УДК 804.94:519.711.3 DOI: 10.17587/mau.16.617-624

В. И. Потапов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, ivt@omgtu.ru,
Омский государственный технический университет

Задачи и численные алгоритмы оптимизации надежности аппаратно-избыточной технической системы в конфликтной ситуации при различных стратегиях защиты от атак противника

Поставлены и решены четыре задачи оптимизации надежности аппаратно-избыточной технической системы, участвующей в конфликтной ситуации, при различных стратегиях защиты от нападающей стороны путем соответствующего выбора стратегии защиты путем замещения избыточными резервными блоками отказавших блоков под воздействием атак противника, направленных на увеличение интенсивности их отказов в процессе конфликта. Для решения всех рассмотренных задач разработаны численные алгоритмы, легко реализуемые на современных персональных компьютерах.

Ключевые слова: *математическая модель, численный алгоритм, конфликтная ситуация, оптимизация надежности, стратегия защиты*

Введение

Известно, что конфликтные ситуации практически в любой сфере деятельности обычно возникают тогда, когда сталкиваются интересы конкурирующих сторон, преследующих, как правило, различные цели. Между ними возникает противоборство, чаще всего в форме негативного воздействия друг на друга, препятствующего достижению собственных интересов (целей) участвующими в конфликте сторонами.

Обычно подобные ситуации имеют место в военном деле, в технических, информационных и вычислительных системах, в бизнесе, в области экономики, да и во многих других областях, включая общественную деятельность, конфликтные ситуации не являются исключением [1—14]. Однако в указанных и многих других известных автору работах, посвященных решению задач в конфликтных ситуациях, решение, как правило, не доведено до численных алгоритмов, что, естественно, затрудняет применение полученных результатов на практике с использованием компьютерной техники. В предлагаемой статье автор попытался устранить указанный недостаток.

В данной работе рассмотрена ситуация, когда в конфликте принимает участие защищающаяся от атак противника сторона, представляющая собой избыточную техническую систему, содержащую основные и резервные блоки, подключаемые вместо отказавших под воздействием атак противника основных блоков для восстановления ее функциональных возможностей в процессе конфликта. Атакующая сторона в течение конфликта стремится за счет своих средств нападения ослабить атакуемую техническую систему путем целенаправленного воздействия (атаками) на ее функциональные блоки, тем самым увеличивая интенсивность их отказов в течение времени конфликта и уменьшая вероятность безотказной работы атакуемой технической системы.

Для оптимизации вероятности безотказной работы и среднего времени наработки на отказ атакуемой технической системы в процессе конфликта в работе предлагаются модели для решения этих задач при различных стратегиях использования резервных блоков вместо отказавших.

Для решения четырех задач оптимизации надежности рассматриваемой технической системы в процессе конфликта разработаны численные алгоритмы, удобные для реализации на персональных компьютерах.

Математическая модель технической системы, участвующей в конфликтной ситуации

В качестве объекта исследования, участвующего в конфликтной ситуации, выбрана аппаратно-избыточная техническая система $S(n, m, \mathbf{s})$, состоящая из n ($n = n_1 + n_2 + ... + n_q$) основных и m ($m = s_1 + s_2 + ... + s_q$) резервных блоков, разбитых на q групп, в каждой из которых находится n_i ($1 \leqslant i \leqslant q$) основных и s_i ($1 \leqslant i \leqslant q$) резервных блоков. Целочисленный вектор $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_q)$, соответствующий распределению резервных блоков в q группах, будем называть вектором резервирования. При этом, если после настройки перед началом работы системы

$S(n, m, \mathbf{s})$ распределение m резервных блоков по q группам в течение времени конфликта не изменяется (замены отказавших основных блоков резервными возможны только внутри каждой q группы), то такую техническую систему будем называть системой со статическим резервированием и обозначать S_C $(n, m, \mathbf{s})$.

Если в процессе работы в течение времени конфликта вектор резервирования $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_q)$ технической системы целенаправленно изменяется для достижения поставленных перед системой целей, т. е. в процессе конфликта выполняется перераспределение m резервных блоков между q группами, сформированными перед началом работы системы в конфликтной ситуации, то такую техническую систему будем обозначать $S_D(n, m, \mathbf{s})$ и называть системой с динамическим резервированием.

Для упрощения модели будем считать, что отказы основных блоков обнаруживаются в моменты их возникновения, а время подключения резервного блока вместо отказавшего пренебрежимо мало и в рассматриваемой модели не учитывается. Будем также полагать, что вероятность отказа системы технической диагностики и подключения резервных блоков в течение времени конфликта пренебрежимо мала, однако при необходимости конечную надежность этой системы в модели можно учесть без особого труда.

Конфликтная ситуация заключается в следующем. Техническая система $S(n, m, \mathbf{s})$ вступает в противоборство с противником, преследующим цель дестабилизировать ее работу, т. е. уменьшить ресурс работоспособности системы и привести к срыву выполнения системой поставленной задачи. С точки зрения теории надежности это интерпретируется как попытка противника уменьшить вероятность безотказной работы участвующей в конфликте системы и, в конечном итоге, привести эту систему к отказу. В качестве средств атаки противник использует свои ресурсы, направленные на увеличение в течение времени конфликта $(0 < t \leqslant t_f)$ интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ основных блоков и интенсивности отказов $\lambda_0(t)$ не включенных в работу резервных блоков системы, т. е. противник стремится искусственно усиливать "старение" технической системы $S(n, m, \mathbf{s})$, приводящее к росту вероятности ее отказа в процессе конфликта. Стратегией атакующего противника является использование соответствующих средств в возможных для него пределах, приводящих к возрастанию интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ и $\lambda_0(t)$ основных и резервных блоков защищающейся технической системы. При этом в соответствии с выбранной стратегией нападения атакующий противник выбирает закон возрастания во времени функций интенсивностей отказов $\lambda_i(t)$ и $\lambda_0(t)$, например от линейного до экспоненциального, по которому атакующий противник будет стремиться увеличивать у защищающейся системы $S(n, m, \mathbf{s})$ в процессе противоборства интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ и $\lambda_0(t)$.

В подобной конфликтной ситуации основным ресурсом защиты от атакующего противника у защищающейся системы $S(n, m, \mathbf{s})$ являются резервные блоки, а стратегией защищающейся стороны является оптимальное с точки зрения повышения надежности, т. е. вероятности безотказной работы атакуемой технической системы $S(n, m, \mathbf{s})$, распределение m резервных блоков между q группами для системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ до начала конфликта, а для системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ — до начала и в процессе конфликта.

Очевидно, что чем больше информации о стратегических намерениях атакующей стороны будет у защищающейся стороны, тем лучше можно организовать ее защиту путем выбора оптимальной в конкретных условиях конфликта стратегии защиты из числа стратегий замещения отказавших блоков резервными, рассмотренных в данной статье.

Поведение рассматриваемой технической системы, участвующей в описанной выше конфликтной ситуации, учитывая вероятностный характер процесса, при условии аппроксимации марковским процессом может быть описано по известной методике [15, 16] системой дифференциальных уравнений Колмогорова с переменными коэффициентами. Эта методика будет использована ниже.

Постановка задач оптимизации надежности технической системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ со статическим резервированием в конфликтной ситуации

Для формального описания поведения системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ в процессе конфликта обозначим E_k $(0 \leqslant k \leqslant m)$ — работоспособное состояние системы с k отказавшими блоками; E_r $(r = m + 1)$ — поглощающее состояние, т. е. состояние полного отказа системы; A_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ — интенсивность перехода системы из состояния E_{k-1} в состояние E_k; B_k $(1 \leqslant k \leqslant m + 1)$ — интенсивность перехода системы из состояния E_{k-1} в состояние полного отказа E_r; $p_k(t)$ $(0 \leqslant k \leqslant m + 1)$ — вероятность нахождения системы в момент времени t в состоянии E_k. Очевидно, что условие нормировки имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{m+1} p_k(t) = 1.$$

Будем полагать, что под воздействием атаки противника каждый резервный блок системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ будет отказывать с интенсивностью $\lambda_0(t)$, а основные блоки, разбитые на q групп, отказывают соот-

ветственно с интенсивностями $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_q(t)$, причем $\lambda_i(t)$, $0 \leqslant i \leqslant q$, являются функциями времени, возрастающими по закону, выбранному противником для атаки в соответствии с его стратегическими планами в конфликте, и, в частном случае, могут быть одинаковыми, т. е. $\lambda_i(t) = \lambda(t)$, $0 \leqslant i \leqslant q$.

Система дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемой системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &p_0'(t) = -D_1 p_0(t); \\ &p_k' A_k p_{k-1}(t) - D_{k+1} p_k(t), \\ &k = 1, 2, ..., m; \\ &p_r'(t) = \sum_{k=1}^{m+1} B_k \lambda(t) p_{k-1}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1,\ p_i(0) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

При этом $D_k = A_k + B_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $D_{m+1} = B_{m+1}$.

Коэффициенты системы уравнений (1) вычисляются в соответствии с выражениями

$$A_k = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i(k)\lambda_i(t),\ k = 1, 2, ..., m;$$

$$D_k = \sum_{i=0}^{q} \beta_i(k)\lambda_i(t),\ k = 1, 2, ..., m+1,$$

где при $0 \leqslant k \leqslant m$ имеет место

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} (m-k+1)R_k, \text{ если } i = 0, \\ \delta_i n_i R_k, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant q; \end{cases}$$

$$\beta_i(k) = \begin{cases} (m-k+1)R_k, \text{ если } i = 0, \\ \delta_i n_i R_k + n_i \Theta_i(k), \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant q; \end{cases}$$

$$\beta_i(m+1) = \delta_i n_i,\ 1 \leqslant i \leqslant q;$$

$$R_k = \binom{n+m}{k}^{-1} R_k^*.$$

Коэффициенты δ_i и $\Theta_i(k)$, являющиеся элементами векторов $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_q)$ и $\boldsymbol{\Theta}(k) = (\Theta_1(k), \Theta_2(k), ..., \Theta_q(k))$, определяются следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \text{ если } s_i = 0, \\ 1, \text{ если } s_i \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\Theta_i(k) = \begin{cases} 0, \text{ если } k \leqslant s_i, \\ 1, \text{ если } k \geqslant s_i + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Theta_i(1) = 1 - \delta_i$.

Переменная R_k^* определяет число возможных попаданий системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ в состояние E_k и вычисляется [17] по формуле

$$R_k^* = \sum_{v \in \Omega(k, \mathbf{s})} \prod_{i=1}^{q} \binom{n_i + s_i}{v_i}, \tag{2}$$

где

$$\Omega(k, \mathbf{s}) = \{\mathbf{v} | v_1 + v_2 + ... + v_q = k;\ \forall_i\ 0 \leqslant v_i \leqslant s_i\};$$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_q)$ — целочисленный вектор, представляющий сумму целочисленных векторов ($\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$), $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_q)$ и $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_q)$.

Выражение (2) получено в предположении, что k отказов в системе распределились следующим образом: в i-й группе основных блоков — x_i отказов, в i-й группе резервных блоков — z_i отказов ($1 \leqslant i \leqslant q$). Если $x_i = 0$ или $z_i = 0$, то в соответствующей группе отказов не было.

Теперь на формальном уровне можно поставить задачу оптимизации вероятности безотказной работы и задачу оптимизации среднего времени безотказной работы участвующей в конфликтной ситуации системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$, подвергающейся атаке противника в конфликтной ситуации.

Численное решение задачи оптимизации вероятности безотказной работы технической системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ в конфликтной ситуации

Задача заключается в следующем. В процессе конфликта для заданного времени $t_f > 0$ найти вектор $\mathbf{s}^0$, максимизирующий вероятность безотказной работы $P(t_f, \mathbf{s}^0)$ технической системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$, описываемой системой уравнений (1), при заданных ограничениях на параметры системы.

Получить точное решение данной задачи не представляется возможным, так как входящие в систему (1) дифференциальные уравнения имеют переменные коэффициенты. Поэтому воспользуемся методом дискретизации для получения приближенного решения.

Для этого вычислим минимальное натуральное число r, удовлетворяющее условиям

$$r \geqslant 2,\ \max_{0 \leqslant i \leqslant q}\ \max_{1 \leqslant v \leqslant r}\ \max_{t \in \Delta_v} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}| \leqslant \varepsilon,$$

где

$$\Delta_v = [t_{v-1};\ t_v],\ t_v = v\Delta t,\ \Delta t = t_f/r,$$

$$\lambda_{iv} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{v-1}) + \lambda_i(t_v)],$$

ε — заданное положительное число, представляющее собой наибольшее допустимое отклонение функ-

ций $\lambda_i(t)$ от констант λ_{iv} на интервалах дискретизации Δ_v для всех $1 \leqslant v \leqslant r$.

Очевидно, что $t_0 = 0$, $t_r = t_f$.

Тогда система уравнений (1) распадается на r систем с постоянными коэффициентами для $t \in \Delta_v$:

$$p'_{0v}(t) = -D_{1v}p_{0v}(t);$$

$$p'_{kv}(t) = A_{kv}p_{k-1,v}(t) - D_{k+1,v}p_{kv}(t), \qquad (3)$$

$$k = 1, 2, ..., m$$

с начальными условиями

$$p_{kv}(t_{v-1}) = \begin{cases} p_k(0) \text{ для } v = 1, \\ p_{k,v-1} \text{ для } 2 \leqslant v \leqslant r. \end{cases}$$

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений (3) имеют следующий вид:

$$A_{kv} = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i(k)\lambda_{iv}; \; D_{kv} = \sum_{i=0}^{q} \beta_i(k)\lambda_{iv}.$$

Решение системы уравнений (3) для $t \in \Delta_v$ может быть записано в следующей форме:

$$p_{0v}(t) = p_{0,v-1}(t_{v-1})\exp(-D_{1v}t); \qquad (4)$$

$$p_{kv}(t) = \sum_{j=0}^{q} p_{j,v-1}(t_{v-1}) \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{k} A_{iv} \sum_{l=j+1}^{k+1} \exp(-D_{lv}t) / \prod_{\substack{i=j+1 \\ i \neq l}}^{k+1} (D_{iv} - D_{lv}), \qquad (5)$$

$$k = 1, 2, ..., m.$$

Обозначим $S(m)$ — множество $S(m) = \{\mathbf{s} | s_1 + s_2 + ... + s_q = m, \forall_i \; s_i \geqslant 0\}$.

Теперь задачу вычисления вектора $\mathbf{s}^0 = (s_1^0, s_2^0, ..., s_q^0)$, максимизирующего вероятность безотказной работы $P(t_f, \mathbf{s}^0)$ системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$, можно решить, используя следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ 1

Начало.

1. Задать натуральные числа m, q, массив $\{n_1, n_2, ..., n_q\}$, функции $\lambda_i(t)$, $0 \leqslant i \leqslant q$, массив $\{1, 0, 0, ..., 0\}$ начальных значений, число $t_f > 0$, число $\varepsilon > 0$.
2. Положить $r = 2$.
3. Вычислить число $\Delta t = t_f/r$ и массив $\{t_0, t_1, ..., t_r\}$.
4. Положить $i = 0$.
5. Положить $v = 1$.
6. Вычислить $\lambda_{iv} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{v-1}) + \lambda_i(t_v)]$.
7. Вычислить число

$$\varphi_{iv}^r = \max_{t \in \Delta} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}| = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_v) - \lambda_i(t_{v-1})].$$

8. Положить $v = v + 1$.
9. Если $v \leqslant r$, идти к п. 6.
10. Вычислить число

$$\varphi_i^r = \max_{1 \leqslant v \leqslant r} \{\varphi_{iv}^r\}.$$

11. Положить $i = i + 1$.
12. Если $t \leqslant m$, идти к п. 5.
13. Вычислить число

$$\varphi_i^r = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} \{\varphi_{iv}^r\}.$$

14. Если $\varphi^r \leqslant \varepsilon$, идти к п. 17.
15. Положить $r = r + 1$.
16. Идти к п. 3.
17. Задать целочисленный вектор $\mathbf{s} \in S(m)$.
18. Положить $v = 1$.
19. Вычислить $p_{kv}(t_v)$, $0 \leqslant k \leqslant m$, по формулам (4) и (5).
20. Положить $v = v + 1$.
21. Если $v \leqslant r$, идти к п. 19.
22. Вычислить

$$P(t_f, \mathbf{s}) = \sum_{k=0}^{m} p_{kr}(t_f).$$

23. Выполнить процедуру пп. 17—22 для всех $\mathbf{s} \in S(m)$.
24. Вычислить вектор $\mathbf{s}^0$, для которого

$$P(t_f, \mathbf{s}^0) = \max_{\mathbf{s} \in S(m)} P(t_f, \mathbf{s}).$$

25. Конец ($\mathbf{s}^0$ — искомый вектор резервирования).

Численное решение задачи оптимизации среднего времени безотказной работы технической системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ в конфликтной ситуации

Задача заключается в следующем. Найти вектор $\mathbf{s}^1$, максимизирующий среднее время безотказной работы $T(S_C(n, m, \mathbf{s}^1))$ технической системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$, описываемой уравнениями (1), при заданных ограничениях на параметры системы.

Для решения данной задачи воспользуемся выражениями (4) и (5), полагая, что конфликтная си-

туация не краткосрочная. Тогда для достаточно больших значений t_f получим

$$T(S_C(n, m, \mathbf{s})) = \int_0^{\infty} P(t)dt \approx \int_0^{t_f} P(t)dt =$$

$$= \sum_{v=1}^{r} \int_{t_{v-1}}^{t_v} p_v(t)dt = \sum_{v=1}^{r} \int_{t_{v-1}}^{t_v} \left(\sum_{k=0}^{m} p_{kv}(t) \right) dt,$$

где $P(t)$ — вероятность безотказной работы системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ в момент времени t.

Обозначив

$$\psi_v = \int_{t_{v-1}}^{t_v} \left(\sum_{k=0}^{m} p_{kv}(t) \right) dt,$$

имеем

$$T(S_C(n, m, \mathbf{s})) = \sum_{v=1}^{r} \psi_v.$$

Нетрудно вычислить [16]

$$\psi_v = \frac{p_{0,\,v-1}(t_{v-1})}{D_{1v}} (\exp(-D_{1v}t_{v-1}) - \exp(-D_{1v}t_v) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k} p_{j,\,v-1}(t_{v-1}) \prod_{i=j+1}^{k} A_{iv} \sum_{l=j+1}^{k+1} (\exp(-D_{lv}t_{v-1}) -$$

$$- \exp(D_{lv}t_v))/D_{iv} \prod_{\substack{i=j+1 \\ i \neq l}}^{k+1} (D_{iv} - D_{lv}). \qquad (6)$$

После сделанных преобразований задачу вычисления вектора $\mathbf{s}^1 = (s_1^1, s_2^2, ..., s_q^1)$, максимизирующего среднее время безотказной работы $T(S_C(n, m, \mathbf{s}^1))$ участвующей в конфликтной ситуации технической системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$, можно численно решить с помощью компьютера, используя следующий алгоритм, при условии, что заданы и введены в компьютер все параметры системы (см. п. 1 алгоритма 1).

АЛГОРИТМ 2

Начало.

1. Задать вектор $\mathbf{s} \in S(m)$.
2. Задать $t_f^1 = 1$, $\varepsilon > 0$.
3. Положить $i = 1$, $t_f = t_f^1$.
4. Выполнить процедуру пп. 2—21 алгоритма 1.
5. Если $\psi_r < \varepsilon$, идти к п. 9 данного алгоритма.
6. Положить $i = i + 1$.
7. Вычислить $t_f = it_f^1$.
8. Идти к п. 4 данного алгоритма.
9. Вычислить, используя формулу (6),

$$T(S_C(n, m, \mathbf{s}) = \sum_{v=1}^{r} \psi_v.$$

10. Выполнить процедуру пп. 2—9 данного алгоритма для всех $\mathbf{s} \in S(m)$.
11. Вычислить вектор $\mathbf{s}^1$, для которого

$$T(S_C(n, m, \mathbf{s}^1) = \max_{\mathbf{s} \in S_1(m)} T(S_C(n, m, \mathbf{s})).$$

12. Конец ($\mathbf{s}^1$ — искомый вектор резервирования).

Первая задача численного решения оптимизации функциональной надежности системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ с динамическим резервированием в конфликтной ситуации

Как указывалось выше, в атакуемой системе $S_D(n, m, \mathbf{s})$ с динамическим резервированием в процессе работы вектор резервирования $\mathbf{s}$ целенаправленно изменяется, т. е. в процессе конфликта в зависимости от атакующих действий противника проводится перераспределение m резервных блоков между q группами, сформированными перед началом работы системы в конфликтной ситуации.

Будем считать, что перераспределение резервных блоков между группами резервирования осуществляется мгновенно по соответствующей команде в определенные моменты времени $\tau_i (i \geqslant 1)$. Назовем перераспределение резервных блоков настройкой системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$, а моменты времени, в которые происходит настройка, — моментами настройки атакуемой технической системы.

Будем полагать, что настройки системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ могут проводиться в заданные моменты времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l$ $(l \geqslant 1)$, при этом $\tau_0 = 0$.

Требуется определить последовательность векторов резервирования $\mathbf{s}_\omega^0 = (s_{1\omega}^0, s_{2\omega}^0, ..., s_{q\omega}^0)$, $0 \leqslant \omega \leqslant l$, максимизирующих вероятность безотказной работы системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ последовательно в заданные моменты настройки и в заданный момент времени t_f, $t_f > \tau_l$.

Получить точное решение данной задачи не представляется возможным. Поэтому для приближенного решения этой задачи воспользуемся методом дискретизации, которым была решена выше аналогичная задача для системы $S_C(n, m, \mathbf{s})$ со статическим резервированием. При этом Алгоритм 1 будем считать базовым для данной и следующей задачи.

Обозначим целочисленное множество

$$S_\omega = \left\{ \mathbf{s}_\omega \middle| \sum_{i=1}^{q} s_{i\omega} = m - \left[\sum_{k=0}^{m} kp_{k\omega}(\tau_\omega) \right]; s_{i\omega} \geqslant 0 \right\},$$

где [*] — целое число, ближайшее к данному;

$$\sum_{k=0}^{m} k p_{k\omega}(\tau_\omega) -$$

— математическое ожидание случайной величины $\varphi(\tau_\omega) = 0, 1, 2, ..., m$, определяющей число блоков, отказавших к моменту времени τ_ω в системе $S_D(n, m, \mathbf{s})$; $p_{k\omega}(\tau_\omega)$ — вероятность нахождения системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ в момент времени τ_ω в состоянии с k отказавшими блоками. При этом, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{m} p_{k\omega}(\tau_\omega) = 1.$$

Обозначим процедуру пп. 2—24 базового Алгоритма 1 через $\Pi_1(t_f, S)$. Тогда первую рассматриваемую оптимизационную задачу можно решить с помощью следующего алгоритма.

АЛГОРИТМ 3

Начало.

Задать все исходные данные.

1. Положить $\omega = 0$.
2. Выполнить $\Pi_1(\tau_{\omega+1}, S_\omega)$ и определить $\mathbf{s}_\omega^0$.
3. Положить $\omega = \omega + 1$.
4. Если $\omega \leqslant l - 1$, идти к п. 2 данного алгоритма.
5. Выполнить $\Pi_1(t_f, S_l)$.
6. Конец (последовательность настроек $\{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, ..., \mathbf{s}_l^0\}$ — искомая).

Вторая задача численного решения оптимизации функциональной надежности системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ с динамическим резервированием в конфликтной ситуации

Данная оптимизационная задача является обобщением первой задачи. Очевидно, что за заданное время t_f может быть выполнено конечное число настроек атакуемой системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$, не более чем $L (L \geqslant 1)$.

Требуется определить число настроек $l (l \leqslant L)$, последовательность $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l\}$ моментов настройки и последовательность векторов резервирования $\mathbf{s}_\omega^0 = (s_{1\omega}^0, s_{2\omega}^0, ..., s_{q\omega}^0)$, отвечающих моментам настройки τ_ω, $1 \leqslant \omega \leqslant l$, таким образом, чтобы вероятность безотказной работы системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ в моменты настройки и в момент времени t_f, $t_f > \tau_l$, были последовательно максимальными. При этом, как обычно, $\tau_0 = 0$.

Для решения данной задачи последовательно применим уже известный из предыдущих разделов работы метод дискретизации.

Обозначим $\tau_{l+1} = t_f$ и множество $\Delta_\omega^* = [\tau_{\omega-1}, \tau_\omega]$, $1 \leqslant \omega \leqslant l + 1$. Фиксируем ω и для заданного $\varepsilon > 0$ вычисляем натуральное $r(\omega)$. Определение числа ε и процедура вычисления $r(\omega)$ аналогичны определению ε и r, описанному в базовом Алгоритме 1. Затем вычисляем $\Delta t_\omega = (\tau_\omega - \tau_{\omega-1})/r(\omega)$ — интервал дискретизации на множестве Δ_ω^*.

Обозначим $t_v^\omega = \tau_{\omega-1} + v\Delta t_\omega$, $0 \leqslant v \leqslant r(\omega)$.

Очевидно, что $t_0^\omega = \tau_{\omega-1}$ и $t_{r(\omega)}^\omega = \tau_\omega$.

Обозначим далее $\Delta_{v\omega} = [t_{v-1}^\omega, t_v^\omega[$.

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\Delta_\omega^* = \bigvee_{v=1}^{r(t)} \Delta_{v\omega};\ [0, t_f] = \bigvee_{\omega=1}^{l+1} \Delta_\omega^* = \bigvee_{\omega=1}^{l+1} \left[\bigvee_{v=1}^{r(\omega)} \Delta_{v\omega}\right].$$

Заметим, что для любого ω и любых $v \neq v'$ $\Delta_{v\omega} \cap \Delta_{v'\omega} = \varnothing$, также и для любых $\omega \neq \omega'$ $\Delta_\omega^* \cap \Delta_{\omega'}^* = \varnothing$.

Натуральное число $r(\omega)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$r(\omega) \geqslant 2,$$

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant q} \max_{1 \leqslant v \leqslant r(\omega)} \max_{t \in \Delta_{v\omega}} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}^\omega| \leqslant \varepsilon,$$

где

$$\lambda_{iv}^\omega = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{v-1}^\omega) + \lambda_i(t_v^\omega)].$$

Таким образом, ε определяется как наибольшее допустимое отклонение функции интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ от констант λ_{iv}^ω на интервалах дискретизации $\Delta_{v\omega}$ для всех v $1 \leqslant v \leqslant r(\omega)$.

Тогда на Δ_ω^* система уравнений Колмогорова, описывающих рассматриваемую участвующую в конфликте систему $S_D(n, m, \mathbf{s})$ с динамическим резервированием, распадается на $r(\omega)$ систем уравнений с постоянными коэффициентами

$$(p_{0v}^\omega)' = -D_{1v}^\omega p_{0v}^\omega;$$

$$(p_{0v}^\omega)' = A_{kv}^\omega p_{k-1,v}^\omega - D_{k+1,v}^\omega p_{kv}^\omega, \qquad (7)$$

$$k = 1, 2, ..., m,$$

с начальными условиями для $\omega = 1$

$$p_{kv}^1(t_{v-1}^1) = \begin{cases} p_k(0), \text{ если } v = 1, \\ p_{k,v-1}^1(t_{v-1}^1), \text{ если } 2 \leqslant v \leqslant r(1), \end{cases}$$

и с начальными условиями

$$p_{kv}^\omega(t_{v-1}^\omega) = \begin{cases} p_{k,r(\omega-1)}^{\omega-1}, \text{ если } v = 1, \\ p_{k,v-1}^\omega(t_{v-1}^\omega), \text{ если } 2 \leqslant v \leqslant r(\omega) \end{cases}$$

для $2 \leqslant \omega \leqslant l$.

В системе уравнений (7) коэффициенты A_{kv}^{ω} и D_{kv}^{ω} соответственно равны

$$A_{kv}^{\omega} = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i(k)\lambda_{iv}^{\omega},$$

$$D_{kv}^{\omega} = \sum_{i=0}^{q} \beta_i(k)\lambda_{iv}^{\omega},$$

а величины $\alpha_i(k)$ и $\beta_i(k)$ вычисляются так же, как и в приведенном выше разделе статьи, с той лишь разницей, что коэффициент R_k^*, входящий в формулы, по которым они вычисляются, определяющий число возможных попаданий системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ в состояния с k отказавшими блоками, суммируется по целочисленному множеству

$$S_{\omega-1} = \left\{ \mathbf{s}_{\omega-1} \middle| \sum_{i=1}^{q} s_{i,\,\omega-1} = \right.$$

$$\left. = m - \left[\sum_{k=0}^{m+1} k p_{k,\,r(\omega-1)}^{\omega-1}(\tau_{\omega-1}) \right];\ s_{i,\,\omega-1} \geqslant 0 \right\},$$

где

$$p_{k,\,r(0)}^{0}(\tau_0) = p_k(0).$$

Обозначим процедуру пп. 1—16 базового Алгоритма 1 через $\Pi_2(\varepsilon;\ t_0,\ t_r)$, а Алгоритм 3 численного решения первой задачи оптимизации функциональной надежности системы $S_D(n, m, \mathbf{s})$ — через $\Pi_3(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_{l+1})$. Тогда вторую поставленную в данном разделе оптимизационную задачу можно решить с помощью следующего алгоритма.

АЛГОРИТМ 4

Начало.

Задать все исходные данные.

1. Положить $l = 1$.
2. Вычислить $\zeta_l = \Pi_2(\varepsilon, \tau_{l-1}, \tau_{l+1})$.
3. Вычислить $\Delta\tau_l = (\tau_{l+1} - \tau_{l-1})/\zeta_l$.
4. Положить $z = 1$.
5. Вычислить $\tau_l(z) = \tau_{l-1} + z/\Delta\tau_l$.
6. Выполнить $\Pi_3(\tau_{l-1}, \tau_l(z))$.
7. Положить $z = z + 1$.
8. Если $z \leqslant \xi_{l-1}$, идти к п. 5 данного алгоритма.
9. Вычислить z_l, для которого

$$P(\tau_l(z_l) = \max_{1 \leqslant z \leqslant \zeta_{l-1}} P(\tau_l(z)).$$

10. Положить $\tau_l = \tau_l(z_l)$ и запомнить $\mathbf{s}_{l-1}^{0}$ и $\mathbf{s}_{l}^{0}$.
11. Положить $l = l + 1$.
12. Если $l \leqslant L$, идти к п. 2 данного алгоритма.
13. Конец ($\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_L]$ и $\{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, ..., \mathbf{s}_L^0)$ — искомые последовательности).

Заключение

Рассмотренные в статье задачи оптимизации надежности технической системы в конфликтной ситуации при различных стратегиях использования избыточных резервных блоков вместо отказавших для защиты от атак противника и разработанные численные алгоритмы для решения этих задач легко реализуются на профессиональных ПЭВМ и позволяют оперативно находить оптимальное распределение резервных блоков в атакуемых технических системах $S_C(n, m, \mathbf{s})$ и $S_D(n, m, \mathbf{s})$, гарантирующее этим системам оптимизацию функциональной надежности в конфликтной ситуации.

Список литературы

1. **Саати Т.** Математические модели конфликтных ситуаций. М.: Сов. радио, 1977. 304 с.
2. **Петросян Л. А., Зенкевич Н. А.** Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 77 с.
3. **Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф.** Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. 288 с.
4. **Aubin Y.** Optima and Equilibria. B.: Springer, 1993. 417 p.
5. **Theodore L. Turocy, Bernhard von Stengel.** Game Theory. Texas A & M University, London School of Economics, 2001. 39 p.
6. **Данилов Н. Н.** Теоретико-игровое моделирование конфликтных ситуаций. Томск: Изд-во ТГУ, 2005. 445 с.
7. **Выпасняк В. И.** Моделирование вооруженного противоборства: перспективы развития // Военная мысль. 2009. № 7. С. 12—21.
8. **Галаев А. А., Маслов Е. П., Рубинович Е. Я.** Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 134—140.
9. **Куливец С. Г.** Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах // Проблемы управления. 2010. № 4. С. 42—48.
10. **Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.** Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010. 244 с.
11. **Flesch Y., Schoenmakers G., Vrieze O. J.** Loss of skills in coordination games // Int. J. Game Theory. 2011. N 40. P. 769—789.
12. **Добровидов А. В., Кулида Е. А., Рудько И. М.** Выбор траектории движения объекта в конфликтной среде // Проблемы управления. 2011. № 2. С. 64—75.
13. **Сергеев С. М.** Антагонистические дифференциальные игры в задачах моделирования коммерческих сетей // Вестник ТГУ. 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 872—874.
14. **Потапов В. И.** Математическая модель и алгоритм оптимального управления подвижным объектом в конфликтной ситуации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 16—22.
15. **Вентцель Е. С.** Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. 550 с.
16. **Козлов Б. А., Ушаков И. А.** Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. М.: Сов. радио, 1975. 472 с.
17. **Потапов В. И., Братцев С. Г.** Новые задачи оптимизации резервированных систем. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1986. 112 с.

Tasks and Numerical Algorithms for Optimization of Reliability of the Hardware-Redundant Technical Systems in a Conflict Situation under Different Strategies for Protection Against Enemy Attacks

V. I. Potapov, ivt@omgtu.ru✉,
Omsk State Technical University, Omsk, 644050, Russian Federation

Corresponding author: **Potapov Victor I.,** D. Sc, Professor,
Head of Department of Informatics and Computer Engineering,
Omsk State Technical University, Omsk, 644050, Russian Federation, e-mail: ivt@omgtu.ru

Received on January 29, 2015
Accepted on April 23, 2015

The subject of the article is the situation when a side in a conflict, defending itself from the enemy attacks, is a hardware-redundant technical system, containing the main and standby units, which can be involved for recovery of its functionality in the process of a conflict in accordance with the chosen protection strategy instead of the main unites, which failed under the impact of the enemy attacks. During a conflict the attacking side with its attack resources tries to weaken the targeted technical system by focusing its attacks on the functional units, increasing their failure rate during the period of the conflict and thus reducing the faultless operation and average uptime of the targeted technical system. Given the probabilistic character of the process, the behavior of the considered technical system involved in a conflict situation is approximated by Markov process and is described by Kolmogorov system of differential equations with variable coefficients. For solving of these equations the method of discretization and integer programming is used. The essence of this method, applied to the considered problem, is that the system of differential equations describing the behavior of a technical system in a conflict situation, the coefficients of which are functions of time, should be replaced by a system of discrete analogues, the coefficients of which can be considered constant with a predetermined degree of accuracy at discrete time intervals during the conflict. In order to optimize the reliability function and average time before a failure of the defender hardware-redundant technical systems in the process of the conflict, the author in this work proposes mathematical models for solving of these problems under different strategies for the use of the reserve units instead of the faulty ones. These strategies boil down to a targeted redundant power distribution between the main units of the technical system prior to the beginning of a conflict and dynamic reallocation of them in the process of conflict for achievement of the tasks, set before the technical system in a confrontation with the enemy. For implementation of these strategies the author proposes a method for computing of the corresponding vectors of redundancy and sequence of moments of redistribution of the reserve units between the main ones in the process of a conflict. Numerical algorithms were developed for solving of four problems of optimization of reliability of the considered technical system in the process of the conflict by selection of an appropriate backup strategy, convenient for implementation with the help of modern personal computers.

Keywords: *mathematical model, numerical algorithm, conflict situation, optimization of reliability, protection strategy*

For citation:

Potapov V. I. Tasks and Numerical Algorithms for Optimization of Reliability of the Hardware-Redundant Technical Systems in a Conflict Situation under Different Strategies for Protection Against Enemy Attacks, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 9, pp. 617—624.

DOI: 10.17587/mau.16.617-624

References

1. **Saati T**. *Matematicheskie modeli konfliktnyh situatsii* (Mathematical models of conflict situations), Moscow, Sov. radio, 1977, 304 p.
2. **Petrosyan L. A., Zenkevich N. A.** *Optimal'nyi poisk v usloviyakh konflikta* (Optimal search in conflict), Leningrad, Publishing house of Leningrad state University, 1987, 77 p.
3. **Gorelik V. A., Gorelov M. A., Kononenko A. F.** *Analyz konfliktnykh situatsii v sistemakh upravleniya* (The analysis of conflict situations in management systems), Moscow, Radio and communication, 1991, 288 p.
4. **Aubin Y.** Optima and Equilibria. B.: Springer, 1993, 417 p.
5. **Theodore L. Turocy, Bernhard von Stengel.** Game Theory. Texas A & M University, London School of Economics, 2001, 39 p.
6. **Danilov N. N.** Game-theoretic modeling of conflict situations, Tomsk, Publishing house of TSU, 2005, 445 p.
7. **Wypasek V. I.** Modeling of armed conflict: prospects, *Military Thought*, 2009, no. 7, pp. 12—21.
8. **Galaev A. A., Maslov E. P., Rubinovich E. Y.** A problem of motion control of an object in a conflict environment, *Izv. Theory and Control Systems*, 2009, no. 3, pp. 134—140.
9. **Culiver S. G.** Modeling of conflict situations with inconsistent performances from agent-based games on a linear cognitive maps, *Problems of Management*, 2010, no. 4, pp. 42—48.
10. **Gubanov D. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G.** Social networks: models of information influence, control and conflict, Moscow, Fizmatlit, 2010, 244 p.
11. **Flesch Y., Schoenmakers G., Vrieze O. J.** Loss of skills in coordination games, *Int. J. Game Theory,* 2011, no. 40, pp. 769—789.
12. **Dobrovidov A. V., Kulida E. A., Rudko I. M.** Choice of a trajectory of the object in conflict, *Problems of Management*, 2011, no. 2, pp. 64—75.
13. **Sergeev S. M.** Antagonistic differential game modeling commercial networks, *Vestnik TSU,* 2012, vol. 17, iss. 3, pp. 872—874.
14. **Potapov V. I.** Mathematical model and algorithm of optimal control of a movable object in a conflict situation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 16—22.
15. **Wentzel E. S.** Operations Research, Moscow, Sov. radio, 1972, 550 p.
16. **Kozlov B. A., Ushakov I. A.** Guide for the calculation of reliability of radio electronics and automation, Moscow, Sov. radio, 1975, 472 p.
17. **Potapov V. I., Brothers S. G.** New optimization problem of redundant systems, Irkutsk, Publishing house of Irkut. University press, 1986, 112 p.