УДК 681.5 DOI: 10.17587/mau.16.515-522

А.А. Кабанов, канд. техн. наук, зав. кафедрой, KabanovAleksey@gmail.com,
Севастопольский государственный университет, г. Севастополь

Приближенная линеаризация обратной связью на основе сингулярно возмущенного подхода[1]

Рассматривается вопрос синтеза приближенной линеаризирующей обратной связи на основе сингулярно возмущенного представления системы. Идея разработанного метода основана на декомпозиции исходной системы и решении задач синтеза линеаризирующей обратной связи для подсистем, полученных в результате этого разделения. При этом для упрощения процесса декомпозиции предлагается сначала линеаризовать часть системы, описывающую движение быстрых переменных состояния. Показаны примеры применения разработанного метода.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенная система, приближенная линеаризация обратной связью, композиционное управление, робастная устойчивость*

Введение

Линеаризация с помощью обратной связи (feedback linearization) является эффективным методом синтеза нелинейных систем управления [1—4]. Идея метода заключается в том, что посредством обратной связи исходная нелинейная система преобразовывается в линейную, записанную в канонической форме, к которой затем применяются методы теории линейных систем управления.

Применимость метода внешней линеаризации гарантируется соблюдением строгих условий управляемости и инволютивности для рассматриваемой нелинейной системы, что не всегда имеет место. В такой ситуации используют методы приближенной линеаризации обратной связью (approximate feedback linearization) [5—9]. Наиболее широкое распространение для приближенной линеаризации получил подход, основанный на разложении исходной системы в ряд Тейлора [5, 6]. Другой подход, представленный в работах [7, 8], базируется на применении динамической обратной связи и понятии d-относительной степени, где d — некоторое целое число. Здесь основная идея состоит в преобразовании уравнений динамики системы к линейной форме, к которой добавляются дополнительные члены более высокого порядка, чем заданное целое число d. Главный недостаток такого решения связан с повышением порядка системы и порядка динамической обратной связи. С учетом этого в работе [9] представлен противоположный способ приближенной линеаризации, опирающийся на представлении системы в сингулярно возмущенном виде и разделении движений на быстрые и медленные.

При математическом описании сингулярно возмущенных (СВ) систем используют малые параметры, которые выступают множителем при старших производных в уравнении состояния системы [10—12]. При этом разнотемповость движений может быть обусловлена разными физическими факторами, например, наличием малых масс или моментов инерции, больших коэффициентов усиления и др. Так, в работе [9] для приведения системы к сингулярно возмущенному виду применяется обратная связь с большим коэффициентом усиления.

Задаче линеаризации обратной связью нелинейных СВ систем посвящены работы [13—18]. В работах [13, 14] рассматривается задача линеаризации обратной связью так называемой медленной подсистемы, а не всей системы целиком. Этот непрямой подход основан на редукции исходной нелинейной СВ системы с последующей линеаризацией медленной подсистемы. Развитие данных результатов показано в работах [15, 16], где на основе решений задач внешней линеаризации для медленной и быстрой подсистем строится композиционное управление для исходной нелинейной СВ системы. Основное ограничение описанных выше результатов связано с классом рассматриваемых систем — СВ систем с линейным вхождением вектора быстрых переменных в уравнение системы. Это связано, в первую очередь, с выполнимостью условий теоремы Тихонова. В работах [17, 18] для систем с нелинейной зависимостью и по медленным и по быстрым переменным состояния авторами предложен диффеоморфизм, независящий от малого сингулярно возмущающего параметра, преобразующий исходную нелинейную СВ систему к специальному линейному виду (не каноническому), при этом преобразующий диффеоморфизм также строится отдельно для быстрых и медленных движений системы. В работе [9] подобные результаты были получены для систем, которые изначально не содержат сингулярно возмущающих параметров. Здесь для приведения системы к СВ виду вводится специальное преобразование, параметры которого связаны с большим коэффициентом усиления в обратной связи для переменных состояния, которые считаются быстрыми. Таким образом, если исходная система представима в СВ виде, то декомпозицию и построение диффеоморфизмов отдельно для медленных и быстрых движений можно использовать

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-06859).

как средство синтеза приближенной линеаризирующей обратной связи.

В данной работе предлагается метод приближенной линеаризации обратной связью для нелинейных СВ систем, основанный на разделении исходной системы и построении линеаризирующего управления в виде композиции линеаризирющих управлений для медленных и быстрых движений. При этом основная сложность, которая возникает при разделении движений, связана с выполнимостью условий теоремы Тихонова для исходной нелинейной СВ системы, в частности, с разрешимостью нелинейного относительно быстрых переменных состояния алгебраического уравнения, которое возникает в результате пренебрежения малым параметром. Для преодоления этого в статье предлагается сначала выполнить линеаризацию с помощью обратной связи для части системы, описывающей быстрые движения. При этом быстрое управление выбирается так, чтобы условия теоремы Тихонова выполнялись. Затем, используя стандартную методику теории сингулярных возмущений, получаем систему только медленных движений, для которой далее также решается задача линеаризации обратной связью.

Статья построена следующим образом: первый раздел содержит постановку задачи управления; второй раздел содержит ряд математических определений, которые используются в статье; решение задачи синтеза приближенной линеаризирующей обратной связи показано в третьем разделе; примеры синтеза на основе разработанного метода приводятся в четвертом разделе; в заключении представлены основные выводы.

1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная сингулярно возмущенная система вида

$$\dot{x}(t) = F(x, z, u),\ x(0) = x^0,\ y = \varphi(x), \tag{1}$$

$$\varepsilon\dot{z}(t) = f(x, z) + g(x, z)u,\ z(0) = z^0, \tag{2}$$

где $x \in R^{n_1}$, $z \in R^{n_2}$ — переменные состояния; $y, u \in R^1$ — выход и управление соответственно; F, f и g — равномерно непрерывные и ограниченные гладкие векторные функции с достаточным числом производных по всем аргументам; $\varepsilon > 0$ — малый параметр (сингулярное возмущение).

Требуется найти управление u и преобразование $T(x, z)$, не зависящие от параметра ε и такие, что при достаточно малом ε система (1), (2) может быть приближенно (с точностью до $O(\varepsilon)$) преобразована к линейному виду относительно скалярного выхода $y = \varphi(x)$.

2. Предварительные сведения

Приведем основные определения, которые будут использоваться далее [9]. Пусть $\varphi(x, z)$: $D_x \times D_z \to R$ — гладкая функция и $f(x, z)$ — гладкое векторное поле на множестве $D_x \times D_z \to R^n$. Скалярная функция, определенная как

$$L_f\varphi(x, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x, z),$$

называется производной Ли от скалярной функции вдоль векторного поля f.

Пусть $f(x, z)$ и $g(x, z)$ — гладкие векторные поля на множестве $D_x \times D_z \to R^n$. Векторное поле вида

$$[f(x, z), g(x, z)] = ad_f g(x, z) = \frac{\partial g}{\partial x}f(x, z) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x, z),$$

называется производной Ли от вектора g вдоль векторного поля f или скобкой Ли.

Также используются обозначения для производной Ли порядка k:

$$L_f^0\varphi(x, z) = \varphi(x, z),\ ad_f^0 g(x, z) = g(x, z),$$

$$L_gL_f = L_g(L_f),\ L_f^k = L_f(L_f^{k-1}),\ ad_f^k = ad_f(ad_f^{k-1}),$$
$$k = 2, 3, \dots .$$

3. Приближенная линеаризация обратной связью

Пусть система (1), (2) удовлетворяет следующему условию:

У1. Существует функция $T_{f1}(x, z)$ такая, что для всех (x, z) справедливы соотношения

$$L_gL_f^{i-1}T_{f1}(x, z) = 0,\ i = \overline{1, n_2 - 1};$$

$$L_gL_f^{n_2-1}T_{f1}(x, z) \ne 0.$$

Лемма 1. При выполнении условия У1 существует диффеоморфизм

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n_2} \end{pmatrix} = \xi = T_f(x, z) = \begin{pmatrix} T_{f1}(x, z) \\ \vdots \\ L_f^{n_2-1}T_{f1}(x, z) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

который преобразует соотношение (2) к виду

$$\varepsilon\dot{\xi}(t) = A_{fc}\xi + B_{fc}a_f(x, z)(u - b_f(x, z)) + \\ + \varepsilon\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial x}F(x, z, u), \tag{4}$$

где (A_{fc}, B_{fc}) — каноническая пара в форме Бруновского и

$$a_f(x, z) = L_gL_f^{n_2-1}T_{f1}(x, z),$$

$$b_f(x, z) = \frac{-L_f^{n_2}T_{f1}(x, z)}{a_f(x, z)}.$$

Доказательство. Используя соотношение (3), вычислим производную $\dot{\xi}$:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\partial T_f(x, z)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}\dot{z} = \varepsilon^{-1}\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}f(x, z) +$$

$$+ \varepsilon^{-1}\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}g(x, z)u + \frac{\partial T_f(x, z)}{\partial x}F(x, z, u).$$

Следуя определению производной Ли (см. раздел 2), перепишем $\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}f(x, z)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}f(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{f1}(x, z)}{\partial z}f(x, z) \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n_2-2}T_{f1}(x, z)}{\partial z}f(x, z) \\ \frac{\partial L_f^{n_2-1}T_{f1}(x, z)}{\partial z}f(x, z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_f T_{f1}(x, z) \\ \vdots \\ L_f^{n_2-1}T_{f1}(x, z) \\ L_f^{n_2}T_{f1}(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n_2} \\ L_f^{n_2}T_{f1}(x, z) \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом получаем соотношение для $\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}g(x, z)$:

$$\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}g(x, z) =$$

$$= \begin{pmatrix} L_g T_{f1}(x, z) \\ \vdots \\ L_g L_f^{n_2-2}T_{f1}(x, z) \\ L_g L_f^{n_2-1}T_{f1}(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_g L_f^{n_2-1}T_{f1}(x, z) \end{pmatrix}.$$

Последние выкладки показывают, что (2) приводится к виду (4).

Теперь покажем, что отображение $T_f(x, z)$ является диффеоморфизмом. Для этого найдем матрицу Якоби системы

$$J(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_f(x, z)}{\partial x} & \frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Если матрица Якоби $J(x, z)$ отображения $T_f(x, z)$ имеет максимальный возможный ранг, то это отображение будет невырожденным [1], т. е. $T_f(x, z)$ является невырожденным преобразованием, если

$$\operatorname{rank} J(x, z) = \min(n_2, n) = n_2, \quad (5)$$

что имеет место при невырожденности $\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}$.

По аналогии с работой [19] покажем, что для всех $(x, z) \in D_x \times D_z$ и для всех целых $k \geqslant 0$ и j: $0 \leqslant j \leqslant n_2 - k - 1$ справедливо

$$L_{ad_f^j g} L_f^k T_{f1}(x, z) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leqslant j + k < n_2 - 1; \\ L_g L_f^{n_2-1} T_{f1}(x, z) \neq 0, & j + k = n_2 - 1. \end{cases} \quad (6)$$

Используя тождество Якоби, перепишем левую часть из (6)

$$L_{ad_f^j g} L_f^k T_{f1}(x, z) =$$

$$= L_f L_{ad_f^{j-1} g} L_f^k T_{f1}(x, z) - L_{ad_f^{j-1} g} L_f^{k+1} T_{f1}(x, z). \quad (7)$$

При $j = 0$ согласно условию У1 из соотношения (7) получаем

$$L_{ad_f^0 g} L_f^k T_{f1}(x, z) = L_g L_f^k T_{f1}(x, z) = 0,\ 0 \leqslant k < n_2 - 1.$$

При $j = 1$ согласно условию У1 из соотношения (7) получаем

$$L_{ad_f^1 g} L_f^k T_{f1}(x, z) = L_f L_g L_f^k T_{f1}(x, z) -$$

$$- L_g L_f^{k+1} T_{f1}(x, z) = 0,\ 0 \leqslant 1 + k < n_2 - 1.$$

Рассчитаем (7) для некоторого j. Сначала заметим, что условие У1 эквивалентно требованию [4]

$$L_g L_f^{i-1} T_{f1}(x, z) = L_{ad_f^{i-1} g} T_{f1}(x, z) = 0,\ i = \overline{1, n_2 - 1};$$

$$L_g L_f^{n_2-1} T_{f1}(x, z) = L_{ad_f^{n_2-1} g} T_{f1}(x, z) \neq 0.$$

Следовательно, для первого слагаемого в соотношении (7) справедливо

$$L_f L_{ad_f^{j-1} g} L_f^k T_{f1}(x, z) = L_f L_g L_f^{k+j-1} T_{f1}(x, z) = 0,$$
$$0 \leqslant j + k - 1 < n_2 - 1.$$

Для второго слагаемого получаем

$$L_{ad_f^{j-1} g} L_f^{k+1} T_{f1}(x, z) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leqslant j + k < n_2 - 1; \\ L_g L_f^{j+k} T_{f1}(x, z) \neq 0, & j + k = n_2 - 1. \end{cases}$$

Поскольку равенство (6) справедливо для $j = 0$, $j = 1$, для некоторого j, то согласно математической индукции верно и следующее утверждение с номером $j + 1$.

Для доказательства невырожденности $\dfrac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}$ рассмотрим матричное уравнение

$$\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}[g(x, z)\ \ldots\ ad_f^{n_2 - 1} g(x, z)] =$$

$$= \begin{bmatrix} L_g T_{f1}(x, z) & L_{ad_f g} T_{f1}(x, z) \ldots & \ldots & L_{ad_f^{n_2-1} g} T_{f1}(x, z) \\ L_g L_f T_{f1}(x, z) & \ldots & \ldots L_{ad_f^{n_2-2} g} T_{f1}(x, z) & * \\ \vdots & & & \vdots \\ L_g L_f^{n_2-1} T_{f1}(x, z) & * & \ldots\ \ldots & * \end{bmatrix}.$$

С учетом равенства (6) данная матрица принимает вид

$$\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}[g(x, z)\ \ldots\ ad_f^{n_2 - 1} g(x, z)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & \Delta \\ 0 & \vdots & \ldots & \Delta & * \\ \vdots & \Delta & & & \vdots \\ \Delta & * & \ldots & \ldots & * \end{bmatrix},$$

где Δ — ненулевой элемент, * — некоторый произвольный элемент. Поскольку данная матрица является невырожденной, то $\dfrac{\partial T_f(x, z)}{\partial z}$ также невырожденная и имеет полный ранг. Таким образом, доказано, что отображение $T_f(x, z)$ является диффеоморфизмом. ***Лемма доказана***.

Поскольку $T_f(x, z)$ является диффеоморфизмом, то существует обратное преобразование $T_f^{-1}(x, \xi)$, такое что $z = T_f^{-1}(x, \xi)$.

Применяя преобразование (3) и с учетом того, что $z = T_f^{-1}(x, \xi)$, перепишем систему (1), (2):

$$\dot{x}(t) = F(x, z, u)\big|_{z = T_f^{-1}(x, \xi)},\ x(0) = x^0,$$

$$\varepsilon\dot{\xi}(t) = A_{fc}\xi + B_{fc}a_f(x, z)(u - b_f(x, z)) + \\ + \varepsilon\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial x}F(x, z, u). \quad (8)$$

Следуя стандартной методике линеаризации обратной связью, выберем управление $u(x, z)$ в следующей форме:

$$u(x, z) = b_f(x, z) + a_f^{-1}(x, z)(G_f\xi - G_{f1}u_s(x)), \quad (9)$$

где матрица обратной связи $G_f = (G_{f1}\ \ldots\ G_{fn_2})$ выбирается так, чтобы матрица $(A_{fc} + B_{fc}G_f)$ была Гурвицевой, $u_s(x)$ — сигнал управления для медленной системы (будет определен ниже).

Подставляя соотношение (9) в систему (8), получаем (с учетом $z = T_f^{-1}(x, \xi)$)

$$\dot{x}(t) = F(x, \xi, u_s),\ x(0) = x^0,$$

$$\varepsilon\dot{\xi}(t) = (A_{fc} + B_{fc}G_f)\xi - \\ - B_{fc}G_{f1}u_s(x) + \varepsilon\frac{\partial T_f(x, z)}{\partial x}F(x, z, u). \quad (10)$$

Главное преимущество нелинейной СВ системы (10) над исходной системой (1), (2) заключается в том, что для системы (10) выполняются условия теоремы Тихонова, и, следовательно, движение медленных переменных x можно с точностью до $O(\varepsilon)$ описать вырожденной (медленной) системой, которая получается из исходной при $\varepsilon = 0$:

$$\bar{\xi} = (G_{f1}u_s(x)\ 0\ \ldots\ 0),$$

$$\dot{x}_s(t) = F_s(x_s, u_s) = F(x_s, \bar{\xi}, u_s),\ x_s(0) = x^0.$$

3.1. Линеаризация обратной связью медленной подсистемы. Рассматриваем систему для медленных переменных

$$\dot{x}_s(t) = F_s(x_s, u_s),\ x_s(0) = x^0. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение некоторую скалярную функцию $\varphi(x_s)$. Запишем производную Ли этой функции вдоль векторного поля $F_s(x_s, u_s)$:

$$L_{F_s}\varphi(x_s, u_s) = \frac{\partial\varphi(x_s)}{\partial x_s}F_s(x_s, u_s).$$

Для производных Ли более высоких порядков имеем

$$L_{F_s}^k\varphi(x_s, u_s) =$$

$$= \frac{\partial L_{F_s}^{k-1}\varphi(x_s, u_s)}{\partial x_s}F_s(x_s, u_s),\ L_{F_s}^0\varphi(x_s, u_s) = \varphi(x_s).$$

У2. Пусть система (11) имеет относительную степень $r = n_1$ в точке (x^0, u_s^0), что эквивалентно условиям [4]

$$\frac{\partial}{\partial u_s}L_{F_s}^k\varphi(x_s, u_s) = 0,\ \frac{\partial}{\partial u_s}L_{F_s}^r\varphi(x^0, u_s^0) \neq 0$$

для всех x_s в окрестности x^0, u_s в окрестности u_s^0 и всех $k < r$.

В силу условия У2 первые r производных Ли функции $\varphi(x_s)$ не зависят от управления явным образом:

$$L_{F_s}^k\varphi(x_s, u_s) = L_{F_s}^k\varphi(x_s),\ 0 \leqslant k \leqslant r - 1.$$

В условиях сделанных предположений существует диффеоморфизм [4]

$$T_s(x_s) = \{T_s^k(x_s)\},\ k = 1, 2, ..., r,$$

элементы которого имеют вид $T_s^k(x_s) = L_{F_s}^{k-1}\varphi(x_s)$, $1 \leqslant k \leqslant n_1$.

Определим вектор η, элементы которого выражаются через преобразование

$$\eta_1 = T_s^1(x_s) = L_{F_s}^0\varphi(x_s) = \varphi(x_s),$$

$$\eta_k = \dot\eta_{k-1} = T_s^k(x_s) = L_{F_s}^{k-1}\varphi(x_s),\ 2 \leqslant k \leqslant n_1.$$

Дифференцируя по t переменную η_{n_1}, получим

$$\dot\eta_{n_1} = \vartheta(\eta, u_s) = L_{F_s}^{n_1}\varphi(T_s^{-1}(\eta), u_s).$$

Линеаризирующий закон управления для системы (11) определяется через решение относительно u_s нелинейного уравнения

$$\vartheta(\eta, u_s) = \upsilon_s. \qquad (12)$$

У3. Пусть уравнение (12) имеет аналитическое решение

$$u_s = \psi(\eta, \upsilon_s). \qquad (13)$$

В силу условия У3 диффеоморфизм $T_s(x_s)$ и управление $u_s = \psi(\eta, \upsilon_s)$ преобразуют систему (11) к линейному каноническому виду

$$\dot\eta = A_{cs}\eta + B_{cs}\upsilon_s,$$

где (A_{cs}, B_{cs}) — каноническая пара в форме Бруновского; υ_s — внешний сигнал управления, который выберем в форме обратной связи

$$\upsilon_s = G_s\eta,$$

где коэффициенты матрицы G_s выбираются исходя из требования

$$\mathrm{Re}\lambda(A_{cs} + B_{cs}G_s) < 0.$$

С учетом соотношений (9) и (13) получаем окончательный вид линеаризирующего управления

$$u(x, z) = b_f(x, z) +$$
$$+ a_f^{-1}(x, z)(G_f\xi - G_{f1}\psi(\eta, \upsilon_s))\big|_{\eta = T_s(x),\ \xi = T_f(x, z)}. \qquad (14)$$

Теорема 1. При выполнении условий У1, У2 и У3 существует $\varepsilon^* > 0$, такое что $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ система (1), (2) с управлением (14) является устойчивой.

Доказательство. При выполнении условия У1 справедлива лемма 1, согласно которой существует диффеоморфизм (3), преобразующий систему (1), (2) к виду (8). Применение к системе (8) управления (14) приводит к нелинейной СВ системе

$$\begin{aligned} &\dot x(t) = F(x, z, \upsilon_s)\big|_{z = T_f^{-1}(x,\xi)},\ x(0) = x^0, \\ &\varepsilon\dot\xi(t) = (A_{fc} + B_{fc}G_f)\xi - B_{fc}G_{f1}\psi(\eta, \upsilon_s) + O(\varepsilon). \end{aligned} \qquad (15)$$

Поскольку быстрая и медленная подсистемы, соответствующие системе (15), устойчивы (это следует из процедуры построения регулятора), то согласно теореме Климушева—Красовского существует $\varepsilon^* > 0$, такое что $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ система (15) является устойчивой [10]. Поскольку диффеоморфизм $T_f(x, z)$ сохраняет устойчивость, то исходная система (1) и (2) также будет устойчивой $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$. ***Теорема доказана.***

Замечание 1 [15]. Отдельный класс систем, для которого вычисление быстрого управления не зависит от медленного, получается в случае, когда правая часть уравнения (2) линейно зависит от z:

$$f(x, z) + g(x, z)u = f_1(x) + f_2(x)z + g(x)u.$$

В этом случае быстрая подсистема будет иметь вид [10]

$$\dot z_f(\tau) = f_{22}(x)z_f + g(x)u_f.$$

Поскольку система (16) является линейной по быстрой переменной z_f и управлению u_f, то внешняя линеаризация не требуется. Стабилизирующее управление u_f выбирается в форме обратной связи

$$u_f = -G_f(x)z_f = -G_f(x)(z + f_{22}(x)^{-1}(f_{21}(x) + g_2(x)u_s),$$

где $G_f(x)$ рассчитывается так, чтобы

$$\mathrm{Re}\lambda(f_{22}(x) - g_2(x)G_f(x)) < 0,\ \forall x \in D.$$

Результирующее композиционное управление определяется путем суммирования быстрого и медленного управлений:

$$\begin{aligned} u = {} &(1 - G_f(x)f_{22}(x)^{-1}g_2(x))u_s - \\ &- G_f(x)(z + f_{22}(x)^{-1}f_{21}(x)). \end{aligned} \qquad (16)$$

Замечание 2. Композиционное управление (14) (или (16)) не зависит от малого параметра ε. Параметр ε может рассматриваться в роли неопределенности в системе [20], и в этом смысле система (1) с регулятором (14) (или (16)) будет обладать робастными свойствами при условии устойчивости медленной и быстрой подсистем, чего можно достичь соответствующим выбором u_f и u_s.

При соответствующем выборе коэффициентов регулятора можно добиться полной робастной устойчивости к параметру сингулярных возмущений ($\varepsilon^* = \infty$) [21], что можно использовать при синтезе управления для невозмущенных систем путем фиктивного введения параметра возмущений ε. Кроме того, для случая систем с $\varepsilon > 1$ (или с фиктивным параметром) построение асимптотики композиционного регулятора можно реализовать на основе Паде-аппроксимации, которая позволяет получить асимптотические приближения как при больших, так и при малых значениях параметра возмущений [22].

4. Примеры применения разработанного метода

Пример 1 [18]. Рассматриваем систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 + z_z; \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1) + z_1 + x_2 z_2^2 + u; \\ \varepsilon \dot{z}_1 &= (1 + 0{,}5\sin x_1)(-x_1 + z_2); \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= x_2^2 + z_2^2 + u. \end{aligned} \quad (17)$$

Быстрая подсистема имеет вид

$$\varepsilon \dot{z}_1 = (1 + 0{,}5\sin x_1)(-x_1 + z_2),$$

$$\varepsilon \dot{z}_2 = x_2^2 + z_2^2 + u.$$

Выбирая $T_{f1}(x, z) = z_1$, получаем быстрый диффеоморфизм из (3)

$$T_f(x, z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ (1 + 0{,}5\sin x_1)(-x_1 + z_2) \end{pmatrix} \quad (18)$$

и соответствующее управление из (9)

$$u(x, z) = -x_2^2 - z_2^2 + \\ + (1 + 0{,}5\sin x_1)^{-1}(G_f \xi - G_{f1} u_s(x)). \quad (19)$$

Применяя диффеоморфизм (18) и управление (19) к системе (17), устремляя $\varepsilon \to 0$, получим медленную подсистему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 + 2x_1; \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 + x_2 x_1^2 - x_2^2 - x_1^2 + u_s. \end{aligned} \quad (20)$$

Решая задачу линеаризации обратной связью для медленной подсистемы (20), определяем медленное управление

$$\begin{aligned} u_s &= x_2^2 - x_1^2 x_2 - \sin x_1 - x_2 - x_1 - \\ &- 2x_1^2 - 2x_1(x_1^2 + x_2) + \upsilon_s); \\ \upsilon_s &= G_{S1}\eta_1 + G_{S2}\eta_2; \\ \eta_1 &= x_1,\ \eta_2 = x_1^2 + x_1 + x_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Искомое композиционное управление получаем подстановкой (21) в соотношение (19).

Результаты моделирования системы (17) с регулятором (21), (19) при $G_{f1} = -1$, $G_{f2} = -2$ и $G_{s1} = -10$, $G_{s2} = -4$ и разных значениях параметра возмущений ($\varepsilon = 0{,}01$, $\varepsilon = 100$) показаны на рис. 1. Из результатов видно, что система хорошо отрабатывает задающий сигнал, при этом является робастно устойчивой по отношению к параметру ε.

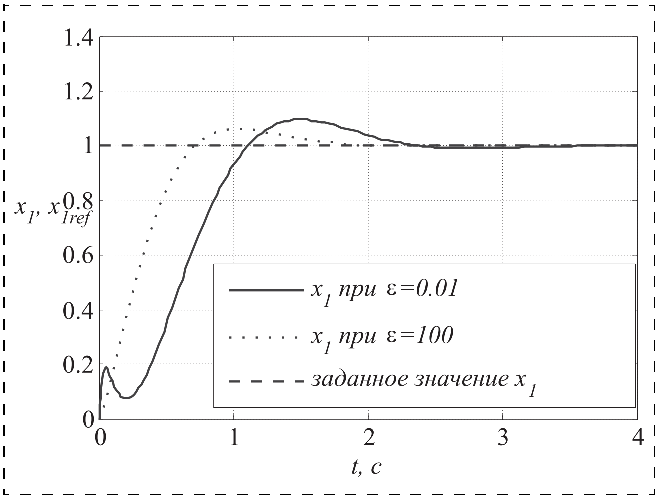

Рис. 1. Изменения координаты x_1 системы (17) при разных значениях параметра ε

Пример 2. Рассматриваем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 - x_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - u; \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 - x_3 + u \end{aligned} \quad (22)$$

с выходом $h(x) = x_1$. Система (22) имеет относительную степень 2, следовательно, ее нельзя полностью линеаризовать.

Применим разработанный метод. Введем в систему (22) параметр ε фиктивно, считая, что x_1 является медленной переменной, а x_2 и x_3 — быстрые переменные. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим медленную подсистему

$$\dot{x}_s = x_s^2 + 2u_s, \quad (23)$$

и быструю подсистему

$$\begin{aligned} \dot{x}_{f2} &= -x_{f2} - u_f; \\ \dot{x}_{f3} &= -x_{f3} + u_f. \end{aligned} \quad (24)$$

Решая задачи синтеза линеаризирующей обратной связи для медленной системы (23), получаем $u_s = -0{,}5x_1^2 + \upsilon_s$.

Внешнее управление υ_s удобно реализовать в виде пропорционального регулятора по ошибке слежения, т. е. $\upsilon_s = k_p e$, $e = x_{1ref} - x_1$.

Быстрое управление u_f для системы (24) выбираем в форме обратной связи:

$$u_f = (G_{f3} - G_{f2})u_s - G_{f2}x_2 - G_{f3}(x_3 - x_1^2),$$

где G_{f2}, G_{f3} — коэффициенты обратной связи.

Результирующее композиционное управление согласно (16) будет равно

$$u = (1 - G_{f2} + G_{f3})(-0{,}5x_1^2 + \upsilon_s) - \\ - G_{f2}x_2 - G_{f3}(x_3 - x_1^2). \quad (25)$$

Результаты моделирования системы (22) с регулятором (25) при $G_{f2} = -10^4$, $G_{f3} = 10^4$, $k_p = 10$ и $\varepsilon = 1$ показаны на рис. 2. Задающий сигнал взят в форме прямоугольных импульсов с амплитудой 2 и частотой 1 Гц. На рис. 2 также показан переходный процесс для переменной x_1 при $\varepsilon = 500$ (пунктир-

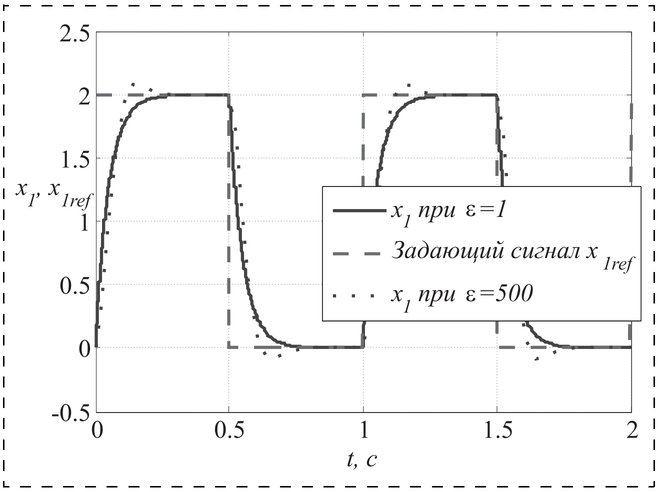

Рис. 2. Изменения координаты x_1 системы при разных значениях параметра ε

ная линия). Из результатов видно, что система хорошо отрабатывает задающий сигнал, при этом является робастной по отношению к параметру ε, который был введен фиктивно.

Заключение

В настоящей работе для класса нелинейных сингулярно возмущенных систем разработан метод синтеза приближенной линеаризирующей обратной связи. Преимущество данного метода заключается в упрощении исходной задачи линеаризации обратной связью путем ее декомпозиции на две подзадачи: отдельно для медленной подсистемы и отдельно для быстрой. При этом для обеспечения условий декомпозиции системы с помощью стандартной техники теории сингулярных возмущений сначала выполняется линеаризация обратной связью быстрой подсистемы. Это позволяет достичь соблюдения условий теоремы Тихонова и выразить медленную подсистему, для которой затем также решается задача линеаризации. Результирующее управление определяется в виде композиции управлений для медленной и быстрой подсистем. Полученное таким образом композиционное управление не зависит от параметра сингулярных возмущений и наделяет систему робастными свойствами относительно этого параметра. Данный факт позволяет использовать разработанный метод для синтеза невозмущенных систем. В такой ситуации параметр возмущений вводится фиктивно для реализации процедуры декомпозиции, при этом одной из целей последующего синтеза является достижение робастной устойчивости системы для больших значений параметра возмущений (ε > 1).

Предложенный в статье подход эффективен и в случаях, когда исходная нелинейная система целиком нелинеаризируема с помощью обратной связи. Разделение системы, решение укороченных (редуцированных) подзадач и асимптотическая композиция этих решений выступают естественным способом упрощения исходной полной задачи синтеза на основе внешней линеаризации.

Эффективность разработанного метода как для сингулярно возмущенных систем, так и для невозмущенных систем показана на примерах. В обоих случаях у синтезированной замкнутой системы наблюдаются робастные свойства по отношению к параметру возмущений.

Список литературы

1. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
2. **Sastry S.** Nonlinear systems: analysis, stability, and control. New York: Springer-Verlag, 2010.
3. **Isidori A.** Nonlinear control systems. New York: Springer-Verlag, 1995.
4. **Henson M. A., Seborg D. E.** Nonlinear process control. New Jersey: Prentice hall, 1997. 432 p.
5. **Guardabassi G. O., Savaresi S. M.** Approximate linearization via feedback: an overview // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 1—15.
6. **Krener A. J.** Approximate linearization by state feedback and coordinate change // System & Control Letters. 1984. N 5. P. 181—185.
7. **Kang W., Krener A. J.** Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of nonlinear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 1992. N. 30. P. 1319—1337.
8. **Kang W.** Approximate linearization of nonlinear control systems / W. Kang // Systems & Control Letters. 1994. Vol. 23. P. 43—52.
9. **Son J.-W., Lim J.-T**. Stabilization of Approximately Feedback Linearizable Systems Using Singular Perturbation // IEEE Trans. on Automatic Control. 2008. Vol. 53, N 6. P. 1499—1503.
10. **Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.** Singular perturbation methods in control: analysis and design. Orlando: Academic Press, 1986. 371 p.
11. **Naidu D. S.** Singular Perturbation Methodology in Control Systems. L.: P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1988. 304 p.
12. **Дмитриев М. Г., Курина Г. А**. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3—51.
13. **Khorasani K.** On Linearization of Nonlinear Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1987. Vol. 32, N 3. P. 256—260.
14. **Khorasani K.** A Slow Manifold Approach to Linear Equivalents of Nonlinear Singularly Perturbed Systems // Automatica. 1989. Vol. 25, N 2. P. 301—306.
15. **Кабанов А. А.** Композиционный синтез нелинейных сингулярно возмущенных систем на основе метода линеаризации обратной связью // Тр. X Междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'15. Москва, 26—29 января 2015 г. М.: Изд. ИПУ РАН, 2015. С. 548—556.
16. **Кабанов А. А.** Управление нелинейными сингулярно возмущенными системами на основе метода линеаризации обратной связью // Матер. 4-го науч.-техн. семинара "Современные проблемы прикладной математики, информатики, автоматизации и управления", 23—27 сентября 2014 г., г. Севастополь. М.: Изд-во ИПИ РАН, 2014. С. 62—69.
17. **Choi H.-L., Shin Y.-S., Lim J.-T.** Control of nonlinear singularly perturbed systems using feedback linearization // IEE Proc.-Control Theory Appl. 2005. Vol. 152, N 1. P. 91—94.
18. **Son J.-W., Lim J.-T**. Feedback linearization of nonlinear singularly perturbed systems with non-separate slow-fast dynamics // IET Control Theory Appl. 2008. Vol. 2, N 8. P. 728—735.
19. **Khalil H. K.** Nonlinear systems. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 750 p.
20. **Дубовик С. А., Кабанов А. А.** Мера устойчивости к сингулярным возмущениям и робастные свойства линейных систем // Проблемы управления и информатики. 2010. Вып. 3. С. 17—28.
21. **Кабанов А. А.** Синтез робастных систем стабилизации на основе теории сингулярных возмущений // Оптимизация произв. процессов: сб. науч. тр. Севастополь: изд-во СевНТУ, 2013. Вып. 14. С. 73—79.

Approximate Feedback Linearization Based on the Singular Perturbations Approach

A. A. Kabanov, KabanovAleksey@gmail.com ✉,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: **Kabanov Aleksey A.,** Ph. D.,
Head of Department of Informatics and Control in Technical Systems,
Sevastopol State University, 33, Universitetskaya St., Sevastopol, 299053, Russian Federation,
e-mail: KabanovAleksey@gmail.com

Received on February 20, 2015
Accepted March 06, 2015

One of the most common methods of synthesis of the nonlinear control systems is the method of a feedback linearization (FL). The idea of this method consists in conversion of the original nonlinear system into a linear one by means of a state feedback and coordinate transformation. Then, the methods of control theory for the linear systems are used for the system design. If the original nonlinear system cannot be linearized exactly by the state feedback, the method of the approximate feedback linearization (AFL) is used. The essence of AFL method lies in the feedback linearization only of a certain part of the original nonlinear system (not of the entire system). In this paper, the author proposes a method of an approximate feedback linearization control of the nonlinear singularly perturbed (SP) systems. The proposed method is based on a decomposition of the original SP system and construction of AFL control in the form of composite FL controls for the slow and fast subsystems. In general, a nonlinear SP system cannot be easily separated into slow and fast subsystems, because the conditions of Tikhonov theorem are not complied. In order to overcome this, the author proposes to perform the feedback linearization method at first for the system's part, which describes the fast state variables. Thus, a fast control is chosen, so that the conditions of Tikhonov theorem would be met. Then, using a standard singular perturbation technique, we obtain a slow subsystem. Further the problem of FL control for a slow subsystem is solved. The resulting AFL control is obtained in the form of a composite control. Application of the proposed approach is illustrated with two examples.

Keywords: *singularly perturbed system, approximate feedback linearization, composite control, robust stability*

Acknowledgements: This work was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project No. 15-08-06859.

For citation:

Kabanov A. A. Approximate Feedback Linearization Based on the Singular Perturbations Approach, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2015, vol. 16, no. 8, pp. 515—522.

DOI: 10.17587/mau.16.515-522

References

1. **Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L.** *Nelineinoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* (Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems), St. Petersburg, Nauka, 2000, 549 p. (in Russian).
2. **Sastry S.** Nonlinear systems: analysis, stability, and control, New York, Springer-Verlag, 2010, 667 p.
3. **Isidori A.** Nonlinear control systems, London, Springer-Verlag, 1995, 293 p.
4. **Henson M. A., Seborg D. E.** Nonlinear process control, New Jersey, Prentice hall, 1997, 432 p.
5. **Guardabassi G. O., Savaresi S. M.** Approximate linearization via feedback: an overview, *Automatica*, 2001, vol. 37, pp. 1—15.
6. **Krener A. J.** Approximate linearization by state feedback and coordinate change, *System & Control Letters*, 1984, no. 5, pp. 181—185.
7. **Kang W., Krener A. J.** Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of nonlinear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1992, no. 30, pp. 1319—1337.
8. **Kang W.** Approximate linearization of nonlinear control systems, *Systems & Control Letters*, 1994, vol. 23, pp. 43—52.
9. **Son J.-W., Lim J.-T.** Stabilization of Approximately Feedback Linearizable Systems Using Singular Perturbation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no. 6, pp. 1499—1503.
10. **Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.** *Singular perturbation methods in control: analysis and design*, Orlando, Academic Press, 1986, 371 p.
11. **Naidu D. S.** Singular Perturbation Methodology in Control Systems, London, P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1988, 304 p.
12. **Dmitriev M. G., Kurina G. A.** Singular perturbations in control problems, *Automation and Remote Control*, vol. 67 (1), 2006, pp. 1—43.
13. **Khorasani K.** On Linearization of Nonlinear Singularly Perturbed Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1987, vol. 32, no. 3, pp. 256—260.
14. **Khorasani K.** A Slow Manifold Approach to Linear Equivalents of Nonlinear Singularly Perturbed Systems, *Automatica*, 1989, vol. 25, no. 2, pp. 301—306.
15. **Kabanov A. A.** *Kompozitsionnyi sintez nelineinykh singulyarno vozmushchennykh sistem na osnove metoda linearizatsii obratnoi svyaz'yu* (Compositional synthesis of nonlinear singularly perturbed systems based on feedback linearization method), *Trudy X Mezhdunarodnoi konferentsii "Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya" SICPRO'15*, Moscow, 2015, pp. 548—556 (in Russian).
16. **Kabanov A. A.** *Upravlenie nelineinymi singulyarno vozmushchennymi sistemami na osnove metoda linearizatsii obratnoi svyaz'yu* (Management of nonlinear singularly perturbed system based on feedback linearization method), *Materialy 4-go nauchno-tekhnicheskogo seminara "Sovremennye problemy prikladnoi matematiki, informatiki, avtomatizatsii i upravleniya"*, Sevastopol, 2014, pp. 62—69 (in Russian).
17. **Choi H.-L., Shin Y.-S., Lim J.-T.** Control of nonlinear singularly perturbed systems using feedback linearization, *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 2005, vol. 152, no. 1, pp. 91—94.
18. **Son J.-W., Lim J.-T.** Feedback linearization of nonlinear singularly perturbed systems with non-separate slow-fast dynamics, *IET Control Theory Appl.* 2008, vol. 2, no. 8, pp. 728—35.
19. **Khalil H. K.** *Nonlinear systems,* 3rd ed., New Jersey, Prentice Hall, 2002, 750 p.
20. **Dubovik S. A., Kabanov A. A.** A Measure of Stability Against Singular Perturbations and Robust Properties of Linear Systems, *Information on Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 42, iss. 6, 2010, pp. 55—66.
21. **Kabanov A. A.** *Sintez robastnykh sistem stabilizatsii na osnove teorii singulyarnykh vozmushchenii* (Synthesis of robust stabilization systems based on singular perturbation), *Optimizatsiya Proizv. Protsessov*, 2013, vol. 14, pp. 73—79 (in Russian).