рис. 3 изображена структурная схема релейной системы, работающей в режиме вынужденных колебаний. Здесь нелинейная функция

$$\varphi(x_1) = \frac{2\alpha}{\pi} \arctg(\beta x_1);$$

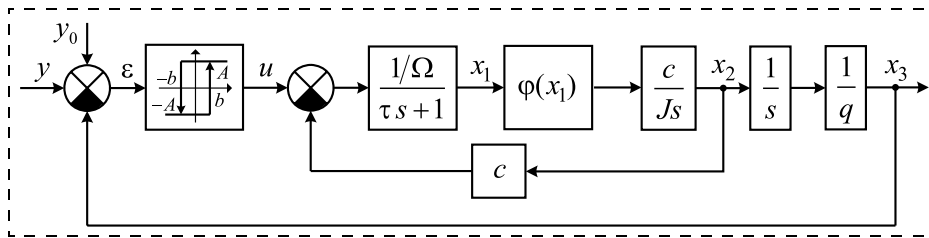


Рис. 3

вынуждающий сигнал

$$y_0(t) = H \sin \frac{\pi}{T} t;$$

значения параметров: $A = 27$; $b = 0,005$; $\Omega = 0,15$; $\tau = 0,0015$; $\beta = 0,02$; $c = 0,052$; $J = 0,0093$; $q = 120$; $\beta = 0,02$; $\alpha = 120$; $H = 0,05$; $T = 0,01$.

При $y(t) \equiv 0$ движение системы задается уравнениями (1), (2), где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{R}^T = [0 \ 0 \ 1]$, вектор

$$f(\mathbf{x}, \alpha, u) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau}x_1 - \frac{c}{\tau\Omega}x_2 + \frac{1}{\tau\Omega}u \\ \frac{2ac}{\pi J} \arctg(\beta x_1) \\ \frac{1}{q}x_2 \end{bmatrix}.$$

Для изображенного на рис. 3 объекта управления был построен фазовый годограф [6], с помощью соотношений (3) определена фаза вынуждающего сигнала $t^* = 3,203 \cdot 10^{-4}$. Далее, путем непосредственного интегрирования уравнений (1), (2) (фазовый годограф задает необходимое начальное условие) была рассчитана периодическая траектория $\mathbf{x}(t)$ периода $2T$.

Равенство (5) является линейным дифференциальным уравнением с переменными по времени коэффициентами. Поэтому матрица $\mathbf{V}^0(0, t)$ определялась численно путем n -кратного решения этого уравнения при $\delta\alpha = 0$ с соответствующими начальными условиями [7]. Функции чувствительности фазы

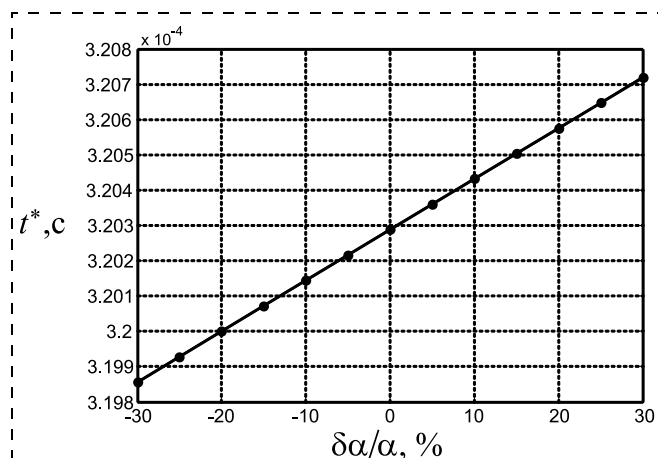


Рис. 4

вынуждающего сигнала и периодической траектории $\mathbf{x}(t)$ были вычислены по формулам (12) и (13).

На рис. 4 представлены значения фазы вынуждающего сигнала t^* , определенные с помощью коэффициента чувствительности K_α^* (сплошная линия) и полученные непосредственно из решения уравнения (3) (обозначены точками) при соответствующем значении параметра α .

Для каждого значения параметра α определялся фазовый годограф $\mathbf{x}^*(T)$. Из рис. 4 видно, что при 30 %-ном отклонении параметра α от номинального значения использование коэффициента чувствительности K_α^* практически не вносит ошибки в определение вынуждающего сигнала.

На рис. 5 показано отклонение периодической траектории $\tilde{\mathbf{x}}_3(t)$ от $\mathbf{x}_3(t)$ при изменении параметра α в большую сторону на 20 %. Сплошной линией изображена функция $\delta\mathbf{x}_3(t) = \mathbf{p}_3(t)\delta\alpha$, а точками — функция $\Delta\mathbf{x}_3(t) = \tilde{\mathbf{x}}_3(t) - \mathbf{x}_3(t)$, полученная с помощью компьютерного моделирования. Из рис. 5 видно, что результаты практически совпадают.

Чувствительность критерия устойчивости определялась в полном соответствии с изложенным выше.

Матрицу устойчивости $\mathbf{G}^0$ рассчитывали по формуле (14), и был получен следующий результат:

$$\mathbf{G}^0 = \begin{pmatrix} -0,00553 & -1,62062 & -15339,23684 \\ 0,00462 & 0,99653 & 0 \\ 3,39327 \cdot 10^{-7} & 8,31520 \cdot 10^{-5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы определяли с помощью пакета прикладных математических программ Scilab. Они имеют следующие значения:

$$\lambda_1^0 = 0,99486 + 0,07673i, \lambda_2^0 = 0,99486 - 0,07673i, \\ \lambda_3^0 = 0,00128,$$

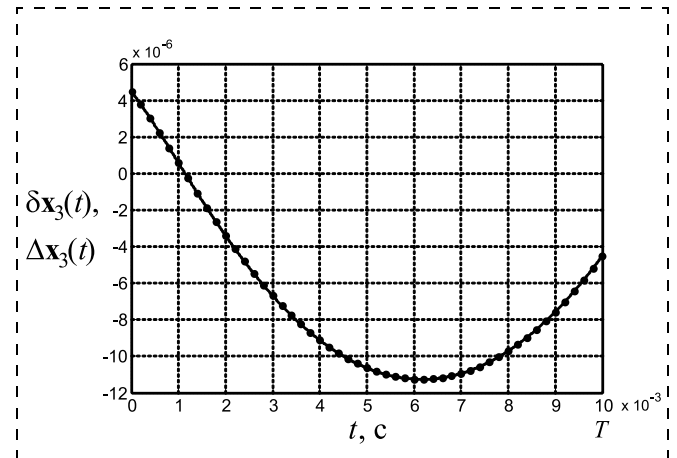


Рис. 5

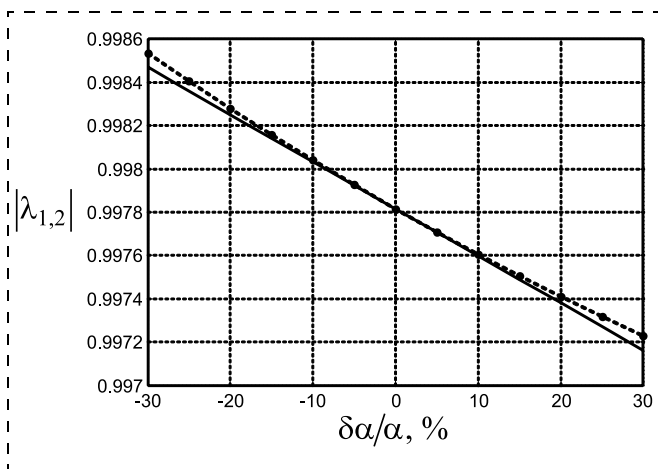


Рис. 6

здесь i — мнимая единица. Поскольку собственные числа удовлетворяют неравенству (24), периодическая траектория $\mathbf{x}(t)$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Устойчивость вынужденного периодического движения параметрически возмущенной системы (траектория $\tilde{\mathbf{x}}(t)$) определяется по собственным числам матрицы

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^0 + \begin{pmatrix} -5,65122 \cdot 10^{-5} & 4,35811 \cdot 10^{-5} & 0,13853 \\ 3,83542 \cdot 10^{-5} & -2,87795 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 2,82336 \cdot 10^{-9} & -1,50139 \cdot 10^{-9} & 0 \end{pmatrix} \delta\alpha.$$

С использованием сформулированного выше алгоритма для каждого собственного числа были получены коэффициенты чувствительности

$$K_1^\lambda = \frac{d\lambda_1}{d\alpha} = -4,266909 \cdot 10^{-5} + 0,000317i,$$

$$K_2^\lambda = \frac{d\lambda_2}{d\alpha} = -4,266909 \cdot 10^{-5} - 0,000317i,$$

$$K_3^\lambda = \frac{d\lambda_3}{d\alpha} = 4,649232 \cdot 10^{-8}.$$

На рис. 6 и 7 приведены значения модулей собственных чисел λ_1 , λ_2 , λ_3 , полученные с помощью коэффициентов чувствительности K_1^λ , K_2^λ , K_3^λ (сплошная линия) и найденные непосредственно по матрице $\mathbf{G}^0$ при соответствующем значении параметра α (штриховые линии).

Максимальная ошибка в определении модулей собственных чисел с помощью коэффициентов чувствительности при 30 %-ном отклонении параметра α составила менее 0,01 %.

Заключение

Для рассматриваемого класса релейных систем разработаны методы получения функций чувстви-

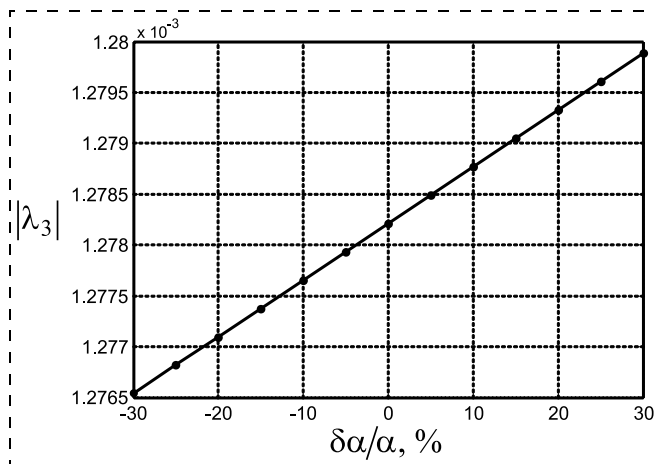


Рис. 7

тельности периодической траектории и критерия ее устойчивости. Однако основной результат работы заключается в том, что она фактически содержит алгоритм, следуя которому, можно получить указанные функции чувствительности для релейных систем с любым нелинейным объектом управления.

В работе рассматривается получение функций чувствительности при изменении одного скалярного параметра. Если имеет место изменение нескольких параметров, то отклонения, обусловленные этим изменением (периодической траектории, собственных чисел матрицы устойчивости), определяются суммированием отклонений, порожденных вариацией каждого из параметров. При этом функции чувствительности по каждому из параметров определяются изложенным выше способом.

Получение функций чувствительности базируется на методе фазового годографа. Он является точным методом исследования периодических движений в релейных системах. Это, в конечном счете, гарантирует справедливость самих функций чувствительности, получаемых с помощью разработанных методов.

Авторы статьи ведут исследования (в рамках гранта РФФИ), направленные на создание теории чувствительности релейных систем управления, работающих в режиме вынужденных колебаний. Эта теория должна охватывать системы с нелинейными объектами управления любого типа, определять чувствительность характеристик периодического движения, чувствительность ошибки слежения. Данная статья является первой работой в этом направлении.

Располагая функциями чувствительности, можно сравнительно просто определить отклонения выходных характеристик, обусловленные изменением параметров объекта управления, и, тем самым, оценить работоспособность системы в реальных условиях эксплуатации. Методы исследования позволяют выполнить синтез и оптимизацию системы при задании ограничений на чувствительность. Их можно использовать также при назначении допусков на элементы системы.

Список литературы

1. Фалдин Н. В., Морзов А. В. Анализ вынужденных периодических движений в релейных системах автоматического управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 1. С. 2—7.
2. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981, 464 с.
3. Eslami M. Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 600 pp.
4. Rozenwasser E., Yusupov R. Sensitivity of Automatic Control Systems. London, New York, Washington: D.C, CRC Press, Boca Raton, 2000. 436 pp.
5. Фалдин Н. В., Руднев С. А. Синтез релейных систем методом фазового годографа // Изв. вузов. Приборостроение. 1982. № 7. С. 32—36.
6. Фалдин Н. В. Релейные системы автоматического управления // Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под. ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2004. С. 573—636.
7. Фалдин Н. В., Морзов А. В. Чувствительность ошибки слежения к изменению параметров объекта управления в релейной автоколебательной системе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. № 2. С. 81—88.
8. Морзов А. В., Фалдин Н. В. Функции чувствительности характеристик автоколебаний в релейных системах с нелинейным объектом управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 6. С. 14—24.
9. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 915 с.

Sensitivity of the Forced Periodic Motions to the Variations of the Plant Parameters in the Relay System

N. V. Faldin, nvfaldin@yandex.ru, A. V. Morzhov, morzhov@mail.ru✉,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: Morzhov Aleksandr V., Associate Professor,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation, e-mail: morzhov@mail.ru

Received on June 16, 2015

Accepted on July 03, 2015

The topic of the article is the class of the control systems with a bistable relay element and smooth nonlinear plant running in the forced vibrations mode. Methods were developed for obtaining the sensitivity functions of the periodic motion characteristics (periodic trajectory, algebraic criterion of stability by Lyapunov). These methods can be used for sensitivity investigation of the control systems with the symmetrical pulse wide modulation (PWM), which have widespread technical applications. Sensitivity functions were obtained based on the precision method of investigation of the periodic motion. This ensures validity of the sensitivity functions, which are received due to the developed methods. An example is presented, which illustrates investigation of the sensitivity functions of the periodic trajectory and algebraic criterion of stability. This article is the first work, the aim of which is development of the theory of sensitivity of the relay control systems running in the forced vibrations mode. Besides the solution to the problem, in fact, it contains an algorithm, which allows us to develop methods for obtaining the sensitivity functions of the periodic motion for the systems with non-linear plant of any order. Having obtained the sensitivity functions, we can relatively easily identify the deviations in the output periodic motion characteristics. This allows us to estimate the system's performance. The proposed methods allow us to perform system syntheses and system optimization by setting limits on the periodic motion sensitivity.

Keywords: relay control system, forced vibrations, sensitivity, periodic trajectory, stability criterion

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 14-08-00662.

For citation:

Faldin N. V., Morzhov A. V. Sensitivity of the Forced Periodic Motions to the Variations of the Plant Parameters in the Relay System, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no 11, pp. 723—730.

DOI: 10.17587/mau/16.723-730

References

1. Faldin N. V., Morzhov A. V. Analiz vynuzhdennykh periodicheskikh dvizhenij v relejnykh sistemah avtomaticheskogo upravlenija (The analysis of forced periodic motion in relay control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 1, pp. 2—7 (in Russian).
2. Rozenvasser E. N., Jusupov R. M. *Chuvstvitel'nost' sistem upravlenija* (Sensitivity of Control Systems), Moscow, Nauka, 1981, 464 pp. (in Russian).
3. Eslami M. Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction, Berlin, Springer-Verlag, 1994, 600 p.
4. Rozenwasser E. N., Yusupov R. M. Sensitivity of Automatic Control Systems, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C, 2000, 436 pp.
5. Faldin N. V., Rudnev S. A. *Sintez relejnykh sistem metodom fazovogo godografa* (Relay systems syntheses using method of phase locus), *Izv. Vuzov. Priborostroenie*, 1982, no. 7, pp. 32—36 (in Russian).
6. Faldin N. V. *Relejnye sistemy avtomaticheskogo upravlenija* (v sbornike "Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravlenija") (Relay control systems (in the book "Mathematical models of dynamic characteristics and analysis of control systems")), Publishing house of MGTU im. N. Je. Bauman, 2004, pp. 573—636 (in Russian).
7. Faldin N. V., Morzhov A. V. *Chuvstvitel'nost' oshibki slezhenija k izmeneniju parametrov objekta upravlenija v relejnoj avtokolebatel'noj sisteme* (Sensitivity of tracking error to the variations of the plant parameters in relay selfoscillations system), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, no. 2, pp. 81—88 (in Russian).
8. Morzhov A. V., Faldin N. V. *Funkcii chuvstvitel'nosti harakteristik avtokolebanij v relejnykh sistemah s nelinejnym ob'ektom upravlenija* (Sensitivity functions of selfoscillations in bang-bang systems with non-linear plant), *Izv. RAN. TiSU*, 2014, no. 6, pp. 14—24 (in Russian).
9. Andronov A. A., Vitt A. A., Hajkin S. Je. *Teorija kolebanij* (Theory of vibrations), Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1959, 915 p. (in Russian).