For citation:

Bogdanov D. R., Darintsev O. V. Kinematics of a Manipulator with a Controlled Bending on the Basis of Solid Elements with a Spherical Surface, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 10, pp. 671—678.

DOI: 10.17587/mau.16.671-378

References

1. **Bogdanov D. R., Darintsev O. V.** *Konstruktivnye osobennosti manipuljatorov s upravljaemym izgibom* (Design features manipulators controlled bending), *Sovremennye Problemy Nauki i Obrazovanija*, 2013, no. 6, available at: URL: www. science-education.ru/113-11784 (in Russian).

2. **Xin Dong, Mark Raffles, Salvador Cobos Guzman, Dragos Axinte, James Kell.** Design and analysis of a family of snake arm robots connected by compliant joints, *Mechanism and Machine Theory*, 2014, vol. 77, pp. 73—91.

3. **Darintsev O. V.** *Ispol'zovanie tehnologij virtualizacii v sistemah upravlenija mikrorobotami i mikrosistemami* (Using visualization technologies in control systems and microsystems microrobots), *Trudy Instituta mehaniki im. R. R. Mavljutova Ufimskogo nauchnogo centra RAN* (Proc. of the V Russian conf. with int. participating "Mnogofaznye sistemy: teorija i prilozhenija", P. II, Ufa, Neftegazovoe delo), 2012, iss. 9, pp. 47—52 (in Russian).

4. **Korn G., Korn T.** *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* (Mathematical Handbook for Scientists and Engineers), Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).

5. **Darintsev O. V., Bogdanov D. R.** *Razrabotka informacionnoj podsistemy mnogozvennogo manipuljatora na baze PLIS* (Development of information subsystems multilink manipulator on FPGA), *Dinamika Nauchnyh Issledovanij — 2011*, Proc. VII Int. Scient. Conf., Engineering, physics Przhemysl', 2011, vol. 20, pp. 50—56 (in Russian).

6. **Bogdanov D. R.** *Osobennosti postroenija informacionnoj sistemy mnogozvennogo manipuljatora s uchjotom specifiki sredy* (Features of the construction of an information system multilink manipulator considering the specifics of the environment), *Trudy Instituta mehaniki im. R. R. Mavljutova Ufimskogo nauchnogo centra RAN* (Proc. of the V Russian conf. with int. participating "Mnogofaznye sistemy: teorija i prilozhenija", p. II, Ufa, Neftegazovoe delo), 2012, iss. 9, pp. 27—32 (in Russian).

7. **Fu K., Gonsales R., Li K.** *Robototehnika* (Robotics) M.: Mir, 1989. 624 p. (in Russian).

8. **Anurjev V. I.** *Spravochnik konstruktora mashinostroitelja* (Reference Constructor-Machine Builder), vol. 1. Moscow, Mashinostroenie, 2001, 920 p. (in Russian).

УДК 004.94 DOI: 10.17587/mau.16.678-685

Е. В. Страшнов, вед. программист, strashnov_evg@mail.ru,
М. В. Михайлюк, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. отделом, mix@niisi.ras.ru,
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва

Моделирование ограничений на относительное движение шарнирно связанных тел в системах виртуального окружения[1]

Рассматривается задача моделирования в масштабе реального времени динамики шарнирно связанных тел с ограничениями на их относительное движение. Эта задача может быть представлена в виде системы алгебраических уравнений с линейными дополнениями. Для решения такой системы в работе предлагается метод последовательных импульсов с использованием свойства временной когерентности. Устойчивость предлагаемого метода обеспечивается за счет стабилизации ограничений методом последовательных импульсов. Предложенные методы и алгоритмы реализованы в программных модулях и оформлены в виде исполняемой библиотеки для персональных компьютеров под управлением операционной системы Windows. Их апробация была проведена в подсистеме динамики для моделирования роботов, содержащих шарниры с ограничениями на параметры относительного движения.

Ключевые слова: *система многих тел, шарниры, связи, параметры относительного движения, реакции связи, полунеявная схема Эйлера, линейные дополнения, временная когерентность, стабилизация ограничений, псевдоимпульсы*

Введение

В системах виртуальной реальности, в частности в тренажерных комплексах, часто возникает необходимость моделировать динамику системы многих тел с шарнирами. Реалистичное моделирование этой динамики позволяет повысить качество и скорость обучения операторов тренажеров и избежать формирования у них ложных навыков. Примерами систем с шарнирами являются автомобиль с прицепом, дверь на петлях, манипуляторы и т. д. Поэтому разработка методов моделирования таких систем является актуальной задачей.

Относительное движение тел, соединенных шарнирами, определяется с помощью наборов параметров. На эти параметры могут быть наложены ограничения (например, ограничение на угол поворота в сочленении робота). Задача состоит в том, чтобы смоделировать движение системы тел с учетом этих ограничений.

В системах виртуальной реальности необходимо использовать такие методы, которые обеспечат выполнение всех требуемых расчетов в режиме реального времени. Кроме того, необходимо, чтобы эти методы решали задачу для всевозможных конфигураций систем многих тел (конфигураций с открытыми и замкнутыми кинематическими цепями), в том числе и с заранее неизвестной структурой. Также требуется обеспечить устойчивость модели-

[1] Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 13-07-00708.

рования, под которым здесь подразумевается моделирование движения тел с соблюдением законов сохранения энергии и импульса.

Для решения данной задачи существуют две группы методов: с использованием минимального числа координат (методы с использованием обобщенных координат) и методы с использованием избыточного набора координат. Выполнимость требуемых свойств обеспечивается посредством методов с избыточным набором координат. Решаемая задача для данной группы методов сводится к задаче динамики систем многих тел с ограничениями.

Большинство работ в данной области посвящено моделированию контактного взаимодействия между телами и моделированию шарнирно-связанных тел без учета ограничений на относительное движение [1—3]. В статье [1] реализован импульсный подход, суть которого состоит в том, что для каждого шарнира оцениваются ошибки ограничений на следующем шаге моделирования, которые уменьшаются посредством итеративного применения импульсов. В работе [2] рассматривается задача обеспечения линейного времени вычислений с использованием метода множителей Лагранжа. В диссертации [3] кратко описываются существующие методы динамики тел с ограничениями. В работе [4] представлена технология составления ограничений на относительное движение в общем виде и приведены описания ограничений для двух типов шарниров (осевого и призматического). Однако в этой работе не указывается, как применять ограничения на параметры относительного движения в рамках используемого метода для моделирования динамики многих тел. В статьях [5, 6] применительно к задачам инверсной кинематики особое внимание уделено вопросам параметризации сферического шарнира, а также использованию более сложных ограничений.

Основное положение данной статьи состоит в расширении использования метода последовательных импульсов [7] до моделирования систем многих тел с ограничениями на параметры относительного движения. Для улучшения сходимости данного метода используется свойство временной когерентности, которое означает, что состояние системы тел (их координаты) за малый промежуток времени меняется незначительно. Помимо этого, решается задача стабилизаций ограничений методом последовательных импульсов, гарантирующая устойчивое моделирование динамики шарниров даже при больших ошибках ограничений. Концептуальные основы данного исследования базируются на основных уравнениях и законах механики твердых тел. Апробация реализованных алгоритмов проводится в подсистеме динамики программного комплекса для моделирования реальных роботов.

Динамика системы многих тел с ограничениями

Рассмотрим систему из N тел, в которой i-е тело имеет массу m_i и тензор инерции $\mathbf{I}_i$. Уравнения Ньютона—Эйлера, описывающие динамику i-го свободного твердого тела, имеют вид

$$m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i^e,\ \mathbf{I}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \boldsymbol{\tau}_i^e,\ i = \overline{1,N},$$

где $\mathbf{v}_i$ и $\boldsymbol{\omega}_i$ — векторы линейной и угловой скорости, $\mathbf{f}_i^e$ и $\boldsymbol{\tau}_i^e$ — векторы всех внешних сил и моментов, действующих на i-е тело (компоненты гироскопического момента $\boldsymbol{\tau}_i^\omega = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i\boldsymbol{\omega}_i$ входят в вектор моментов $\boldsymbol{\tau}_i^e$). Перепишем эти уравнения в более компактном виде, объединяя линейную и угловую скорость в вектор $\mathbf{V}_i = (\mathbf{v}_i, \boldsymbol{\omega}_i)$, а силы и моменты — в вектор $\mathbf{F}_i^e = (\mathbf{f}_i^e, \boldsymbol{\tau}_i^e)$:

$$\mathbf{M}_i\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i^e,\ i = \overline{1,N}, \tag{1}$$

где $\mathbf{M}_i = \mathrm{diag}(m_i\mathbf{E}_3, \mathbf{I}_i)$ — блочно-диагональная матрица масс размером 6×6, $\mathbf{E}_3$ — единичная матрица размером 3×3.

Координаты и ориентация тела задаются с помощью положения центра масс $\mathbf{X}_i$ и единичного кватерниона $\mathbf{q}_i = (q_{iw}, \{q_{ix}, q_{iy}, q_{iz}\})^{\mathrm{T}}$ в мировой системе координат, которые могут быть вычислены на основе кинематических уравнений следующего вида:

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{v}_i,\ \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i * \mathbf{q}_i,\ i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

где $*$ — умножение кватернионов [8]. По кватерниону $\mathbf{q}_i$ может быть вычислена матрица поворота тела $\mathbf{R}_i(\mathbf{q}_i)$.

Пусть тела в системе связаны с помощью K шарниров. Тогда они перестают быть свободными и должны удовлетворять набору связей, которые могут быть голономными и неголономными, удерживающими и неудерживающими. Мы будем рассматривать только голономные связи. Тогда для k-го шарнира, соединяющего i-е и j-е тела, удерживающие связи можно записать в виде

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{G}_k(\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{q}_j) = \mathbf{0},\ k = \overline{1,K}, \tag{3}$$

где размер $m_k = \dim(\mathbf{G}_k)$ вектора $\mathbf{G}_k$ (число ограничений для k-го шарнира) равно числу степеней свободы системы, которые ограничивает k-й шарнир. При этом от функций $\mathbf{G}_k$ потребуем, чтобы они были непрерывно дифференцируемыми функциями по своим аргументам. Относительное движение в шарнире определяется оставшимися $l_k = 6 - m_k$ степенями свободы.

Кроме этих ограничений могут быть также ограничения на параметры относительного движения тел (например, угол поворота одного тела относительно другого не должен превышать 90°). Такие ограничения описываются неудерживающими связями. Без ограничения общности будем считать, что они

наложены на первые $S \leqslant K$ шарниров. Записывая эти ограничения через координаты движения, получим неудерживающие связи следующего вида:

$$\boldsymbol{\chi}_s = \boldsymbol{\chi}_s(\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{q}_j) \geqslant \mathbf{0},\ s = \overline{1,S},\ l_s = \dim(\boldsymbol{\chi}_s), \quad (4)$$

где функции $\boldsymbol{\chi}_s$ будем считать непрерывно-дифференцируемыми на некотором множестве $\boldsymbol{\Omega}_s$.

Производные от ограничений (3) и (4) имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{G}}_k = \mathbf{J}_{ki}\mathbf{V}_i + \mathbf{J}_{kj}\mathbf{V}_j,\ \dot{\boldsymbol{\chi}}_s = \tilde{\mathbf{J}}_{si}\mathbf{V}_i + \tilde{\mathbf{J}}_{sj}\mathbf{V}_j, \quad (5)$$

где $\mathbf{J}_{ki}$ и $\mathbf{J}_{kj}$ — матрицы-якобианы размерности $m_k \times 6$; $\tilde{\mathbf{J}}_{si}$ и $\tilde{\mathbf{J}}_{sj}$ — матрицы-якобианы размерности $l_s \times 6$, зависящие от координат тел.

Для выполнения связей приложим к телам дополнительные силы реакции связей. Из классической механики известно [9], что такие силы для ограничений (3) и (4) имеют вид

$$\mathbf{F}_i^c = \mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_k^G + \tilde{\mathbf{J}}_{si}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_s^\chi,\ \mathbf{F}_j^c = \mathbf{J}_{kj}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_k^G + \tilde{\mathbf{J}}_{sj}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_s^\chi,$$

где $\boldsymbol{\lambda}_k^G$ и $\boldsymbol{\lambda}_s^\chi$ — неизвестные множители Лагранжа.

Добавляя силы реакции связей для всех шарниров в уравнения Ньютона—Эйлера (1), получим:

$$\mathbf{M}_i\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i^e + \sum_{k \in K_i}\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_k^G + \sum_{s \in S_i}\tilde{\mathbf{J}}_{si}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_s^\chi,$$

где K_i — множество шарниров, которые связывают i-е тело с другими телами; S_i — подмножество шарниров из множества K_i, для которых введены ограничения на параметры относительного движения.

Перейдем теперь от сил к импульсам. Для этого запишем разностную схему метода Эйлера, в которой вектор скоростей аппроксимируется следующим образом:

$$\dot{\mathbf{V}} \approx \frac{\mathbf{V}(t+\Delta t) - \mathbf{V}(t)}{\Delta t},$$

где Δt — шаг разностной схемы. Делая замены $\mathbf{p}_i^e(t) = \mathbf{F}_i^e(t)\Delta t$, $\mathbf{p}_k^G(t) = \boldsymbol{\lambda}_k^G(t)\Delta t$ и $\mathbf{p}_s^\chi(t) = \boldsymbol{\lambda}_s^\chi(t)\Delta t$, получим

$$\mathbf{V}_i(t+\Delta t) = \mathbf{V}_i(t) + \mathbf{M}_i^{-1}(t)(\mathbf{p}_i^e(t) + \\ + \sum_{k \in K_i}\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_k^G(t) + \sum_{s \in S_i}\tilde{\mathbf{J}}_{si}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s^\chi(t)). \quad (6)$$

Величины $\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_k^G(t)$ и $\tilde{\mathbf{J}}_{si}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s^\chi(t)$ будем называть импульсами реакций связей.

Используя кинематические уравнения (2), координаты тел в разностной схеме Эйлера будем определять через скорости тел в момент времени $t + \Delta t$ (полунеявная схема Эйлера):

$$\begin{pmatrix}\mathbf{X}_i(t+\Delta t)\\ \mathbf{q}_i(t+\Delta t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}_i(t)\\ \mathbf{q}_i(t)\end{pmatrix} + \Delta t\mathbf{H}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_i(t+\Delta t)\\ \boldsymbol{\omega}_i(t+\Delta t)\end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\mathbf{H} = \begin{bmatrix}\mathbf{E}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_q(t)\end{bmatrix}$, $\mathbf{H}_q(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-q_{ix}(t) & -q_{iy}(t) & -q_{iz}(t)\\ q_{iw}(t) & q_{iz}(t) & -q_{iy}(t)\\ -q_{iz}(t) & q_{iw}(t) & q_{ix}(t)\\ q_{iy}(t) & -q_{ix}(t) & q_{iw}(t)\end{bmatrix}$.

Для определения неизвестных величин импульсов $\mathbf{p}_k^G$ и $\mathbf{p}_s^\chi$ нужно сформировать дополнительные соотношения, которые определяются типом связи.

Недостающие условия для определения импульсов $\mathbf{p}_k^G$ получим из соотношений (5), аппроксимируя производную от ограничений (3) в момент времени $t + \Delta t$ следующим образом:

$$\dot{\mathbf{G}}_k(t+\Delta t) = \mathbf{J}_{ki}(t)\mathbf{V}_i(t+\Delta t) + \mathbf{J}_{kj}(t)\mathbf{V}_j(t+\Delta t) = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Здесь предполагается, что якобианы меняются мало на промежутке от t до $t + \Delta t$.

Пусть для какого-нибудь ограничения в соотношениях (4) выполнено равенство $\chi_{sr}(t) = 0$ (здесь и далее индекс r означает компоненту вектора). Покажем, что в этом случае $\dot{\chi}_{sr}(t+\Delta t) \geqslant 0$, $p_{sr}^\chi \geqslant 0$ и $\dot{\chi}_{sr}(t+\Delta t)p_{sr}^\chi = 0$. Действительно, $\dot{\chi}_{sr}(t+\Delta t)$ не может быть отрицательной (так как в противном случае на следующем шаге получим $\chi_{sr}(t+\Delta t) < 0$). Таким образом,

$$\dot{\chi}_{sr}(t+\Delta t) = \\ = \tilde{\mathbf{J}}_{si,r}(t)\mathbf{V}_i(t+\Delta t) + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}(t)\mathbf{V}_j(t+\Delta t) \geqslant 0, \quad (9)$$

где $\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}(t)$ и $\tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}(t)$ — r-е строки матриц $\tilde{\mathbf{J}}_{si}$ и $\tilde{\mathbf{J}}_{sj}$.

Объединим координаты тела в вектор $\mathbf{X}_i' = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_i\\ \mathbf{q}_i\end{bmatrix}$.

Обобщенные силы реакции связи $\chi_{sr} \geqslant 0$ имеют вид $\mathbf{Q}_{si,r}^c = \left(\frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_i'}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_{sr}^\chi$ для i-го тела и $\mathbf{Q}_{sj,r}^c = \left(\frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_j'}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_{sr}^\chi$ для j-го тела. Вариация данной связи $\delta\chi_{sr}$ выражается через виртуальные перемещения $\delta\mathbf{X}_i'$ и $\delta\mathbf{X}_j'$ как $\delta\chi_{sr} = \frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_i'}\delta\mathbf{X}_i' + \frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_j'}\delta\mathbf{X}_j' \geqslant 0$. Работа обобщен-

ных сил реакций связи на виртуальных перемещениях равна

$$\delta A_{sr}^{\chi} = (\mathbf{Q}_{si,\,r}^{c})^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{X}_i' + (\mathbf{Q}_{sj,\,r}^{c})^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{X}_j' =$$

$$= \lambda_{sr}^{\chi}\left(\frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_i'}\delta\mathbf{X}_i' + \frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_j'}\delta\mathbf{X}_j'\right) = \lambda_{sr}^{\chi}\delta\chi_{sr}.$$

Умножая работу δA_{sr}^{χ} на шаг Δt, получим $\delta A_{sr}^{\chi}\Delta t = p_{sr}^{\chi}\delta\chi_{sr}$. Из леммы для необратимых связей [10, §253] следует, что работа сил реакции неудерживающей связи неотрицательна для любого виртуального перемещения, т. е. $\delta A_{sr}^{\chi} \geqslant 0$.

Из условий $\delta\chi_{sr} \geqslant 0$ и $\delta A_{sr}^{\chi}\Delta t = p_{sr}^{\chi}\delta\chi_{sr} \geqslant 0$ следует, что должно быть выполнено условие

$$p_{sr}^{\chi} \geqslant 0. \tag{10}$$

Рассматривая вместо виртуальных перемещений действительные перемещения $d\chi_{sr} = \chi_{sr}(t + \Delta t) - \chi_{sr}(t) = \chi_{sr}(t + \Delta t)$, получаем, что работа обобщенных сил реакции на этих перемещениях, помноженная на Δt, имеет вид $dA_{sr}^{\chi}\Delta t = p_{sr}^{\chi}\chi_{sr}(t + \Delta t)$. Из леммы [10, §253] следует, что на любом действительном перемещении работа сил реакции неудерживающей связи равна нулю, что приводит к условию $p_{sr}^{\chi}\chi_{sr}(t + \Delta t) = 0$.

Так как мы используем полунеявную схему Эйлера (7), то из формулы Тейлора, отбрасывая малые члены, получим

$$\chi_{sr}(t + \Delta t) = \chi_{sr}(\mathbf{X}_i'(t + \Delta t),\ \mathbf{X}_j'(t + \Delta t)) =$$

$$= \chi_{sr}(\mathbf{X}_i'(t) + \Delta t\mathbf{H}_i\mathbf{V}_i(t + \Delta t),\ \mathbf{X}_j'(t) + \Delta t\mathbf{H}_j\mathbf{V}_j(t + \Delta t)) \approx$$

$$\approx \chi_{sr}(\mathbf{X}_i'(t)),\ \mathbf{X}_j'(t)) + \Delta t\frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_i'}\mathbf{H}_i\mathbf{V}_i(t + \Delta t) +$$

$$+ \Delta t\frac{\partial\chi_{sr}}{\partial\mathbf{X}_j'}\mathbf{H}_j\mathbf{V}_j(t + \Delta t) = \chi_{sr}(t) + \Delta t\dot{\chi}_{sr}(t + \Delta t).$$

Умножая обе части этого выражения на p_{sr}^{χ} и учитывая, что $\chi_{sr}(t) = 0$ и $p_{sr}^{\chi}\chi_{sr}(t + \Delta t) = 0$, получим

$$\dot{\chi}_{sr}(t + \Delta t)p_{sr}^{\chi} = 0. \tag{11}$$

Объединяя (6), (8)—(11), получим задачу с линейными дополнениями для определения $\mathbf{V}_i(t + \Delta t)$, $\mathbf{p}_k^G$ и $\mathbf{p}_s^{\chi}$:

$$\mathbf{V}_i(t + \Delta t) =$$

$$= \mathbf{V}_i(t) + \mathbf{M}_i^{-1}\left(\mathbf{p}_i^e + \sum_{k\in K_i}\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_k^G + \sum_{s\in S_i}\tilde{\mathbf{J}}_{si}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s^{\chi}\right);$$

$$\dot{\mathbf{G}}_k(t + \Delta t) = \mathbf{0}; \tag{12}$$

если $\chi_{sr}(t) = 0$, то $\dot{\chi}_{sr}(t + \Delta t) \geqslant 0$, $p_{sr}^{\chi} \geqslant 0$,

$\dot{\chi}_{sr}(t + \Delta t)p_{sr}^{\chi} = 0$; $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,K}$, $s = \overline{1,S}$, $r = \overline{1,l_s}$.

В силу того что задача (12) не содержит ограничений (3) и (4), дополнительно будем решать задачу стабилизации этих ограничений (под стабилизацией здесь подразумевается стабилизация ОДУ по отношению к инвариантному множеству, заданному ограничениями вида (3) и (4)).

Метод последовательных импульсов

Среди возможных методов решения задачи (12) выделяются два основных: первый состоит в одновременном определении всех неизвестных импульсов при решении задачи (12) целиком, а второй подход состоит в решении более мелких задач при декомпозиции задачи (12). Первый подход подразумевает использование как прямых, так и итерационных методов. Второй подход является итерационным и называется методом последовательных импульсов [7, 11, 12].

Метод последовательных импульсов содержит несколько шагов, некоторые из которых выполняются итерационно.

1. Сначала к телам применяются все известные импульсы $\mathbf{p}_i^e$ от внешних сил. После их применения получим новые скорости тел $\mathbf{V}_i^{(1)}(t + \Delta t)$.

2. Далее применяются импульсы $\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_k^G$ и $\tilde{\mathbf{J}}_{si}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s^{\chi}$ с предыдущего шага моделирования, после чего получим новые скорости тел $\mathbf{V}_i^{(2)}(t + \Delta t)$.

3. Последовательно для каждого шарнира решаются задачи для определения $\Delta\mathbf{p}_k^G$, которые должны обеспечить выполнение ограничений (8), записанных через скорости $\mathbf{V}_i^{(2)}(t + \Delta t)$. Глобальное решение $\mathbf{p}_k^G$ будет суммой всех применяемых импульсов на каждой итерации: $\mathbf{p}_k^G = \sum\Delta\mathbf{p}_k^G$. Далее применяются импульсы $\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{p}_k^G$ для получения новых скоростей тел $\mathbf{V}_i^{(3)}(t + \Delta t)$.

4. Аналогично шагу 3 последовательно для каждого шарнира решаются задачи для определения Δp_{sr}^{χ}, обеспечивающих выполнение условий (9)—(11), записанных через скорости $\mathbf{V}_i^{(3)}(t + \Delta t)$. Далее, применяя полученные импульсы в уравнениях (6), получим новые скорости $\mathbf{V}_i^{(4)}(t + \Delta t)$ и $p_{sr}^{\chi} = \sum\Delta p_{sr}^{\chi} \geqslant 0$.

5. Если критерий окончания итераций выполнен, то для каждого тела получим окончательные ско-

рости $\mathbf{V}_i(t+\Delta t) = \mathbf{V}_i^{(4)}(t+\Delta t)$, иначе $\mathbf{V}_i^{(2)}(t+\Delta t) = \mathbf{V}_i^{(4)}(t+\Delta t)$ и переходим к шагу 3.

Опишем данные шаги более подробно. Первый шаг состоит в вычислении новых значений скоростей $\mathbf{V}_i^{(1)}(t+\Delta t) = \mathbf{V}_i(t) + \mathbf{M}_i^{-1}(t)\mathbf{p}_i^e(t)$ с использованием только импульсов внешних сил. Второй шаг использует свойство временной когерентности, означающее, что состояние механической системы от шага к шагу меняется незначительно. Данное свойство позволяет ускорить сходимость метода последовательных импульсов, если использовать импульсы с предыдущего шага моделирования в качестве начальных приближений в текущем шаге моделирования. Третий шаг состоит в решении задачи для импульсов $\Delta\mathbf{p}_k^G$, которую сформулируем из условий (6) и (8)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_i^{(3)}(t+\Delta t) = \mathbf{V}_i^{(2)}(t+\Delta t) + \mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{p}_k^G;\\
&\mathbf{V}_j^{(3)}(t+\Delta t) = \mathbf{V}_j^{(2)}(t+\Delta t) + \mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{J}_{kj}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{p}_k^G;\\
&\mathbf{p}_k^G = \Sigma\Delta\mathbf{p}_k^G;\\
&\mathbf{J}_{ki}\mathbf{V}_i^{(3)}(t+\Delta t) + \mathbf{J}_{kj}\mathbf{V}_j^{(3)}(t+\Delta t) = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя первые два уравнения в последнее уравнение, получим систему линейных алгебраических уравнений с m_k неизвестными (m_k — число ограничений для k-го шарнира):

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{J}_{ki}\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}} + \mathbf{J}_{kj}\mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{J}_{kj}^{\mathrm{T}})\Delta\mathbf{p}_k^G =\\
&= -\mathbf{J}_{ki}\mathbf{V}_i^{(2)}(t+\Delta t) - \mathbf{J}_{kj}\mathbf{V}_j^{(2)}(t+\Delta t).
\end{aligned} \tag{14}$$

Четвертый шаг метода последовательных импульсов состоит в решении задачи с ограничениями на относительное движение в шарнире. На основе соотношений (6), (9)—(11) будем искать такие импульсы Δp_{sr}^{χ}, для которых должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_i^{(4)}(t+\Delta t) = \mathbf{V}_i^{(3)}(t+\Delta t) + \mathbf{M}_i^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}^{\mathrm{T}}\Delta p_{sr}^{\chi};\\
&\mathbf{V}_j^{(4)}(t+\Delta t) = \mathbf{V}_j^{(3)}(t+\Delta t) + \mathbf{M}_j^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}^{\mathrm{T}}\Delta p_{sr}^{\chi};\\
&\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{(4)}(t+\Delta t) + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{(4)}(t+\Delta t) \geqslant 0;\\
&p_{sr}^{\chi} = \Sigma\Delta p_{sr}^{\chi} \geqslant 0;\\
&(\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{(4)}(t+\Delta t) + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{(4)}(t+\Delta t))p_{sr}^{\chi} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставим первые два уравнения из (15) в последнее уравнение. Будем искать такой импульс Δp_{sr}^{χ}, для которого выражение в скобках в последнем уравнении (15) будет равно нулю. Тогда получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{M}_i^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{M}_j^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}^{\mathrm{T}})\Delta p_{sr}^{\chi} =\\
&= -\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{(3)}(t+\Delta t) - \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{(3)}(t+\Delta t).
\end{aligned} \tag{16}$$

Величина $m_{eff}^{-1} = \tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{M}_i^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{M}_j^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}^{\mathrm{T}}$ в уравнении (16) положительна, так как матрицы масс $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{M}_j$, симметричные и положительно определенные (каждая матрица масс содержит массу, умноженную на единичную матрицу, и симметричную положительно определенную матрицу тензора инерции). Если при добавлении к глобальному решению p_{sr}^{χ} (полученному с предыдущих итераций) решения $\Delta p_{sr}^{\chi(1)} = \Delta p_{sr}^{\chi}$ импульс $p_{sr}^{\chi} + \Delta p_{sr}^{\chi(1)} \geqslant 0$, то все условия в (15) будут выполнены.

Если же окажется, что $p_{sr}^{\chi} + \Delta p_{sr}^{\chi(1)} < 0$, то заменим Δp_{sr}^{χ} на $\Delta p_{sr}^{\chi} = \Delta p_{sr}^{\chi(2)} = -p_{sr}^{\chi}$. Тогда получим $p_{sr}^{\chi} + \Delta p_{sr}^{\chi(2)} = 0$, и последние два условия в формуле (15) будут выполнены. Покажем, что после применения импульса $\Delta p_{sr}^{\chi(2)}$ будет выполняться и третье условие в (15). Из условий $p_{sr}^{\chi} + \Delta p_{sr}^{\chi(2)} = 0$ и $p_{sr}^{\chi} + \Delta p_{sr}^{\chi(1)} < 0$ следует, что $\Delta p_{sr}^{\chi(1)} < -p_{sr}^{\chi} = \Delta p_{sr}^{\chi(2)}$. После применения измененного импульса $\Delta p_{sr}^{\chi(2)} > \Delta p_{sr}^{\chi(1)}$ на основе первых двух уравнений в (15) и того, что $\Delta p_{sr}^{\chi(1)}$ является решением (16), имеем

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{(4)}(t+\Delta t) + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{(4)}(t+\Delta t) =\\
&= \tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{(3)}(t+\Delta t) + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{(3)}(t+\Delta t) + m_{eff}^{-1}\Delta p_{sr}^{\chi(2)} >\\
&> \tilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{(3)}(t+\Delta t) + \tilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{(3)}(t+\Delta t) + m_{eff}^{-1}\Delta p_{sr}^{\chi(1)} = 0.
\end{aligned}$$

Последний шаг метода последовательных импульсов состоит в проверке критерия окончания итераций. В качестве критерия окончания итераций может быть выбран критерий малости применяемых импульсов для заданной точности ε:

$$\|\Delta\mathbf{p}_k^G\| < \varepsilon,\ |\Delta p_{sr}^{\chi}| < \varepsilon,\ k = \overline{1,K},\ s = \overline{1,S},\ r = \overline{1,l_s}. \tag{17}$$

В силу того что задачи (13) и (15) не содержат ограничений (3) и (4), в процессе моделирования эти ограничения могут нарушаться. Задача восстановления ограничений (3) и (4) называется *задачей стабилизации*. Одним из методов стабилизации яв-

ляется метод на основе раздельных импульсов. Этот метод является модификацией метода Баумгарте [13, 14] и позволяет моделировать систему многих тел с соблюдением законов динамики (без изменения механической энергии системы). В данном методе для каждого тела вводятся два типа скоростей: обычные $\mathbf{V}_i$ и *псевдоскорости* $\mathbf{V}_i^*$, при этом дополнительно для псевдоскоростей решаются задачи, аналогичные (13) и (15), уже в терминах псевдоимпульсов. Различие между импульсами и псевдоимпульсами будет состоять в том, что вместо первых двух шагов (применение внешних сил и использование свойства временной когерентности) будет проводиться обнуление (инициализация) псевдоскоростей для всех тел, т. е. $\mathbf{V}_i^{*(2)}(t+\Delta t)=\mathbf{0}$. В качестве начального приближения для псевдоимпульсов используются нулевые псевдоимпульсы, т. е. $\mathbf{p}_k^{*G}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{p}_s^{*\chi}=\mathbf{0}$.

При составлении задач на псевдоимпульсы меняются условия (8), (9) и (11) следующим образом:

$$\mathbf{J}_{ki}\mathbf{V}_i^*(t+\Delta t)+\mathbf{J}_{kj}\mathbf{V}_j^*(t+\Delta t)+ERP\cdot\mathbf{G}_k(t)=\mathbf{0};$$

$$\chi_{sr}(t)<0:\ \widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^*(t+\Delta t)+$$
$$+\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^*(t+\Delta t)+ERP\cdot\chi_{sr}(t)\geqslant 0;$$

$$(\widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^*(t+\Delta t)+\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^*(t+\Delta t)+$$
$$+ERP\cdot\chi_{sr}(t))p_{sr}^{*\chi}=0,$$

где $0\leqslant ERP\leqslant 1$ — параметр уменьшения ошибки.

Для стабилизации ограничений (3) задача (13) в терминах псевдоимпульсов $\Delta\mathbf{p}_k^{*G}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_i^{*(3)}(t+\Delta t)=\mathbf{V}_i^{*(2)}(t+\Delta t)+\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{p}_k^{*G};\\
&\mathbf{V}_j^{*(3)}(t+\Delta t)=\mathbf{V}_j^{*(2)}(t+\Delta t)+\mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{J}_{kj}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{p}_k^{*G};\\
&\mathbf{p}_k^{*G}=\sum\Delta\mathbf{p}_k^{*G};\\
&\mathbf{J}_{ki}\mathbf{V}_i^{*(3)}(t+\Delta t)+\mathbf{J}_{kj}\mathbf{V}_j^{*(3)}(t+\Delta t)+ERP\cdot\mathbf{G}_k(t)=\mathbf{0}.
\end{aligned}\tag{18}$$

Подставляя первые два уравнения из (18) в последнее уравнение, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $\Delta\mathbf{p}_k^{*G}$:

$$(\mathbf{J}_{ki}\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}+\mathbf{J}_{kj}\mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{J}_{kj}^{\mathrm{T}})\Delta\mathbf{p}_k^{*G}=$$
$$=-\mathbf{J}_{ki}\mathbf{V}_i^{*(2)}(t+\Delta t)-\mathbf{J}_{kj}\mathbf{V}_j^{*(2)}(t+\Delta t)-ERP\cdot\mathbf{G}_k(t).$$

Для стабилизации ограничений (4) задача (15) в терминах псевдоимпульсов $\Delta p_{sr}^{*\chi}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_i^{*(4)}(t+\Delta t)=\mathbf{V}_i^{*(3)}(t+\Delta t)+\mathbf{M}_i^{-1}\widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}^{\mathrm{T}}\Delta p_{sr}^{*\chi};\\
&\mathbf{V}_j^{*(4)}(t+\Delta t)=\mathbf{V}_j^{*(3)}(t+\Delta t)+\mathbf{M}_j^{-1}\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}^{\mathrm{T}}\Delta p_{sr}^{*\chi};\\
&\widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{*(4)}(t+\Delta t)+\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{*(4)}(t+\Delta t)+\\
&+ERP\cdot\chi_{sr}(t)\geqslant 0;\\
&p_{sr}^{*\chi}=\sum\Delta p_{sr}^{*\chi}\geqslant 0;\\
&(\widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{*(4)}(t+\Delta t)+\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{*(4)}(t+\Delta t)+\\
&+ERP\cdot\chi_{sr}(t))p_{sr}^{*\chi}=0.
\end{aligned}\tag{19}$$

Неизвестные псевдоимпульсы $\Delta p_{sr}^{*\chi}$ вычисляются так же, как и импульсы Δp_{sr}^{χ}, а необходимые уравнения можно получить, если подставить первые два уравнения в (19) в последнее уравнение

$$(\widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{M}_i^{-1}\widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}^{\mathrm{T}}+\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{M}_j^{-1}\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}^{\mathrm{T}})\Delta p_{sr}^{*\chi}=$$
$$=-\widetilde{\mathbf{J}}_{si,r}\mathbf{V}_i^{*(3)}(t+\Delta t)-\widetilde{\mathbf{J}}_{sj,r}\mathbf{V}_j^{*(3)}(t+\Delta t)-ERP\cdot\chi_{sr}(t).$$

Алгоритмическая часть метода последовательных импульсов на каждом шаге моделирования состоит в следующем.

1. Цикл по всем телам:
   вычисляем скорости тела после применения внешних сил.

   Конец цикла.
2. Цикл по всем шарнирам:
   вычисляем скорости тел после применения импульсов $\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_k^G$ и $\mathbf{J}_{si}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s^{\chi}$. Конец цикла.
3. Цикл по итерациям:
   цикл по всем шарнирам:
   вычисляем из (14) величины импульсов $\Delta\mathbf{p}_k^G$.

   Вычисляем из (13) новые скорости тел после применения импульсов $\mathbf{J}_{ki}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{p}_k^G$.

   Вычисляем накопленные импульсы $\mathbf{p}_k^G=\mathbf{p}_k^G+\Delta\mathbf{p}_k^G$.

   Вычисляем из (16) величины импульсов $\Delta\mathbf{p}_s^{\chi}$.

   Вычисляем из (15) новые скорости после применения импульсов $\widetilde{\mathbf{J}}_{si}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{p}_s^{\chi}$.

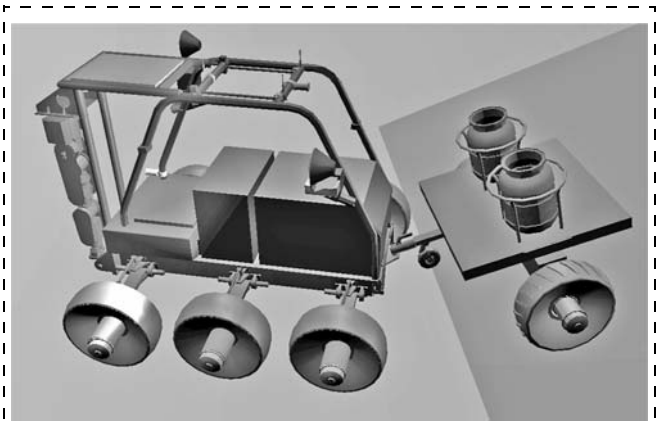
   Вычисляем накопленные импульсы $\mathbf{p}_s^{\chi}=\mathbf{p}_s^{\chi}+\Delta\mathbf{p}_s^{\chi}$.

   Конец цикла.

   Если выполнено (17), то завершаем итерации.
4. Цикл по итерациям аналогично п. 3, но для псевдоимпульсов и псевдоскоростей.
5. Цикл по всем телам:
   обновляем положение и ориентацию тела на основе скоростей и псевдоскоростей.

   Обнуляем псевдоскорости тела.

   Конец цикла.



Робот с тележкой (КРТ100-МП)

На основе предложенных в данной работе методов разработано алгоритмическое и программное обеспечение, реализованное в программных модулях на языке C++. Эти модули внедрены в систему динамики, являющуюся составной частью имитационно-тренажерного комплекса управления сложными процессами, созданную в НИИСИ РАН. Данный программный комплекс реализует базовые возможности динамики твердых тел, включая движение твердых тел, моделирование колес и гусениц, обработку столкновений (коллизий) между телами и динамику электродвигателей постоянного тока, а также обеспечивает моделирование большинства физических процессов (трение между телами при контакте, трение колеса с поверхностью, удар двух тел и т. д.). Разработанные технологии позволяют моделировать широкий класс колесных и гусеничных роботов, которыми управляет оператор с помощью пультов управления во время тренировки. Элементы роботов или других динамических объектов могут быть соединены с помощью шарниров, которые также могут быть оснащены электрическими двигателями, что позволяет управлять параметрами относительного движения. Комплексная апробация описанных методов и алгоритмов на многих моделях показала полную их адекватность требованиям систем виртуального окружения.

На рисунке показана модель робота с тележкой КРТ100-МП, которым управляет оператор во время тренировки в имитационно-тренажерном комплексе. Тележка соединяется с роботом с помощью сферического шарнира с ограничениями. Это означает, что при поворотах робота или наезде на горку тележка располагается под некоторыми углами к роботу, значения которых не могут превышать 18° для осей X и Z и 15° для оси Y.

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 13-07-00708.

Заключение

Применение метода последовательных импульсов с использованием свойства временной когерентности позволяет достаточно эффективно моделировать системы многих тел с шарнирами, для которых заданы ограничения на относительное движение. Метод раздельных импульсов для стабилизации ограничений обеспечивает приемлемую точность моделирования, необходимую для задач визуализации и виртуальной реальности, т. е. ограничения (3) и (4) в процессе моделирования не нарушаются больше, чем нужно для визуального восприятия. Стабилизация с использованием псевдоимпульсов обеспечивает устойчивое моделирование с соблюдением требуемых законов сохранения энергии и импульса. Предложенные методы могут быть использованы в виртуальных лабораториях, имитационных комплексах, системах моделирования динамики сложных объектов и т. д.

Список литературы

1. **Bender J., Schmitt A.** Fast dynamic simulation of multi-body systems using impulses. In Virtual Reality Interactions and Physical Simulations // VRIPhys. 2006, November. P. 81—90.
2. **Baraff D.** Linear-Time Dynamics using Lagrange Multipliers, In SIG-GRAPH '96: Proceeding of the 23rd annual conference on Computer Graphics and interactive techniques // ACM Press. 1996. P. 137—146.
3. **Garstenauer H.** A Unified Framework for Rigid Body Dynamics. Master's thesis. Linz: Johannes Kepler Universitat, 2006.
4. **Kenny Erleben.** Stable, robust, and versatile multibody dynamics animation, PhD thesis. University of Copenhagen, 2004.
5. **Grassia F. S.** Practical Parametrization of Rotations using Exponential Map // Journal of Graphics Tools. Vol. 3 (3). P. 29—48, 1998.
6. **Baerlocher P., Boulic R.** Parametrization and range of motion of the ball-and-socket joint // Proc. of AVATARS'2000 Conference, Lausanne. 2000. P. 180—190.
7. **Михайлюк М. В., Страшнов Е. В.** Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов // Труды НИИСИ РАН. 2014. Т. 4, № 2. С. 52—60.
8. **Baraff D.** An Introduction to Physically Based Modelling: Rigid Body Simulation II: Nonpenetrations Constraints. URL: http: // www.cs.cmu.edu/~baraff/pbm/pbm.html, [2015-27-01].
9. **Shabana A. A.** Computational Dynamics.Third edition. John Wiley & Sons Inc., 2010.
10. **Валле-Пуссен Ш.-Ж.** Лекции по теоретической механике. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948—1949.
11. **Catto E.** Iterative dynamics with temporal coherence // Game Developer Conference. 2005. P. 1—24.
12. **Catto E.** Modelling and solving constraints // Game Developers conference. 2009.
13. **Baumgarte J.** Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Computer methods in applied mechanics and engineering. 1972. Vol. 1 (1). P. 1—16.
14. **Cline M. B., Pai D. K.** Post-stabilization for rigid body simulation with contact and constraints // Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robotics and Autom., 2003.

Simulation of Restrictions for the Relative Motion of the Articulated Rigid Bodies in the Virtual Environment Systems

E. V. Strashnov, strashnov_evg@mail.ru, **M. V. Michaylyuk,** mix@niisi.ras.ru✉,
Scientific Research Institute for System Analysis, RAS, Moscow, 117218, Russian Federation

Corresponding author: **Michaylyuk Mikhail V.,** D. Sc., Professor,
Head of Department, Scientific Research Institute for System Analysis, RAS,
Moscow, 117218, Russian Federation, e-mail: mix@niisi.ras.ru

Received on @@@, 2015
Accepted on @@@, 2015

The topic of this paper is a real-time simulation of the dynamics of a system of articulated rigid bodies with restrictions on their relative motion. Restrictions are set in the form of inequalities for the relative angles of rotation (for the rotational joints) or relative displacement (for the prismatic joints) of links. Examples of such systems are robots and manipulators, mobile vehicles with trailers, hinged doors, etc. This problem can be presented as a system of linear algebraic equations with linear complements. As a solution for this system the authors propose the method of sequential impulses utilizing a temporal coherence property, which means that the state of a multi-body system (their coordinates) varies slightly for a small period of time. The semi-implicit Euler method is used as the difference scheme. Since the problem presented in the form of a system of linear equations with linear complements is solved relative to velocities, it is necessary to ensure achievement of constraints relative to the body coordinates (task of constraint stabilization). For such a stabilization the authors propose to use the method of split impulses, which ensures stability of the dynamics simulation for a multi-body system. In this paper the authors consider methods used both for the open and closed kinematic chains. The proposed methods and algorithms are implemented in the program modules in the form of dynamic libraries for Windows OS. Their approbation was carried out in the subsystem of dynamics simulation performing simulation of the robots containing joints with restrictions on the parameters of the relative motion. Studies have shown that the proposed methods and algorithms meet the requirements for the dynamics simulation subsystems of the simulators for control of complex dynamic processes, and virtual environment systems. Such technologies can also be used in virtual labs, simulation complexes, systems of augmented virtual environment and other applications.

Keywords: *multibody system, joints, constraints, parameters of relative motion, constraints reaction, semi-implicit Euler method, linear complements, temporal coherence, stabilization of constraints, pseudo impulses*

Acknowledgements: This work was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project no. 13-07-00708.

For citation:

Strashnov E. V., Michaylyuk M. V. Simulation of Restrictions for the Relative Motion of the Articulated Rigid Bodies in the Virtual Environment Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 10, pp. 678—685.

DOI: 10.17587/mau.16.678-685

References

1. **Bender J., Schmitt A.** Fast dynamic simulation of multi-body systems using impulses. In Virtual Reality Interactions and Physical Simulations, *VRIPhys*, 2006, November, pp. 81—90.
2. **Baraff D.** Linear-Time Dynamics using Lagrange Multipliers, In SIG-GRAPH '96: Proceeding of the 23 rd annual conference on Computer Graphics and interactive techniques, *ACM Press*, 1996, pp. 137—146.
3. **Garstenauer H.** A Unified Framework for Rigid Body Dynamics. Master's thesis, Linz, Johannes Kepler Universitat, 2006.
4. **Erleben K.** Stable, robust, and versatile multibody dynamics animation, PhD thesis, University of Copenhagen, 2004.
5. **Grassia F. S.** Practical Parametrization of Rotations using Exponential Map, *Journal of Graphics Tools*, 1998, vol. 3 (3), pp. 29—48.
6. **Baerlocher P., Boulic R.** Parametrization and range of motion of the ball-and-socket joint, *Proc. of AVATARS'2000 Conference*, Lausanne, 2000, pp. 180—190.
7. **Mikhailyuk M. V., Strashnov E. V.** *Modelirovanie sistemy svyazannykh tel metodom posledovatel'nykh impul'sov* (Simulation of related bodies by successive pulses), *Trudy NIISI RAN*, 2014, vol. 4, no. 2, pp. 52—60 (in Russian).
8. **Baraff D.** An Introduction to Physically Based Modelling: Rigid Body Simulation II: Nonpenetrations Constraints, available at: www.cs.cmu.edu/~baraff/pbm/pbm.html [2015-27-01].
9. **Shabana A. A.** Computational Dynamics. Third edition, John Wiley & Sons Inc., 2010.
10. **Valle-Pussen Sh.-Zh.** *Lektsii po teoreticheskoi mekhanike* (Lectures on theoretical mechanics), Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1948—1949 (in Russian).
11. **Catto E.** Iterative dynamics with temporal coherence, *Game Developer Conference*, 2005, pp. 1—24.
12. **Catto E.** Modelling and solving constraints, *Game Developers conference*, 2009.
13. **Baumgarte J.** Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, vol. 1 (1), pp. 1—16.
14. **Cline M. B., Pai D. K.** Post-stabilization for rigid body simulation with contact and constraints, *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robotics and Autom.*, 2003.