

В. А. Коваль, д-р техн. наук, проф., koval.va@yandex.ru,

М. Ф. Степанов, д-р техн. наук, доц., mfstepanov@mail.ru,

О. Ю. Торгашова, д-р техн. наук, доц., olgatorg@gmail.com, А. А. Самарский, sanches_93.93@mail.ru,

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

Анализ и синтез пространственно многомерных распределенных систем с дескрипторной структурой математической модели

На основе спектрального метода анализа распределенных систем разработаны теоретические положения для перехода от исходной математической модели пространственно многомерного распределенного объекта управления в форме дифференциальных уравнений с частными производными к дескрипторной модели, что дает возможность осуществить анализ объекта управления и синтез регулятора с применением известных методов, разработанных для сосредоточенных систем. Исследованы вопросы существования, единственности и сходимости полученных решений.

Ключевые слова: распределенная дескрипторная система, спектральный метод, анализ, синтез, сходимость

Введение

В настоящее время можно выделить достаточно широкий круг пространственно распределенных объектов управления, в которых исследуемые процессы описываются совокупностью систем дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, систем алгебраических уравнений и уравнений, содержащих только дифференциальный пространственный оператор и связанных с остальными уравнениями системы через граничные условия или переменные, описывающие состояние системы.

Таковыми объектами являются устройства, обеспечивающие течение газа в процессе каталитического горения в химических реакторах; сверхпроводящие устройства, используемые для аккумуляции энергии магнитного поля; теплообменные аппараты; установки имитационного моделирования, где объединены реальные устройства и модель; длинные линии передачи сигналов, работающие на высокой частоте и т. д.

Согласно работе [1], такая система может быть рассмотрена как система дифференциально-алгебраических уравнений с матричными коэффициентами, содержащими операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Используемый метод преобразования основывается на понятии индекса системы обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений, которое в случае нормально разрешимых операторов, входящих в состав матричных операторных коэффициентов, расширяется на класс абстрактных дифференциально-алгебраических систем.

Понятию индекса дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными посвящена работа [2], где показано, что дифференциально-алгебраические уравнения часто появляются при дискретизации дифференциальных уравнений

с частными производными. По индексу исходной системы дифференциальных уравнений с частными производными можно сделать вывод о свойствах получаемой дифференциально-алгебраической системы уравнений.

Изучению связанных систем дифференциально-алгебраических уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными посвящена работа [3], где для численного решения используется метод Галеркина.

В статье [4] уравнения длинной линии с частными производными сводятся к обобщенному дифференциально-алгебраическому уравнению, матричные коэффициенты которого содержат операторы, действующие в гильбертовом пространстве бесконечной размерности.

Анализ известных работ показал, что решение систем дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными на заключительном этапе осуществляется с применением численных методов, что существенно осложняет процедуру синтеза регуляторов для рассматриваемых объектов.

В данной работе используется спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем, учитывающий пространственно распределенную природу объекта и обеспечивающий высокий уровень формализации решения. Спектральная форма представления математической модели распределенного объекта управления [5] предполагает переход от дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных или дифференциально-алгебраических уравнений, т. е. к спектральному представлению. Спектральное представление дает возможность осуществить анализ объекта и синтезировать регулятор с применением методов пространства состояний, разработанных для сосредоточенных систем.

В работе ставятся следующие задачи: получение дескрипторного спектрального представления математической модели пространственно многомерного распределенного объекта управления — плазменного шнура в магнитном поле установки токамак [6], описываемого дифференциальными уравнениями с частными производными по пространству и времени и дифференциальным уравнением, содержащими только пространственный оператор; вычисление аналитически полученных операционных матриц преобразования математической модели; исследование существования, единственности и сходимости решений полученных систем; синтез системы стабилизации.

Исходная математическая модель объекта управления

Для токамака существует область параметров плазмы, в которой возможно ее длительное устойчивое существование. Большинство макроскопических явлений, приводящих к потере удержания плазмы в токамаке, описываются моделью гидродинамики невесомой потенциальной идеально проводящей жидкости [6], которая в невозмущенном состоянии имеет слабо тороидальную конфигурацию (рис. 1) радиуса R_1 с поверхностью S . Эта жидкость удерживается внутри объема τ_S давлением, оказываемым внешним магнитным полем, которое может быть создано с помощью управляющей оболочки. Управление движением жидкости будем осуществлять, создавая распределенное давление на поверхности S .

Будем полагать, что $R \gg R_1$. Это означает, что соотношение R/R_1 настолько велико, что эффектом искривления оси шнура можно пренебречь.

Граничные условия, выполняемые на возмущенной поверхности S' , перенесем на невозмущенную поверхность S . Поскольку возмущенное движение по предположению мало отличается от невозмущенного, пренебрежем нелинейными членами в уравнениях движения.

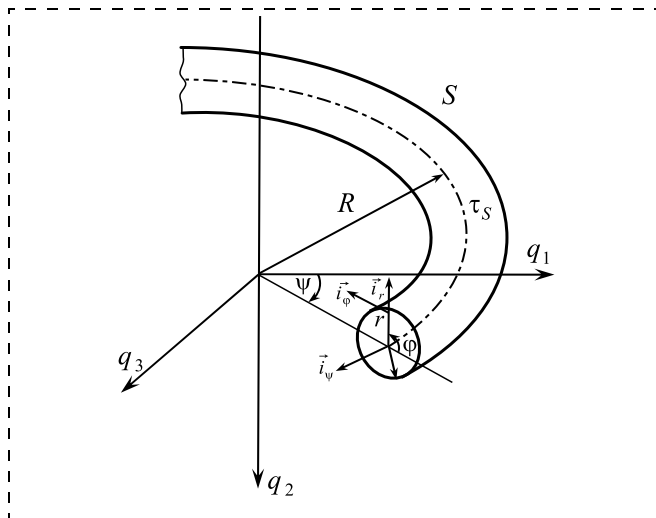


Рис. 1. Схема взаимного расположения систем координат объекта тороидальной конфигурации

Линеаризованная математическая модель объекта управления в отклонениях может быть представлена в цилиндрической системе координат в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_1(z, t)}{\partial t} &= \chi_2(z, t); \\ \frac{\partial \chi_2(z, t)}{\partial t} &= \left. \frac{\partial \Phi(r, z, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z, t)}{\partial z^2} = 0;$$

$$t \in (0, \infty), r \in (0, R_1), z \in (0, L),$$

где t — время, с; z, r — пространственные переменные, м; L — длина оси тора, м; R_1 — радиус тора, м; $\chi_1(z, t)$ — отклонение возмущенной поверхности, м; $\chi_2(z, t)$ — скорость отклонения возмущенной поверхности, м/с; $\Phi(r, z, t)$ — потенциал ускорений, м/с².

Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_1(z, 0) &= \chi_2(z, 0) = \Phi(r, z, 0) = 0; \\ r &\in [0, R_1], z \in [0, L]. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \Phi(r, 0, t) &= \Phi(r, L, t), \\ \Phi(R_1, z, t) &= \Phi_{R_1}(z, t), t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

где потенциал ускорений на границе $\Phi_{R_1}(z, t)$, зависящий от давления на поверхности S , будем считать для простоты управляющим воздействием.

Требуется решить задачу стабилизации системы (1)–(3).

Математическая модель (1)–(3) может быть представлена в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1(\xi, \tau)}{\partial \tau} &= k_1 \zeta_2(\xi, \tau), \quad \frac{\partial \zeta_2(\xi, \tau)}{\partial \tau} = k_2 \left. \frac{\partial \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1}, \\ 0 &= k_3 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \rho^2} \right] + k_4 \frac{\partial^2 \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau \in (0, \infty), \rho \in (0, 1), \xi \in (0, 1),$$

где $\zeta_1 = \chi_1/X_1^*$, $\zeta_2 = \chi_2/X_2^*$, $\phi = \Phi/\Phi^*$, $\tau = t/t^*$, $\rho = r/R_1$, $\xi = z/L$ — безразмерные переменные, X_1^* , X_2^* , Φ^* , t^* — номинальные значения соответствующих переменных, $k_1 = X_2^* t^*/X_1^*$, $k_2 = \Phi^* t^*/X_2^* R_1$, $k_3 = \Phi^*/R_1^2$, $k_4 = \Phi^*/L^2$ — безразмерные коэффициенты.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\xi, 0) &= \zeta_2(\xi, 0) = \phi(\rho, \xi, 0) = 0, \\ \rho &\in [0, 1], \xi \in [0, 1], \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \phi(\rho, 0, \tau) &= \phi(\rho, 1, \tau), \quad \phi(1, \xi, \tau) = \phi_1(\xi, \tau), \\ \tau &\in [0, \infty), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\phi_1 = \Phi_{R_1}/\Phi^*$ — безразмерное управляющее воздействие.

Описание объекта управления в спектральной форме

Получим спектральное представление объекта управления (4)–(6). Для этого представим функции $\zeta_1(\xi, \tau)$, $\zeta_2(\xi, \tau)$, $\phi(\rho, \xi, \tau)$, в виде рядов Фурье по пространственным координатам ξ, ρ .

По переменной ρ будем использовать разложение в ряд Фурье—Бесселя по системе функций Бесселя нулевого порядка $B_0(\alpha_{h_1} \rho)$, $h_1 = \overline{1, \infty}$, ортонормированных с весом ρ :

$$\int_0^1 \rho B_0(\alpha_{h_1} \rho) B_0(\alpha_{\bar{h}_1} \rho) d\rho = \begin{cases} 0, & h_1 \neq \bar{h}_1; \\ 1, & h_1 = \bar{h}_1; \end{cases}$$

$$h_1, \bar{h}_1 = \overline{1, \infty},$$

где $B_0(\alpha_{h_1} \rho) = M_{0h_1} J_0(\alpha_{h_1} \rho)$, $h_1 = \overline{1, \infty}$; α_{h_1} — корни функции $\partial B_0(\alpha \rho) / \partial \rho|_{\rho=1}$, M_{0h_1} — нормирующий множитель, который определяется выражением

$$M_{0h_1} = \left(\int_0^1 \rho J_0^2(\alpha_{h_1} \rho) d\rho \right)^{1/2}, \quad h_1 = \overline{1, \infty}.$$

По переменной ξ будем использовать разложение в ряд Фурье по системе ортонормированных функций $P(h_2, \xi) = \sqrt{2} \{ \sinh_2 \pi \xi \}$, $h_2 = \overline{1, \infty}$.

Функции $\zeta_1(\xi, \tau)$, $\zeta_2(\xi, \tau)$, $\phi(\rho, \xi, \tau)$ можно представить в виде рядов

$$\zeta_1(\xi, \tau) = \sum_{h_2=1}^{n_2} \Phi_{\zeta_1}(h_2, \tau) P(h_2, \xi);$$

$$\zeta_2(\xi, \tau) = \sum_{h_2=1}^{n_2} \Phi_{\zeta_2}(h_2, \tau) P(h_2, \xi);$$

$$\phi(\rho, \xi, \tau) = \sum_{h_1=1}^{n_1} \sum_{h_2=1}^{n_2} \Phi_{\phi}(h_1, h_2, \tau) B_0(\alpha_{h_1} \rho) P(h_2, \xi),$$

$$n_1, n_2 = \overline{1, \infty}, \quad (7)$$

где коэффициенты ряда зависят от времени и определяются выражениями

$$\Phi_{\zeta_1}(h_2, \tau) = \int_0^1 \zeta_1(\xi, \tau) P(h_2, \xi) d\xi;$$

$$\Phi_{\zeta_2}(h_2, \tau) = \int_0^1 \zeta_2(\xi, \tau) P(h_2, \xi) d\xi;$$

$$\Phi_{\phi}(h_1, h_2, \tau) = \int_0^1 \int_0^1 \rho \phi(\rho, \xi, \tau) B_0(\alpha_{h_1} \rho) P(h_2, \xi) d\xi d\rho,$$

$$h_1 = \overline{1, n_1}, \quad h_2 = \overline{1, n_2}, \quad n_1, n_2 = \overline{1, \infty}.$$

Векторы $\Phi_{\zeta_1}(\tau)$, $\Phi_{\zeta_2}(\tau) \in R^{n_2}$, $\Phi_{\phi}(\tau) \in R^{n_1 n_2}$, $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$, составленные из амплитуд пространственных мод, согласно работам [5, 7], будем на-

зывать спектральными характеристиками соответствующих функций:

$$\begin{aligned} \Phi_{\zeta_1}(\tau) &= \text{colon}\{\Phi_{\zeta_1}(1, \tau), \Phi_{\zeta_1}(2, \tau), \dots\}; \\ \Phi_{\zeta_2}(\tau) &= \text{colon}\{\Phi_{\zeta_2}(1, \tau), \Phi_{\zeta_2}(2, \tau), \dots\}; \\ \Phi_{\phi}(\tau) &= \text{colon}\{\Phi_{\phi}(1, 1, \tau), \Phi_{\phi}(1, 2, \tau), \dots, \\ &\quad \Phi_{\phi}(2, 1, \tau), \Phi_{\phi}(2, 2, \tau), \dots\}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом изложенных в работах [5, 7] положений спектрального метода получим спектральное представление объекта управления (4)–(6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\zeta_1}(\tau)}{\partial \tau} &= k_1 \Phi_{\zeta_2}(\tau); \\ \frac{\partial \Phi_{\zeta_2}(\tau)}{\partial \tau} &= k_2 P_{\phi}^1 [P_1^0 \otimes I_{n_2}] \Phi_{\phi} - \\ &\quad - k_2 P_{\phi}^1 [H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] \Phi_1^0(\tau); \\ 0 &= \{k_3([P_2^0 \otimes I_{n_2}] + [P_{1/\rho}^1 \otimes I_{n_2}][P_1^0 \otimes I_{n_2}]) + \\ &\quad + k_4[I_{n_1} \otimes P_2^{\xi}]\} \Phi_{\phi}(\tau) + k_3\{[H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] + \\ &\quad + [P_{1/\rho} \otimes I_{n_2}][B_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}]\} \Phi_1^0(\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\otimes$ — символ тензорного произведения матриц; I — единичная матрица соответствующей размерности.

В выражение (9) входят векторы спектральных характеристик (8), а также вектор спектральной характеристики функции граничных условий $\phi_1(\xi, \tau)$, представленной в виде ряда Фурье по системе ортонормированных функций $P(h_2, \xi) = \sqrt{2} \{ \sinh_2 \pi \xi \}$, $h_2 = \overline{1, \infty}$: $\Phi_1^0(\tau) = \text{colon}\{\Phi_1^0(1, \tau), \Phi_1^0(2, \tau), \dots\}$, $\Phi_1^0(\tau) \in R^{n_2}$, $n_2 = \overline{1, \infty}$.

Также в выражении (9) присутствует операционная матрица сомножителя $1/\rho$, элементы которой определяются по выражению

$$P_{1/\rho}(\bar{h}_1, h_1) = \int_0^1 B_0(\alpha_{\bar{h}_1} \rho) B_0(\alpha_{h_1} \rho) d\rho,$$

$$\bar{h}_1, h_1 = \overline{1, n_1}, \quad n_1 = \overline{1, \infty}, \quad (10)$$

операционные матрицы дифференцирования i -го порядка по переменным ρ и ξ , элементы которых определяются согласно работе [10] в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} P_i^{\rho}(\bar{h}_1, h_1) &= \int_0^1 \rho B_0(\alpha_{\bar{h}_1} \rho) \frac{\partial^i B_0(\alpha_{h_1} \rho)}{\partial \rho^i} d\rho; \\ P_i^{\xi}(\bar{h}_2, h_2) &= \int_0^1 P(\bar{h}_2, \xi) \frac{\partial^i P(h_2, \xi)}{\partial \xi^i} d\xi, \\ \bar{h}_1, h_1 &= \overline{1, n_1}, \quad \bar{h}_2, h_2 = \overline{1, n_2}, \quad n_1, n_2 = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \quad (11)$$

и векторы $H_0(\rho)|_{\rho=1}$, $B_0(\rho)|_{\rho=1} \in R^{n_1}$, $n_1 = \overline{1, \infty}$:

$$H_0(\rho)|_{\rho=1} = \text{colon} \left\{ -\frac{\partial B_0(\alpha_1 \rho)}{\partial \rho} - \frac{B_0(\alpha_1 \rho)}{\rho} \Big|_{\rho=1}, \right. \\ \left. -\frac{\partial B_0(\alpha_2 \rho)}{\partial \rho} - \frac{B_0(\alpha_2 \rho)}{\rho} \Big|_{\rho=1}, \dots \right\},$$

$$B_0(\rho)|_{\rho=1} = \text{colon}\{B_0(\alpha_1 \rho)|_{\rho=1}, B_0(\alpha_2 \rho)|_{\rho=1}, \dots\}, \quad (12)$$

позволяющие аддитивно ввести в уравнения объекта спектральные характеристики граничных условий.

Введем обозначения вектора состояний $x(\tau)$, объединяющего векторы $\Phi_\phi \in R^{n_1 n_2}$, $\Phi_{\zeta_1} \in R^{n_2}$, $\Phi_{\zeta_2} \in R^{n_2}$, $(n_1, n_2 = \overline{1, \infty})$, и вектора управлений $u(\tau)$:

$$x(\tau) = \text{colon}\{\Phi_{\zeta_1}(\tau), \Phi_{\zeta_2}(\tau), \Phi_\phi(\tau)\}; \\ u(\tau) = \Phi_1^0(\tau). \quad (13)$$

Учтем в соотношениях (9) внешнее возмущение, полагая, что имеют место точечные возмущения потенциала ускорений, энергия которых ограничена:

$$\phi_w(\rho, \xi, \tau) = \phi_w^* \frac{\delta(\rho - \rho_w)}{\rho} \delta(\xi - \xi_w) e^{-\alpha \tau}, \\ \rho_w \in (0, 1), \xi_w \in (0, 1), \quad (14)$$

где ϕ_w^* — безразмерная амплитуда возмущения, которую будем считать достаточно малой; (ρ_w, ξ_w) — пространственные координаты точки, в которой возникает возмущение; α — безразмерный коэффициент.

Найдем спектральную характеристику функции возмущения $\phi_w(\rho, \xi, \tau)$:

$$S_{\rho\xi}[\phi_w(\rho, \xi, \tau)] = \\ = \int_0^1 \int_0^1 \rho \phi_w^* \frac{\delta(\rho - \rho_w)}{\rho} \delta(\xi - \xi_w) e^{-\alpha \tau} B_0(\alpha_{h_1} \rho) P(h_2, \xi) d\xi d\rho = \\ = \phi_w^* e^{-\alpha \tau} B_0(\alpha_{h_1} \rho_w) P(h_2, \xi_w), \quad h_1, h_2 = \overline{1, \infty}. \quad (15)$$

На основании выражения (15) возмущение $\phi_w(\rho, \xi, \tau)$ можно представить как произведение матрицы $G = \text{colon}\{0, 0, I_{n_1 n_2}\}$ и вектора $w(\tau)$, i -я компонента которого определяется выражением (15). Номер компоненты i определяется индексами $h_1, h_2 = \overline{1, \infty}$ и вычисляется по выражению $i = (h_1 - 1)n_2 + h_2$, $n_2 = \overline{1, \infty}$.

Учитывая обозначения (13) и внешнее возмущение, представим математическую модель системы в виде

$$E \frac{dx(\tau)}{d\tau} = Ax(\tau) + Bu(\tau) + Gw(\tau) \quad (16)$$

с блочными матрицами

$$E = \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & A_{\zeta_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\zeta_2} \\ 0 & 0 & A_\phi \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\zeta_2} \\ B_\phi \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_1 n_2} \end{bmatrix};$$

$$A_{\zeta_1} = k_1 I_{n_2}; A_{\zeta_2} = k_2 P_\phi^1 [P_1^\rho \otimes I_{n_2}];$$

$$A_\phi = k_3 ([P_2^\rho \otimes I_{n_2}] + [P_{1/\rho}^1 \otimes I_{n_2}] [P_1^\rho \otimes I_{n_2}]) + \\ + k_4 [I_{n_1} \otimes P_2^\xi];$$

$$B_{\zeta_2} = -k_2 P_\phi^1 [H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}];$$

$$B_\phi = k_3 \{ [H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] + \\ + [P_{1/\rho} \otimes I_{n_2}] [B_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] \}, \quad (17)$$

$$n_1, n_2 = \overline{1, \infty}.$$

Вычислим операционные матрицы, входящие в состав матричных блоков, представленных в соотношениях (17). Операционная матрица $P_{1/\rho}$ в соответствии с выражением (10) имеет вид

$$P_{1/\rho} = \begin{bmatrix} 4,0540 & 4,6548 & 0,0025 & 3,7579 & \dots \\ 4,6548 & 4,6257 & 5,1402 & 0,4551 & \dots \\ 0,0025 & 5,1402 & 4,9878 & 5,4612 & \dots \\ 3,7579 & 0,4551 & 5,4612 & 5,2534 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Операционные матрицы дифференцирования первого и второго порядка по пространственной переменной ρ , полученные по выражению (11), будут иметь следующий вид:

$$P_1^\rho = \begin{bmatrix} -1,0270 & -6,0126 & 0,1608 & -4,0144 & \dots \\ 1,3579 & -1,3128 & -8,2092 & -0,1498 & \dots \\ -0,1631 & 3,0688 & -1,4939 & -10,3424 & \dots \\ 0,2572 & -0,3058 & 4,8815 & -1,6267 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix};$$

$$P_2^\rho = \begin{bmatrix} -9,4641 & 19,0244 & 18,0754 & 24,1712 & \dots \\ -0,7468 & -38,8954 & 29,7310 & 28,5669 & \dots \\ 0,3572 & -1,7391 & -87,9653 & 40,3260 & \dots \\ -0,2242 & 0,9359 & -2,8617 & -156,7836 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Операционная матрица дифференцирования второго порядка по пространственной переменной ξ , вычисленная в соответствии с выражениями (11), будет следующей:

$$P_2^\xi = \\ = \text{diag}\{-9,8696; -39,4784; -88,8264; -157,9137; \dots\}.$$

Векторы $B_0(\rho)|_{\rho=1}$, $H_0(\rho)|_{\rho=1}$, необходимые для учета граничных условий, будут иметь вид

$$B_0(\rho)|_{\rho=1} = \\ = \text{colon}\{-1,4142; 1,4142; -1,4142; 1,4142; \dots\},$$

$$H_0(\rho)|_{\rho=1} = \\ = \text{colon}\{1,4142; -1,4142; 1,4142; -1,4142; \dots\}. \quad (19)$$

Дополним уравнение (16), описывающее динамику объекта управления, уравнениями для измеряемых и регулируемых переменных.

Будем считать измеряемыми переменные ζ_1 , соответствующие отклонению возмущенной свободной поверхности жидкости, в семи точках, равноотстоящих друг от друга: $\xi_1 = 0,0714$, $\xi_2 = 0,2143$, $\xi_3 = 0,3571$, $\xi_4 = 0,5000$, $\xi_5 = 0,6429$, $\xi_6 = 0,7857$, $\xi_7 = 0,9286$. Следовательно, вектор измеряемых переменных можно представить выражением

$$y(\tau) = Cx(\tau);$$

$$y(\tau) = \text{colon}\{\zeta_1(\xi_1, \tau), \zeta_1(\xi_2, \tau), \dots, \zeta_1(\xi_7, \tau)\} \quad (20)$$

с блочной матрицей $C = [C_{\zeta_1} \ 0 \ 0]$. Матричный блок C_{ζ_1} составляется из функций разложения в ряд $P(h_2, \xi)$, вычисленных в точках измерения [5]. Для получения матрицы C_{ζ_1} представим функцию $\zeta_1(\xi_i, \tau)$, $i = \overline{1, 7}$, в виде ряда из выражения (7) при $\xi = \xi_i$, $i = \overline{1, 7}$:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\xi_1, \tau) &= P(1, \xi_1)\Phi_{\zeta_1}(1, \tau) + P(2, \xi_1)\Phi_{\zeta_1}(2, \tau) + \dots; \\ \zeta_1(\xi_2, \tau) &= P(1, \xi_2)\Phi_{\zeta_1}(1, \tau) + P(2, \xi_2)\Phi_{\zeta_1}(2, \tau) + \dots; \\ &\dots \\ \zeta_1(\xi_7, \tau) &= P(1, \xi_7)\Phi_{\zeta_1}(1, \tau) + P(2, \xi_7)\Phi_{\zeta_1}(2, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Если записать (21) в векторно-матричном виде, то получим выражение

$$\begin{bmatrix} \zeta_1(\xi_1, \tau) \\ \zeta_1(\xi_2, \tau) \\ \dots \\ \zeta_1(\xi_7, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(1, \xi_1) & P(2, \xi_1) & \dots \\ P(1, \xi_2) & P(2, \xi_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ P(1, \xi_7) & P(2, \xi_7) & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{\zeta_1}(1, \tau) \\ \Phi_{\zeta_1}(2, \tau) \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (22)$$

первым сомножителем правой части которого является матричный блок C_{ζ_1} .

Для выбранных точек $\zeta_1(\xi_i, \tau)$, $i = \overline{1, 7}$,

$$C_{\zeta_1} = \begin{bmatrix} 0,3147 & 0,6136 & 0,8817 & 1,1057 & \dots \\ 0,8817 & 1,3788 & 1,2742 & 0,6136 & \dots \\ 1,2742 & 1,1057 & -0,3147 & -1,3788 & \dots \\ 1,4142 & 0 & -1,4142 & 0 & \dots \\ 1,2742 & -1,1057 & -0,3147 & 1,3788 & \dots \\ 0,8817 & -1,3788 & 1,2742 & -0,6136 & \dots \\ 0,3147 & -0,6136 & 0,8817 & -1,1057 & \dots \end{bmatrix}.$$

Относительно вектора регулируемых переменных будем полагать, что он совпадает с вектором измеряемых переменных: $z(\tau) = y(\tau)$.

Необходимые условия существования и единственности решения бесконечной дескрипторной системы. Необходимые условия сходимости решения и возможности редукции

На основании работ [8, 9] сформулируем достаточные условия того, чтобы решение бесконечной дескрипторной системы (16) при достаточно боль-

шом порядке усечения n_1, n_2 было близко на заданном временном интервале к решению укороченной дескрипторной системы уравнений.

Система (16) может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1(\tau)/d\tau \\ dx_2(\tau)/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(\tau) + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} w(\tau), \quad (23)$$

где матричные блоки будут следующими:

$$\begin{aligned} I &= I_{2n_2}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & A_{\zeta_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{\zeta_2} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [0 \ 0], \\ A_{22} &= A_\phi, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\zeta_2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_\phi, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ G_2 &= I_{n_1 n_2}, \quad n_1, n_2 = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (24)$$

В выражении (23) можно выделить дифференциальную и алгебраическую подсистемы:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} &= A_{11}x_1(\tau) + A_{12}x_2(\tau) + B_1u(\tau) + G_1w(\tau); \\ 0 &= A_{21}x_1(\tau) + A_{22}x_2(\tau) + B_2u(\tau) + G_2w(\tau). \end{aligned} \quad (25)$$

Для дескрипторной системы (25) необходимое условие существования и единственности решения заключается в выполнении условий существования и единственности решения для каждой из подсистем — дифференциальной и алгебраической [10].

Для дифференциальной подсистемы в работах [5, 8, 9] подробно изложены условия существования, единственности, сходимости и возможности ее редукции — получения решения по ограниченному числу дифференциальных уравнений подсистемы, когда с увеличением числа уравнений решение конечной подсистемы стремится к решению бесконечной подсистемы. Как показывают исследования, в рассматриваемом случае эти условия выполняются.

Для алгебраической подсистемы необходимо выполнение условий ограниченности матричных норм Фробениуса [10]:

$$\|A_{21}\|^2 < \infty, \|A_{22}\|^2 < \infty, \|B_2\|^2 < \infty. \quad (26)$$

Необходимым условием однозначности, сходимости решения и возможности редукции алгебраической подсистемы является условие (26). Проверим справедливость (26) для объекта управления (16). Поскольку $A_{21} = 0$, условие ограниченности нормы для этой матрицы выполняется. Проверка условия $\|A_{22}\|^2 < \infty$ основывается на применении признаков сходимости функциональных и числовых рядов.

Для операционных матриц дифференцирования P_i^p ($i = 1, 2$) нетрудно показать, что в силу их определения по выражениям (11) сумма элементов каждого столбца операционной матрицы P_i^p ($i = 1, 2$) является рядом Фурье—Бесселя для функции

$f(\rho) = \partial^i B_0(\alpha_{h_1} \rho) / \partial \rho^i$, $i = 1, 2$, $h_1 = \overline{1, \infty}$. В соответствии с теоремой, приведенной в [11], для сходимости такого ряда достаточно потребовать, чтобы функция $F(\rho) = \sqrt{\rho} f(\rho)$ являлась функцией с интегрируемым квадратом. Поскольку функции $F(\rho) = \sqrt{\rho} \partial^i B_0(\alpha_{h_1} \rho) / \partial \rho^i$, $i = 1, 2$, $h_1 = \overline{1, \infty}$, являются функциями с интегрируемым квадратом, ряды по столбцам сходятся. Следовательно, сходятся и сами матричные нормы.

Суммы по столбцам операционных матриц P_i^ξ ($i = 1, 2$) также сходятся в силу того, что функции $\partial^i P(h_1, \xi) / \partial \xi^2$, $h_1 = \overline{1, \infty}$, являются непрерывными, ограниченными функциями с интегрируемым квадратом.

Проверка сходимости матричной нормы $\|P_{1/\rho}\|^2$ может быть осуществлена по числовой реализации этой матрицы (18) с применением признаков сходимости двойных рядов [12].

Из сходимости норм операционных матриц следует, что $\|A_{22}\|^2 < \infty$.

Проверим условие $\|B_2\|^2 < \infty$. Нетрудно показать, что матрица $B_2 = B_\phi$ может быть представлена в виде

$$B_2 = k_3 [H_0(\rho)|_{\rho=1} + P_{1/\rho} B_0(\rho)|_{\rho=1}] \otimes I_{n_2}. \quad (27)$$

Введем обозначение $B_2^p = [H_0(\rho)|_{\rho=1} + P_{1/\rho} B_0(\rho)|_{\rho=1}]$ и исследуем сходимость нормы $\|B_2^p\|^2$.

Векторы (19) могут быть представлены выражениями

$$H_0(\rho)|_{\rho=1} = -k_4 \text{colon}\{-1, 1, -1, 1, \dots\}, \\ B_0(\rho)|_{\rho=1} = k_4 \text{colon}\{-1, 1, -1, 1, \dots\}, k_4 = 1,4242. \quad (28)$$

Из выражения (18) следует, что матрица $P_{1/\rho}$ такова, что для каждой строки выполняется условие сходимости суммы элементов, так как, начиная с некоторого индекса столбца $m > m_0$, выполняется неравенство

$$p_{nm} + 1/p_{nm} < 1, n = \overline{1, \infty}. \quad (29)$$

Для матрицы B_2^p в этом случае можно записать

$$B_2^p = -k_4 \begin{bmatrix} p_{11}-1 & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & p_{22}-1 & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \dots \end{bmatrix} = \\ = -k_4 \begin{bmatrix} -(p_{11}-1) + p_{12} - p_{13} \\ -p_{21} + (p_{22}-1) - p_{23} \\ -p_{31} + p_{32} - (p_{33}-1) \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (30)$$

учитывая при этом, что справедливо $(p_{m_{0i}m_{0i}} - 1) > 0$, $m_{0i} = \overline{1, \infty}$.

Каждый из элементов матрицы B_2^p можно рассматривать как знакопередающийся ряд. В этом случае применение признака Абеля—Дирихле [12] позволяет сделать вывод о невозрастании начиная

с некоторого m_0 последовательности $\{p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_0} - 1, p_{nm_0+1}, \dots\}$, $n = \overline{1, \infty}$. Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m$ ограничена.

Таким образом, каждый из элементов B_2^p ограничен, откуда следует $\|B_2\|^2 < \infty$.

Таким образом, для математической модели объекта управления (16) с матрицами (17) выполняются необходимые условия существования, единственности, сходимости решения и возможности редукции системы, т. е. получения решения по ограниченному числу уравнений, записанных относительно первых нескольких амплитуд пространственных мод функций.

Синтез системы стабилизации потенциала ускорений плазмы в магнитном поле установки токамак

Выполним синтез регулятора для объекта управления (1)—(3), представленного в безразмерном виде (4)—(6) с параметрами $X_1^* = 1$ м, $X_2^* = 10$ м/с, $\Phi^* = 1$ м/с², $t^* = 2$ с, $R_1 = 1$ м, $L = 20$ м. Спектральное представление такого объекта имеет вид (16), (17). Выделим дифференциальную и алгебраическую подсистемы, основываясь на выражениях (23), (24). Принимая во внимание усечение бесконечных рядов при вычислениях, учтем $n_1 = n_2 = 7$ и получим следующие размерности векторов математической модели (23), (24): $x_1(\tau) \in R^{14}$, $x_2(\tau) \in R^{49}$, $u(\tau) \in R^7$.

Матрицы спектрального представления объекта (23), (24) будут иметь вид

$$A_{\zeta_1} = 0,5I_7;$$

$$A_{\zeta_2} = [0,8547 \ 0,0522 \ -0,0507 \ 1,0239 \\ -1,8408 \ 3,1299 \ -7,1697] \otimes I_7;$$

$$A_\phi = \begin{bmatrix} -5,9388 & 0 & 0,0012 & 0 & 0,0020 & 0 & 0,0028 & \dots \\ 0 & -6,0117 & 0 & 0,0032 & 0 & 0,0048 & 0 & \dots \\ 0,0012 & 0 & -6,1331 & 0 & 0,0059 & 0 & 0,0083 & \dots \\ 0 & 0,0032 & 0 & -6,3029 & 0 & 0,0097 & 0 & \dots \\ 0,0020 & 0 & 0,0059 & 0 & -6,5215 & 0 & 0,0139 & \dots \\ 0 & 0,0048 & 0 & 0,0097 & 0 & -6,7883 & 0 & \dots \\ 0,0028 & 0 & 0,0083 & 0 & 0,0139 & 0 & -7,1041 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Матричные блоки B_{ζ_2} , B_ϕ имеют размерности 7×7 и 49×7 и определяются следующим образом: $B_{\zeta_2} = 2,8000 \cdot I_7$;

$$B_\phi = \text{colon}\{14,0344; -19,4404; 14,2799; \\ -19,6646; 13,9130; -20,1850; 12,8049\} \otimes I_7.$$

Будем полагать, что имеют место точечные возмущения потенциала ускорения, энергия которых ограничена:

$$\phi_w(\rho, \xi, \tau) = \phi_w^* \frac{\partial(\rho - \rho_w)}{\rho} \delta(\xi - \xi_w) e^{-\alpha\tau}; \\ \rho \in [0, 1], \xi \in [0, 1], \quad (31)$$

$\phi_w^* = 0,05$, что соответствует 5 % от номинального значения переменной $\Phi(r, z, t)$; $\rho_w = 0,6$, $\xi_w = 0,8$, $\alpha = 1$. В этом случае вектор $w(\tau)$ будет иметь вид

$$w(\tau) = \text{colon}\{0,0082; -0,0132; 0,0132; -0,0082; \dots\}e^{-\tau}.$$

Синтезируем регулятор пониженной по сравнению с объектом размерности, не содержащий алгебраических уравнений. Это возможно за счет выделения быстрой и медленной подсистем системы, замкнутой динамическим регулятором с наблюдателем пониженной размерности. В основе решения задачи лежит вариационный подход. В качестве критерия оптимизации используется H_2 -критерий. Алгоритм синтеза подробно рассмотрен в работе [13]. Приведем результаты синтеза для рассматриваемого объекта управления.

Представление регулятора в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(\tau) &= A_p x_p(\tau) + B_p u(\tau); \\ u(\tau) &= C_p x_p(\tau) + D_p u(\tau),\end{aligned}\quad (32)$$

где A_p , B_p , C_p , D_p — числовые матрицы.

В системе MATLAB был выполнен анализ замкнутой системы при внешнем воздействии (31). Результаты анализа представлены на рис. 2—3 в относительных единицах и показывают, что перерегулирование и колебательность в системе отсутствуют.

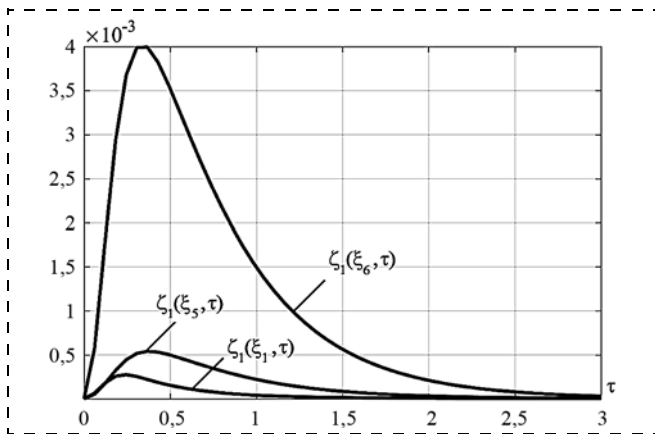


Рис. 2. Регулируемая переменная — относительное отклонение возмущенной поверхности в точках $\rho = 1$, $\xi = \xi_i$ ($i = 1, 5, 6$)

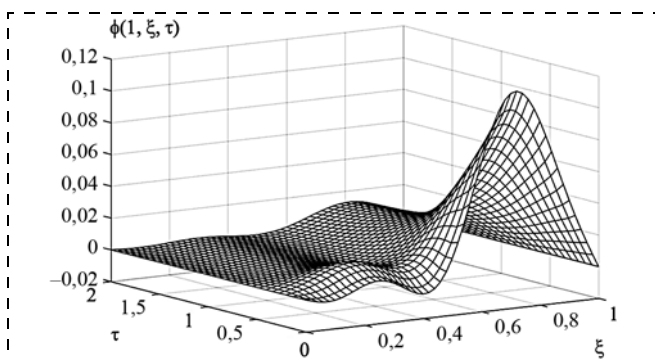


Рис. 3. Управляющее воздействие — изменение относительного потенциала ускорений, прикладываемое на внешнем радиусе объекта

Расчеты, проведенные по ограниченному числу уравнений, показали, что с увеличением числа дифференциальных и алгебраических уравнений и, соответственно, пространственных мод разложения функций управления и состояния процесса полученный результат стремится к определенному пределу.

Результаты свидетельствуют о возможности применения спектрального метода для решения задач анализа и синтеза системы стабилизации плазмы в установке токамак.

Заключение

В результате проведенных исследований с использованием спектрального метода получены алгоритмы перехода от пространственно-многомерной модели распределенного объекта управления к дескрипторной модели, состоящей из бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши и бесконечной системы алгебраических уравнений. Предложенная форма описания математической модели дала возможность решить задачу анализа и провести синтез регулятора для системы стабилизации плазмы в магнитном поле.

Приведены условия существования, единственности, сходимости полученных решений.

Список литературы

1. Lamour R., Marz R., Tischendorf C. PDAEs and further mixed systems as abstract differential algebraic systems. Technical Report 01—11, Berlin, Inst. of Math., Humboldt Univ. of Berlin, 2001, 22 p.
2. Campbell S. L., Stephen L., Marszalek W. The index of an infinite dimensional implicit system // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 1999. Vol. 5, N. 1. P. 18—42.
3. Tischendorf C. Coupled systems of differential algebraic and partial differential equations in circuit and device simulation. Berlin: Humboldt University of Berlin, 2003. 157 p.
4. Reis T. An infinite dimensional descriptor system model for electrical circuits with transmission lines // Proc. of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgium, 2004.
5. Коваль В. А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Изд-во СГТУ, 1997. 191 с.
6. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
7. Коваль В. А., Торгашова О. Ю. Решение задач анализа и синтеза для пространственно-двумерного распределенного объекта, представленного бесконечной системой дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 54—71.
8. Валеев Г. К., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974. 416 с.
9. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений // Изв. АН Каз. ССР, серия матем. и механ. 1948. Вып. 2. С. 2—35.
10. Торгашова О. Ю. Анализ и синтез пространственно-многомерных распределенных систем с учетом дескрипторной структуры представления на основе спектрального метода: дис. ... докт. техн. наук. Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2016. 386 с.
11. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 392 с.
12. Власова Е. А. Ряды. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 611 с.
13. Торгашова О. Ю., Шворнева О. Е. Синтез регулятора пониженной размерности алгебро-дифференциальной системы по критерию H_2 -оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 156—176.

Analysis and Synthesis of Spatially Multidimensional Distributed Systems with a Descriptor Structure of the Mathematical Model

V. A. Koval', koval.va@yandex.ru, M. F. Stepanov, mfstepanov@mail.ru,
O. Yu. Torgashova, olgatorg@gmail.com, A. A. Samarskij, sanches_93.93@mail.ru,
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation

Corresponding author: Torgashova Olga Yu., Ph. D., Associate Professor,
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation,
e-mail: olgatorg@gmail.com

Accepted on September 29, 2017

The problem of plasma stabilization in a magnetic field is considered. The plant is described by the hydrodynamics model of a weightless potential ideally conducting fluid in a cylindrical coordinate system. The deviation of the perturbed surface, the velocity of deflection of the perturbed surface, the acceleration potential are the functions of state. The acceleration potential on the outer generatrix of cylinder surface is used as the control. The state and control functions depending on the radial and axial coordinates are presented as series with respect to orthonormal systems of functions. Via the spectral method of the distributed systems analysis and synthesis the theoretical positions for the transition from the initial mathematical model described by PDE system to an infinite descriptor system are done. The components of state and control vectors of the descriptor system are the time-varying amplitudes of the spatial harmonics of the series. Expressions for the calculation of the operational differentiation matrices, the operational matrices of factors depending on spatial coordinates depended vectors, the matrices of boundary conditions are given. The matrices of the descriptor plant representation are obtained. The questions of existence, uniqueness, and convergence of the solution of the received descriptor system are investigated. For the plant represented by the descriptor system, a control law described by the differential system is constructed. The solution of the problem is based on the variational approach. The H_2 optimization criterion is used. The analysis and synthesis of the closed-loop system via Matlab is done. The results of the analysis indicate that there is no overshoot and oscillation in the system. Calculations based on a limited number of equations show that with the increase in the number of differential and algebraic equations and, respectively, the spatial modes of the expansion of the control functions and the state of the process, the obtained result tends to a certain limit.

Keywords: distributed descriptor system, spectral method, analysis, synthesis, convergence

For citation:

Koval' V. A., Stepanov M. F., Torgashova O. Yu., Samarskij A. A. Analysis and Synthesis of Spatially Multidimensional Distributed Systems with a Descriptor Structure of the Mathematical Model, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 3—10.

DOI:10.17587/mau.19.3-10

References

1. Lamour R., Marz R., Tischendorf C. PDAEs and further mixed systems as abstract differential algebraic systems. Technical Report 01—11, Berlin, Inst. of Math., Humboldt Univ. of Berlin, 2001, 22 p.
2. Campbell S. L., Stephen L., Marszalek W. The index of an infinite dimensional implicit system, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 1999, vol. 5, no. 1, pp. 18—42.
3. Tischendorf C. Coupled systems of differential algebraic and partial differential equations in circuit and device simulation. Habilitation thesis, Berlin: Humboldt University of Berlin, 2003, 157 p.
4. Reis T. An infinite dimensional descriptor system model for electrical circuits with transmission lines, *Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Leuven, Belgium, 2004.
5. Koval' V. A. *Spektral'nyy metod analiza i sinteza raspredelennykh upravlyaemykh sistem* (Spectral method of distributed control systems analysis and synthesis), Saratov, Publishing house of SGTU, 1997, 191 p. (in Russian).
6. Sirazetdinov T. K. *Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* (Optimization of systems with distributed parameters), Moscow, Nauka, 1977, 479 p. (in Russian).
7. Koval' V. A., Torgashova O. Yu. Solving analysis and synthesis problems for a spatially two-dimensional distributed object represented with an infinite system of differential equations, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 219—233.
8. Valeev G. K., Zhautykov O. A. *Beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravnenij* (Infinite differential equations systems), Alma-Ata, Nauka Kazahskoj SSR, 1974, 416 p. (in Russian).
9. Persidskij K. P. *Ob ustojchivosti reshenij schetnoj sistemy differentsial'nykh uravnenij* (On the stability of solutions of a countable differential equations system), *Izvestija AN Kazahskoj SSR, Seriya Matematika i Mehanika*, 1948, vol. 2, pp. 2—35 (in Russian).
10. Torgashova O. Yu. *Analiz i sintez prostranstvenno mnogomernykh raspredelennykh sistem s uchetom deskriptornoj struktury predstavlenija na osnove spektral'nogo metoda* (Analysis and synthesis of the spatially multidimensional distributed systems on the basis of the spectral method taking into account the descriptive structure of the system representation), Doctoral thesis, Saratov, Izdatel'stvo saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2016, 386 p. (in Russian).
11. Tolstov G. P. *Rjady Fur'e* (Fourier series), Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1960, 392 p. (in Russian).
12. Vlasova E. A. *Rjady* (Series), Moscow, Publishing house of MGTU imeni Bauman, 2006, 611 p. (in Russian).
13. Torgashova O. Yu., Shvorneva O. E. Designing reduced-dimension controller of differential-algebraic system by criterion of H_2 -optimization, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 302—319.