

6. **Bobyř M. V., Titov V. S., Akul'shin G. Yu.** *Vliyanie chisla pravil na obuchenie nechetko-logicheskoi sistemy* (Effect of number rule on training of fuzzy-logic systems), *Vestnik Komp'yuternykh i Informatsionnykh Tekhnologii*, 2014, № 11 (125), pp. 28–35 (in Russian).
7. **Titov V. S., Bobyř M. V., Antsiferov A. V.** *Adaptivnyi mul'ti-setevoi algoritm nechetko-logicheskogo vyvoda v zadachakh upravleniya oborudovaniem s ChPU* (Adaptive Multineuro Algorithm Fuzzy-Logic Inference in the Tasks Control of the Equipment with CNC), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2013, no. 5, pp. 18–23 (in Russian).
8. **Emel'yanov S. G., Titov V. S., Bobyř M. V.** *Adaptivnye nechetko-logicheskie sistemy upravleniya* (Adaptive Fuzzy Logic Control System), Moscow, ARGAMAK-MEDIA, 2013, 184 p. (in Russian).
9. **Titov V. S., Bobyř M. V., Antsiferov A. V.** *Algoritm vysokoskorostnoi obrabotki detalei na osnove nechetkoi logiki* (Automated System of the High-Speed Detail Processing), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 6, pp. 21–26 (in Russian).
10. **Emel'yanov S. G., Bobyř M. V., Antsiferov A. V.** *Algoritm samoobucheniya adaptivnykh neuro-nechetkikh sistem na osnove myagkikh vychislenii* (Self-developed algorithm adaptive neuro-fuzzy systems based on soft computing), *Informatsionno-Izmeritel'nye i Upravlyayushchie Sistemy*, 2013, vol. 11, no. 8, pp. 003–009 (in Russian).
11. **Titov V. S., Bobyř M. V., Belomestnaya A. L.** *Intel'kturnaya sistema upravleniya podachei pri obrabotke detalei rezaniem* (Intellectual Control System of Feed at Cutting), *Promyshlennye ASU i Kontrollery*, 2010, no. 8, pp. 17–20 (in Russian).
12. **Emel'yanov S. G., Titov V. S., Bobyř M. V.** *Intel'kturnaya sistema na osnove nechetkoi logiki i myagkikh arifmeticheskikh operatsii* (Intelligent systems based on fuzzy logic and soft arithmetic operations), Moscow, ARGAMAK-MEDIA, 2014, 341 p. (in Russian).
13. **Bobyř M. V., Titov V. S., Belomestnaya A. L.** *Stabilizatsiya teplovogo rezhima v protsesse rezaniya* (Stabilisation of Thermal Modes in the Course of Cutting), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 6, pp. 38–41 (in Russian).
14. **Bobyř M. V., Titov V. S.** *Metod korrektsii parametrov rezhima rezaniya v sistemakh s ChPU* (Automated Control Systems Accuracy of Processing of Details with Usage of Methods of Fuzzy Logic), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 7, pp. 49–53 (in Russian).
15. **Bobyř M. V., Titov V. S., Milostnaya N. A., Globin P. V.** *Otsenka dostovernosti pri modelirovani nechetko-logicheskikh sistem* (The reliability of when modeling a fuzzy-logic systems), *Promyshlennye ASU i Kontrollery*, 2012, no. 7, pp. 32–38 (in Russian).
16. **Bobyř M. V.** *Modernizatsiya ASU oborudovaniem s ChPU na osnove apparata nechetkoi logiki* (Modernisation Of The Automated Control Systems By The Equipment With NPC On The Basis Fuzzy Logic), *Problemy Mashinostroeniya i Avtomatizatsii*, 2010, no. 2, pp. 40–43 (in Russian).
17. **Titov V. S., Bobyř M. V., Milostnaya N. A., Bobovnikov N. Yu.** *Ustroistvo dlya obrabotki detalei na oborudovanii s ChPU. Patent RF na izobretienie № 2309034* (Apparatus For Working Parts In Number Program Controlled Equipment) (in Russian).
18. **Titov V. S., Bobyř M. V., Milostnaya N. A.** *Ustroistvo vysokotochnoi obrabotki detalei na oborudovanii ChPU. Patent RF na izobretienie № 2280540* (Part High-Accuracy Working Apparatus In NC Machine Tools) (in Russian).
19. **Titov V. S., Bobyř M. V., Yakhontova E. S.** *Sposob i ustroistvo upravleniya tochnost'yu obrabotki detalei. Patent RF na izobretienie № 2379169* (Method And Device For Accuracy Control Of Details Treatment) (in Russian).
20. **Titov V. S., Bobyř M. V., Milostnaya N. A.** *Ustroistvo upravleniya tochnost'yu obrabotki detalei. Patent RF na izobretienie № 2288809* (Part Working Accuracy Control Apparatus) (in Russian).
21. **Titov V. S., Bobyř M. V., Milostnaya N. A.** *Analiz sistem upravleniya mashinostroitel'nykh oborudovaniem* (Analysis of control systems engineering equipment), *Promyshlennye ASU i Kontrollery*, 2009, no. 2, pp. 3–4 (in Russian).
22. **Bobyř M. V., Emel'yanov S. G., Milostnaya N. A.** *O nekotorykh svoystvakh modelirovaniya adaptivnykh neuro-nechetkikh sistem na osnove uproschennogo nechetko-logicheskogo vyvoda* (Some properties of the simulation of adaptive neuro-fuzzy systems based on a simplified fuzzy inference), *Informatsionno-Izmeritel'nye i Upravlyayushchie Sistemy*, 2014, vol. 12, no. 5, pp. 4–12 (in Russian).

УДК 531.38; 681.5

DOI: 10.17587/mau.16.456-463

**Е. И. Нелаева**, аспирант, LomovtsevaEI@yandex.ru,  
**Ю. Н. Челноков**, д-р физ.-мат. наук, проф., chelnokovyun@info.sgu.ru,  
 Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,  
 Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

## Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора<sup>1</sup>. Часть 2<sup>2</sup>

На примере стэнфордского манипулятора рассматривается методология решения обратной задачи кинематики с использованием бикватернионной теории кинематического управления. Разрабатывается алгоритм решения обратной задачи кинематики. Приводятся примеры численного решения обратной задачи кинематики для стэнфордского манипулятора, выявляющие зависимости численного решения от параметров задачи.

**Ключевые слова:** робот-манипулятор, бикватернион, кинематические уравнения, обратная задача кинематики

### 1. Постановка задачи

Рассматривается решение обратной задачи кинематики с использованием бикватернионной теории кинематического управления [1]. В качестве

модели движения стэнфордского манипулятора [2] используются кинематические уравнения движения манипулятора [3]

$$(\dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{d}_3 \ \dot{\varphi}_4 \ \dot{\varphi}_5 \ \dot{\varphi}_6)^T = A^{-1} \cdot (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3)^T, (1)$$

где  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 4, 5, 6$ ),  $d_3$  — обобщенные координаты манипулятора; матрица  $A$  является сложной функцией обобщенных координат;  $\omega_i$  и  $v_i$  — проекции угловой и линейной скоростей выходного

<sup>1</sup> Часть 1 опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление", № 6, 2015.

<sup>2</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00165).

звена манипулятора на оси связанной с ним системы координат. При этом входящие в уравнения проекции  $\omega_i$  и  $v_j$  угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора рассматриваются как управления и формируются в виде функций обобщенных координат манипулятора  $\varphi_i, d_3$ .

Используются два закона управления. При использовании закона управления в нормированных бикватернионах [1, 3] имеем:

$$\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} = \boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6} + s \mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6} = -(2K_{oc}^*/M_0^*)\mathbf{M}_{sc}^*; \quad (2)$$

$$\mathbf{M}^* = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^* = \bar{\mathbf{N}} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t), \quad (3)$$

где  $\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6}$  — отображение кинематического винта  $\mathbf{U}$  выходного звена на оси связанной с выходным звеном системы координат;  $\boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6}$  и  $\mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6}$  — векторы угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора, определенные своими компонентами в связанной с ним системе координат;  $s$  — символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством  $s^2 = 0$ ;  $K_{oc}^*$  — дуальный коэффициент усиления обратной связи;  $M_0^*$  и  $\mathbf{M}_{sc}^*$  — скалярная и винтовая части собственного бикватерниона ошибки положения выходного звена манипулятора  $\mathbf{M}^*$ ;  $\bar{\mathbf{N}} = \text{const}$  — бикватернион, характеризующий программное (требуемое) положение выходного звена;  $\boldsymbol{\Lambda}$  — бикватернион текущего положения схвата манипулятора, верхняя черта означает символ сопряжения.

Для закона управления в ненормированных бикватернионах имеем [1, 3]:

$$\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} = \boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6} + s \mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6} = K_{oc}^* T^{-1} \text{screw}(\bar{\mathbf{N}} \circ \mathbf{N});$$

$$\bar{\mathbf{N}} \circ \mathbf{N} = \bar{\mathbf{M}}^*; \quad (4)$$

$$2 \frac{dT}{dt} = K_{oc}^* [\text{scal}(\bar{\mathbf{N}} \circ \mathbf{N}) - T], \quad T(t_0) = 1, \quad (5)$$

где  $T$  — тензор (модуль) ненормированного бикватерниона положения выходного звена манипулятора, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (5);  $\text{screw}$  — винтовая часть бикватерниона,  $\text{scal}$  — скалярная часть бикватерниона.

Бикватернион конечного положения выходного звена манипулятора определяется через обобщенные координаты, и, конструктивные параметры манипулятора по формулам [3]

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_1 \circ \boldsymbol{\Lambda}_2 \circ \boldsymbol{\Lambda}_3 \circ \boldsymbol{\Lambda}_4 \circ \boldsymbol{\Lambda}_5 \circ \boldsymbol{\Lambda}_6; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_i = & \cos \frac{\alpha_i}{2} \cos \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) + \\ & + \sin \frac{\alpha_i}{2} \cos \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_1 + \\ & + \sin \frac{\alpha_i}{2} \sin \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_2 + \\ & + \cos \frac{\alpha_i}{2} \sin \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\Lambda}_i$  — бикватернионы относительных конечных перемещений звеньев манипулятора;  $\alpha_i, \theta_i, d_i$  (кроме  $d_3$ ) — конструктивные параметры звеньев манипулятора;  $\varphi_i, d_3$  — обобщенные координаты манипулятора;  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — векторные мнимые единицы Гамильтона.

## 2. Алгоритм численного решения обратной задачи кинематики

В случае использования закона управления в нормированных бикватернионах (2), (3) собственный бикватернион ошибки местоположения  $\mathbf{M}^*$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* = \mathbf{m} + s \mathbf{m}_0 = & (m^0 + s m_0^0) + (m^1 + s m_0^1) \mathbf{i}_1 + \\ & + (m^2 + s m_0^2) \mathbf{i}_2 + (m^3 + s m_0^3) \mathbf{i}_3 = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^*, \end{aligned}$$

где  $m^j$  и  $m_0^j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) — компоненты главной и моментной частей бикватерниона  $\mathbf{M}^*$  соответственно.

Тогда скалярная  $M_0^*$  и винтовая  $\mathbf{M}_{sc}^*$  части бикватерниона ошибки местоположения запишутся в виде

$$M_0^* = (m^0 + s m_0^0); \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_{sc}^* = (m^1 + s m_0^1) \mathbf{i}_1 + (m^2 + s m_0^2) \mathbf{i}_2 + (m^3 + s m_0^3) \mathbf{i}_3. \quad (9)$$

Будем формировать управление движением выходного звена манипулятора по формулам (2), (3). С учетом соотношений (8), (9) закон управления можно представить следующим образом:

$$\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} = - \left( \frac{2K_{oc}^*}{M_0^*} \right) \mathbf{M}_{sc}^* =$$

$$= -2 \left( \frac{k m^0}{(m^0)^2} + \frac{k_0 m^0 - k m_0^0}{(m^0)^2} \right) \times$$

$$\times ((m^1 + s m_0^1) \mathbf{i}_1 + (m^2 + s m_0^2) \mathbf{i}_2 + (m^3 + s m_0^3) \mathbf{i}_3), \quad (10)$$

где  $k$  и  $k_0$  — главная и моментная части дуального коэффициента усиления обратной связи  $K_{oc}^*$ .

Выделяя в (10) главную  $\boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6} = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3$

и моментную  $\mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6} = v_1 \mathbf{i}_1 + v_2 \mathbf{i}_2 + v_3 \mathbf{i}_3$  части, получим законы формирования требуемых проекций  $\omega_j$  и  $v_j$  угловой и линейной скоростей движения выходного звена манипулятора (управлений) в следующем виде:

$$\omega_j = -2 \frac{k m^j}{m^0}; \quad v_j = \frac{-2 k m^0 m_0^j - 2 k_0 m^0 m^j + 2 k m_0^0 m^j}{(m^0)^2},$$

$$j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Рассмотрим закон управления в ненормированных бикватернионах. Решая дифференциальное уравнение (5) относительно тензора  $T$ , получим:

$$T = \text{scal}(\bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{N}) + (1 - \text{scal}(\bar{\mathbf{L}}(t_0) \circ \mathbf{N})) \mathbf{e}^{-\frac{K_{oc}^* t}{2}}. \quad (12)$$

Тогда закон управления (4), (5) переписывается в виде

$$\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} = K_{oc}^* T^{-1} \text{screw}(\bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{N});$$

$$T = \text{scal}(\bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{N}) + (1 - \text{scal}(\bar{\mathbf{L}}(t_0) \circ \mathbf{N})) \mathbf{e}^{-\frac{K_{oc}^* t}{2}}. \quad (13)$$

Обозначим  $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{M}}^* = \bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{N}$ ;  $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{M}}^*(t_0) = \bar{\mathbf{L}}(t_0) \circ \mathbf{N}$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{r} + s\mathbf{r}_0 &= (r^0 + r^1 \mathbf{i}_1 + r^2 \mathbf{i}_2 + r^3 \mathbf{i}_3) + s(r_0^0 + r_0^1 \mathbf{i}_1 + \\ &+ r_0^2 \mathbf{i}_2 + r_0^3 \mathbf{i}_3) = (r^0 + sr_0^0) + (r^1 + sr_0^1) \mathbf{i}_1 + \\ &+ (r^2 + sr_0^2) \mathbf{i}_2 + (r^3 + sr_0^3) \mathbf{i}_3 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_{SC}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{p} + s\mathbf{p}_0 &= (\rho^0 + \rho^1 \mathbf{i}_1 + \rho^2 \mathbf{i}_2 + \rho^3 \mathbf{i}_3) + s(\rho_0^0 + \rho_0^1 \mathbf{i}_1 + \\ &+ \rho_0^2 \mathbf{i}_2 + \rho_0^3 \mathbf{i}_3) = (\rho^0 + s\rho_0^0) + (\rho^1 + s\rho_0^1) \mathbf{i}_1 + \\ &+ (\rho^2 + s\rho_0^2) \mathbf{i}_2 + (\rho^3 + s\rho_0^3) \mathbf{i}_3 = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_{SC}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  — главная и моментная части бикватерниона  $\mathbf{R}$ ;  $r^j$  и  $r_0^j$  — компоненты кватернионов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  соответственно;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_0$  — главная и моментная части бикватерниона  $\mathbf{P}$ ;  $\rho^j$  и  $\rho_0^j$  — компоненты кватернионов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_0$  соответственно.

Тогда

$$\text{scal}(\bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{N}) = \mathbf{R}_0 = r^0 + sr_0^0;$$

$$\begin{aligned} \text{screw}(\bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{N}) = \mathbf{R}_{SC} &= (r^1 + sr_0^1) \mathbf{i}_1 + \\ &+ (r^2 + sr_0^2) \mathbf{i}_2 + (r^3 + sr_0^3) \mathbf{i}_3; \end{aligned}$$

$$\text{scal}(\bar{\mathbf{L}}(t_0) \circ \mathbf{N}) = \mathbf{P}_0 = \rho^0 + s\rho_0^0.$$

Обозначим  $T = \tau + s\tau_0$ , где  $\tau$  и  $\tau_0$  — соответственно главная и моментная части тензора  $T$ . В соответствии с выражением (12) и введенными обозначениями тензор можно представить следующим образом (учитываем, что  $s^2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{R}_0 + (1 - \mathbf{P}_0) \mathbf{e}^{-\frac{k + sk_0 t}{2}} = \\ &= \mathbf{R}_0 + (1 - \mathbf{P}_0) \mathbf{e}^{-\frac{k}{2} t} \left( 1 - s \frac{k_0}{2} t + \frac{\left(-s \frac{k_0}{2} t\right)^2}{2} + \dots \right) = \\ &= \mathbf{R}_0 + (1 - \mathbf{P}_0) \mathbf{e}^{-\frac{k}{2} t} \left( 1 - s \frac{k_0}{2} t \right) = \\ &= r^0 + sr_0^0 + ((1 - \rho^0) - s\rho_0^0) \mathbf{e}^{-\frac{k}{2} t} \left( 1 - s \frac{k_0}{2} t \right) = \end{aligned}$$

$$= \left( r^0 + (1 - \rho^0) \mathbf{e}^{-\frac{k}{2} t} \right) +$$

$$+ s \left( r_0^0 - \left( (1 - \rho^0) \frac{k_0}{2} t + \rho_0^0 \right) \mathbf{e}^{-\frac{k}{2} t} \right) = \tau + s\tau_0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \tau &= r^0 + (1 - \rho^0) \mathbf{e}^{-\frac{k}{2} t}, \\ \tau_0 &= r_0^0 - \left( (1 - \rho^0) \frac{k_0}{2} t + \rho_0^0 \right) \mathbf{e}^{-\frac{k}{2} t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Закон управления (13) теперь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} &= \frac{k + sk_0}{\tau + s\tau_0} ((r^1 + sr_0^1) \mathbf{i}_1 + (r^2 + sr_0^2) \mathbf{i}_2 + \\ &+ (r^3 + sr_0^3) \mathbf{i}_3) = \left( \frac{k}{\tau} - s \frac{k\tau_0 + k_0\tau}{\tau^2} \right) ((r^1 + sr_0^1) \mathbf{i}_1 + \\ &+ (r^2 + sr_0^2) \mathbf{i}_2 + (r^3 + sr_0^3) \mathbf{i}_3) = \\ &= \left( \frac{k}{\tau} r^1 + s \left( \frac{k}{\tau} r_0^1 - \frac{k\tau_0 - k_0\tau}{\tau^2} r^1 \right) \right) \mathbf{i}_1 + \\ &+ \left( \frac{k}{\tau} r^2 + s \left( \frac{k}{\tau} r_0^2 - \frac{k\tau_0 - k_0\tau}{\tau^2} r^2 \right) \right) \mathbf{i}_2 + \\ &+ \left( \frac{k}{\tau} r^3 + s \left( \frac{k}{\tau} r_0^3 - \frac{k\tau_0 - k_0\tau}{\tau^2} r^3 \right) \right) \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Выделяя в выражении (15) главную  $\boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6} = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3$  и моментную  $\mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6} = v_1 \mathbf{i}_1 + v_2 \mathbf{i}_2 + v_3 \mathbf{i}_3$  части, получим вещественные законы формирования управлений:

$$\omega_j = \frac{k}{\tau} r^j, \quad v_j = \frac{k}{\tau} r_0^j - \frac{k\tau_0 - k_0\tau}{\tau^2} r^j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (16)$$

В нашей постановке решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора сводится к решению задачи управления движением выходного звена манипулятора. При этом за программное положение выходного звена манипулятора будем принимать то положение, для которого необходимо решить обратную задачу кинематики. Начальное положение выходного звена будем задавать произвольным набором значений обобщенных координат из их рабочих диапазонов. Таким образом, в результате решения задачи управления получим набор обобщенных координат манипулятора, отвечающих заданному программному положению, т. е. одно из решений обратной задачи кинематики.

При численном решении обратной задачи кинематики программный бикватернион  $\mathbf{N}$  будем определять по формулам, аналогичным (6), (7), задавая

фазовым координатам робота-манипулятора некоторые значения из их рабочих диапазонов:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \circ \mathbf{N}_2 \circ \mathbf{N}_3 \circ \mathbf{N}_4 \circ \mathbf{N}_5 \circ \mathbf{N}_6,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i = & \cos \frac{\alpha_j}{2} \cos \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_j}{2} \right) + \\ & + \sin \frac{\alpha_j}{2} \cos \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_j}{2} \right) \mathbf{i}_1 + \\ & + \sin \frac{\alpha_j}{2} \sin \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_j}{2} \right) \mathbf{i}_2 + \\ & + \cos \frac{\alpha_j}{2} \sin \left( \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_j}{2} \right) \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Алгоритм решения обратной задачи кинематики при использовании закона управления в нормированных бикватернионах заключается в численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (1), дополненных соотношениями (11) и формулами (6), (7). В случае же использования закона управления в ненормированных бикватернионах решение обратной задачи кинематики сводится к численному интегрированию системы дифференциальных уравнений (1), дополненных соотношениями (14), (16) и (6), (7). Используемые законы управления  $\omega_j$ ,  $v_j$ , построенные по принципу обратной связи, гарантируют асимптотически устойчивый выход схвата робота-манипулятора в требуемое конечное положение, заданное бикватернионом  $\mathbf{N}$ , с требуемой степенью точности. Значения обобщенных координат  $q_i$ , соответствующие этому конечному положению схвата манипулятора, и будут одним из решений обратной задачи кинематики робота-манипулятора.

Отметим, что приведенные законы управления, используемые в алгоритме решения обратной задачи кинематики, справедливы для любого манипулятора (конкретная схема манипулятора учитывается при построении кинематических уравнений манипулятора и при нахождении бикватерниона конечного положения выходного звена манипулятора, присутствующего в законе управления).

### 3. Анализ численного решения

1. Проведено численное решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с различными значениями входных параметров с использованием двух законов управления, формируемых по алгоритмам, описанным в п. 2. Программное положение выходного звена манипулятора задавалось набором фазовых координат манипулятора, аналогично задавалось и начальное положение.

В случае, когда начальное положение было задано набором обобщенных координат, представленным в табл. 1, а требуемое конечное (программное) положение — набором, приведенным в табл. 2, при шаге интегрирования  $h = 0,01$  с, коэффициенте

Таблица 1

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$d_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$
$-30^\circ$	$15^\circ$	0,1 м	$36^\circ$	$-90^\circ$	$45^\circ$

Таблица 2

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$d_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$
$20^\circ$	$40^\circ$	0,3 м	$-35^\circ$	$60^\circ$	$-45^\circ$

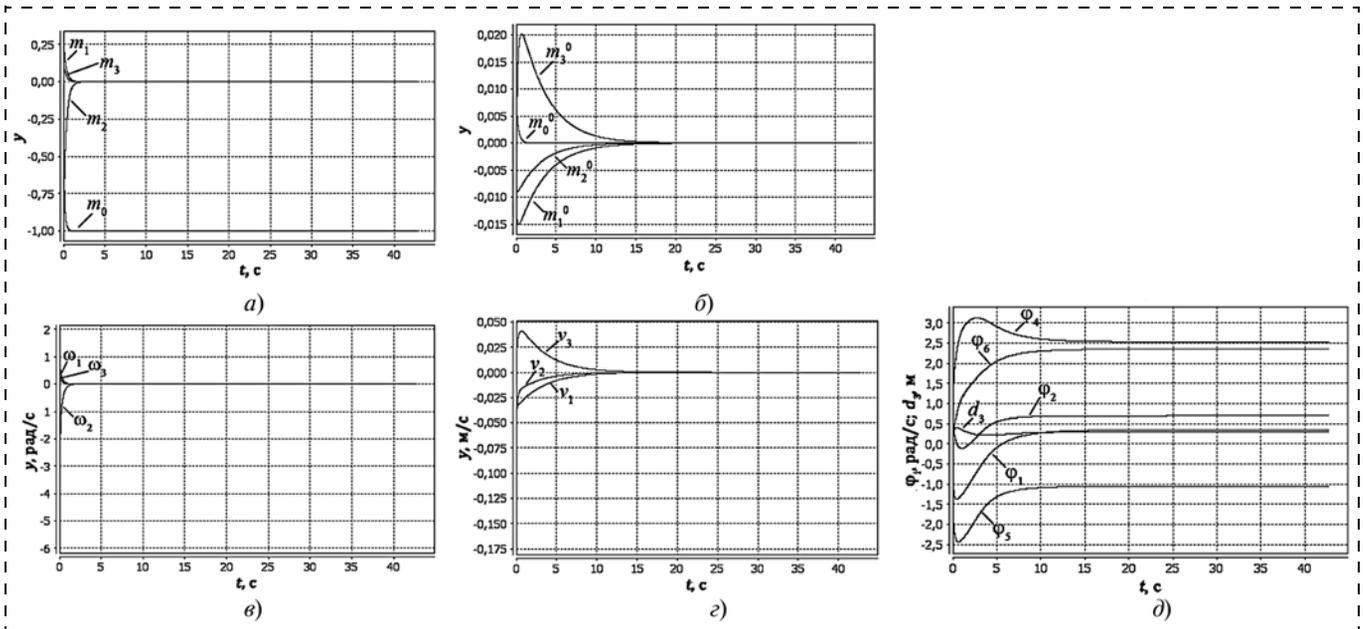
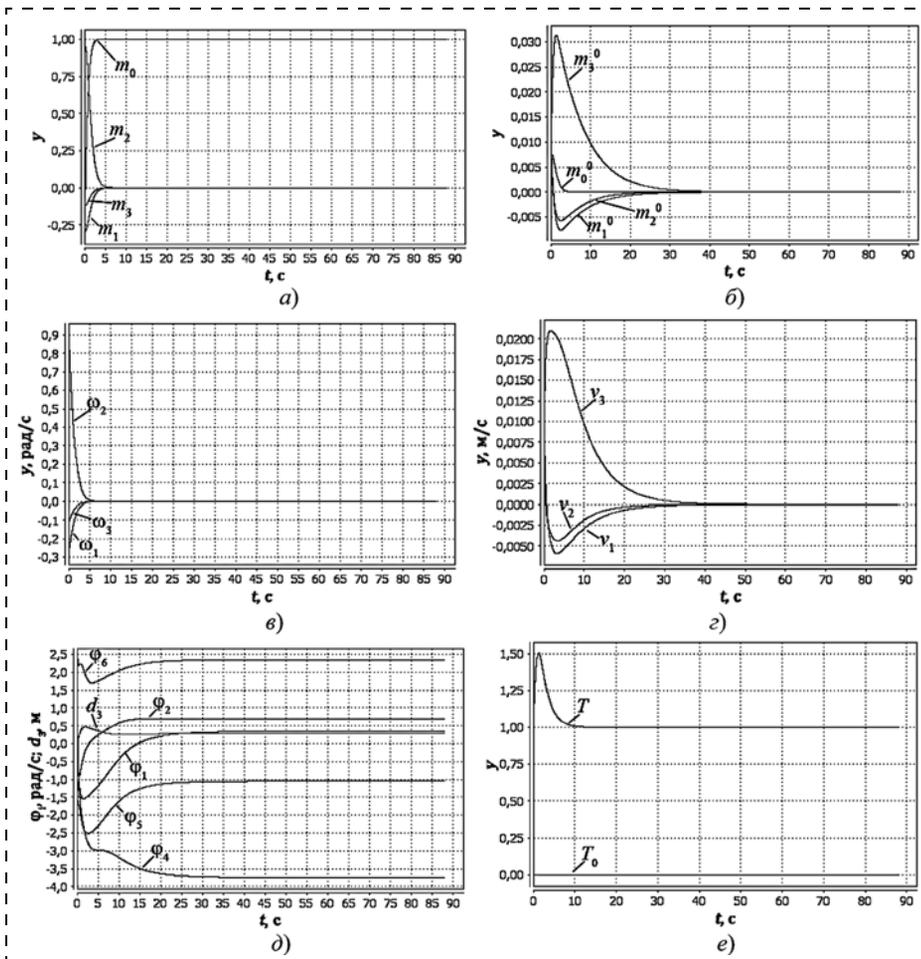
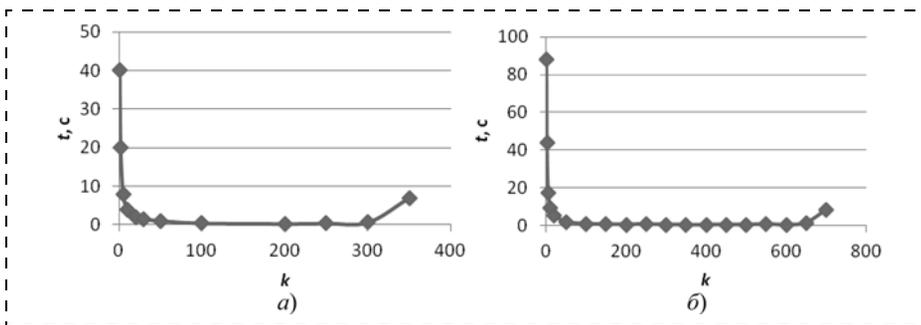


Рис. 1. Закон управления в нормированных бикватернионах:

*a* — графики изменения компонент главной части бикватерниона ошибки местоположения; *b* — графики изменения компонент моментной части бикватерниона ошибки местоположения; *v* — графики изменения компонент главной части управления; *g* — графики изменения компонент моментной части управления; *d* — графики изменения фазовых координат



**Рис. 2. Закон управления в ненормированных бикватернионах:**  
 а — графики изменения компонент главной части бикватерниона ошибки местоположения; б — графики изменения компонент моментной части бикватерниона ошибки местоположения; в — графики изменения компонент главной части управления; г — графики изменения компонент моментной части управления; д — графики изменения фазовых координат; е — графики изменения компонент тензора



**Рис. 3. Графики зависимости времени интегрирования (численного решения задачи) от главной части коэффициента усиления обратной связи ( $h = 0,01$  с):**  
 а — закон управления в нормированных бикватернионах; б — закон управления в ненормированных бикватернионах

усиления обратной связи  $K_{oc}^* = 1$  и требуемой точности решения, равной  $10^{-6}$ , были получены результаты, приведенные на рис. 1, 2. На этих рисунках приведены графики изменения обобщенных координат, главной и моментной частей бикватернионов ошибки местоположения, главной и

2. Проведено численное решение обратной задачи кинематики для двух законов управления. При этом изменялась главная часть коэффициента усиления обратной связи. Начальное и программное положения выходного звена задавали теми же наборами обобщенных координат, что и в случае 1. Графики зависимости времени интегрирования

моментной частью управления и тензора для законов управления в нормированных и ненормированных бикватернионах. Время интегрирования (численного решения задачи с заданной точностью  $10^{-6}$ ) с использованием закона управления в нормированных бикватернионах, необходимое для достижения заданной точности решения задачи, составило 42,68 с, а в ненормированных бикватернионах — 87,94 с.

В результате численного решения были получены значения обобщенных координат, совпадающие для обоих законов управления (табл. 3).

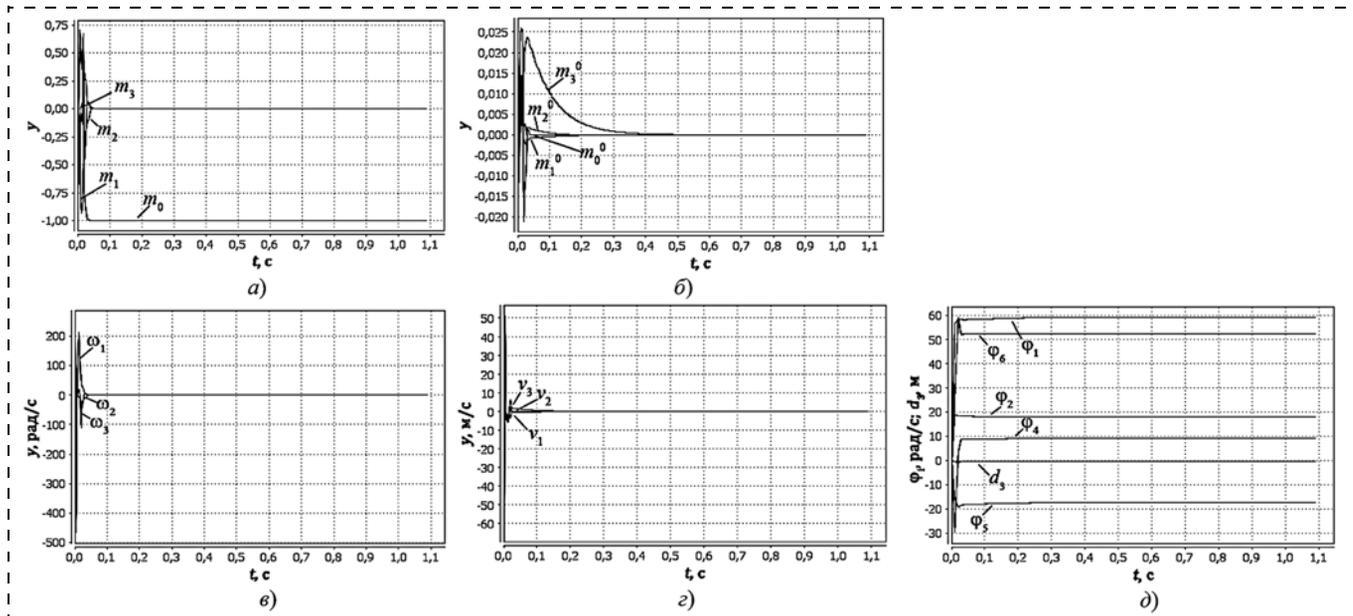
Таблица 3

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$d_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$
$20^\circ$	$40^\circ$	0,3 м	$145^\circ$	$-60^\circ$	$135^\circ$

Отметим, что в силу неоднозначности решения обратной задачи кинематики полученные значения фазовых координат могут отличаться от тех задаваемых значений, по которым вычислялся бикватернион программного положения выходного звена. В данном случае значения координат  $\varphi_4$  и  $\varphi_6$  отличаются на  $\pi$ , а значения координаты  $\varphi_5$  отличаются на  $2\pi/3$ , значения координат  $\varphi_1, \varphi_2, d_3$  совпадают.

Компоненты бикватерниона ошибки местоположения выходного звена в ходе численного решения приняли следующие значения:  $m_i = 0, i = 1, 2, 3, m_j^0 = 0, j = 0, 1, 2, 3; m_0 = -1$  для закона управления в нормированных бикватернионах;  $m_0 = 1$  для закона управления в ненормированных бикватернионах.

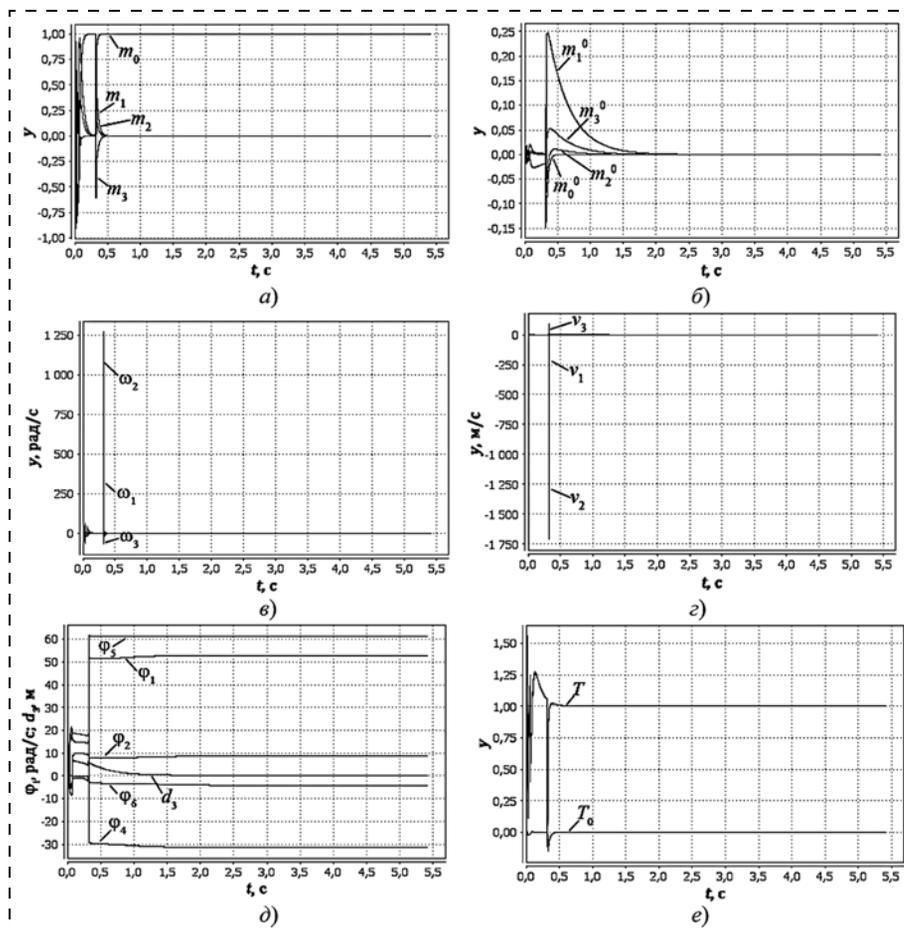
Таким образом, получили, как и следовало ожидать, что бикватернион  $M^*(t) \rightarrow \pm 1$  при  $t \rightarrow \infty$ .



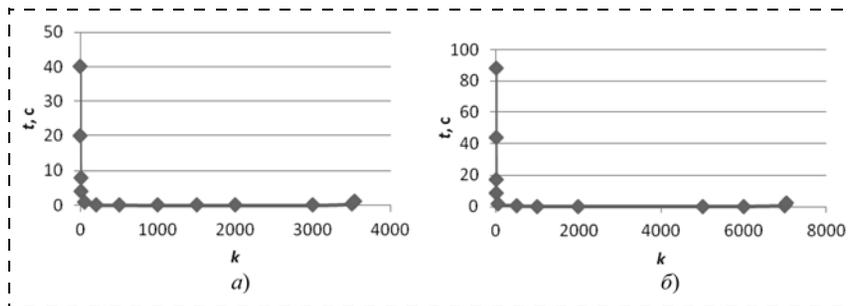
**Рис. 4. Закон управления в нормированных бикватернионах ( $k = 40$ ):**  
*a* — графики изменения компонент главной части бикватерниона ошибки местоположения; *б* — графики изменения компонент моментной части бикватерниона ошибки местоположения; *в* — графики изменения компонент главной части управления; *г* — графики изменения компонент моментной части управления; *д* — график изменения фазовых координат

(численного решения задачи с заданной точностью  $10^{-6}$ ) от коэффициента усиления обратной связи изображены на рис. 3.

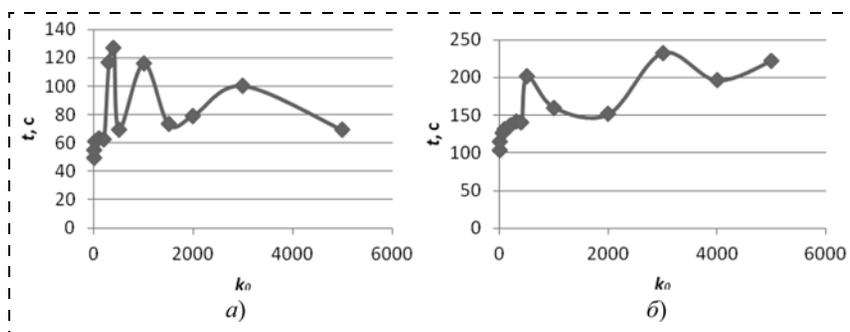
Из графиков видно, что сначала, при увеличении главной части коэффициента усиления обратной связи, время решения обратной задачи кинематики заметно снижается. Однако дальнейшее увеличение уже не приводит к уменьшению времени решения, кроме того, начиная с некоторого значения коэффициента усиления обратной связи, изменяется характер переходного процесса, появляются срывы от устойчивости к неустойчивости (рис. 4, 5). Этот факт можно объяснить тем, что, начиная с некоторого значения коэффициента усиления обратной связи, время переходного процесса становится сопоставимым с шагом интегрирования. Отсюда можно сделать вывод, что при решении обратной задачи кинематики главную часть коэффициента усиления обратной связи не следует брать слишком большой во избежание появления сложных переходных процессов.



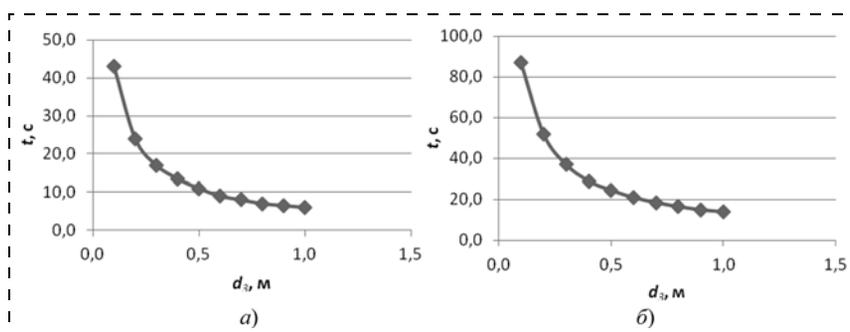
**Рис. 5. Закон управления в ненормированных бикватернионах ( $k = 20$ ):**  
*a* — графики изменения компонент главной части бикватерниона ошибки местоположения; *б* — графики изменения компонент моментной части бикватерниона ошибки местоположения; *в* — графики изменения компонент главной части управления; *г* — графики изменения компонент моментной части управления; *д* — графики изменения фазовых координат; *е* — графики изменения компонент тензора



**Рис. 6. Графики зависимости времени интегрирования (численного решения задачи) от главной части коэффициента усиления обратной связи ( $h = 0,001$  с):**  
 а — закон управления в нормированных бикватернионах; б — закон управления в ненормированных бикватернионах



**Рис. 7. Графики зависимости времени интегрирования (численного решения задачи) от моментной части коэффициента усиления обратной связи:**  
 а — закон управления в нормированных бикватернионах; б — закон управления в ненормированных бикватернионах



**Рис. 8. Графики зависимости времени интегрирования (численного решения задачи) от начальной линейной координаты  $d_3$ :**  
 а — закон управления в нормированных бикватернионах; б — закон управления в ненормированных бикватернионах

При уменьшении шага интегрирования в 10 раз (т. е. при использовании шага, равного 0,001 с, вместо 0,01 с) графики зависимости времени интегрирования от коэффициента усиления обратной

Таблица 4

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$d_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$
$-30^\circ$	$15^\circ$	0,1...1 м	$36^\circ$	$-90^\circ$	$45^\circ$

Таблица 5

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$d_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$
$20^\circ$	$40^\circ$	0,3 м	$-35^\circ$	$60^\circ$	$-45^\circ$

связи  $k$  также изменяются (рис. 6), причем критические значения  $k$  (при которых качественно меняется характер переходного процесса и при которых вовсе прекращается сходимость) увеличиваются ровно в 10 раз.

3. При фиксированной главной части коэффициента усиления обратной связи  $k = 1$  проводилось изменение моментной части  $k_0$ . Графики зависимости времени решения обратной задачи кинематики от моментной части коэффициента усиления обратной связи приведены на рис. 7.

В целом, можно сделать вывод, что изменение моментной части коэффициента усиления обратной связи не уменьшает времени решения задачи. Следовательно, при решении обратной задачи кинематики лучше использовать вещественный коэффициент усиления обратной связи.

4. При фиксированном заданном конечном положении выходного звена манипулятора для одних и тех же значений угловых координат начального положения проводилось изменение начальной линейной координаты  $d_3$ .

Для случая, когда начальное положение было задано набором обобщенных координат, представленным в табл. 4, а требуемое конечное (программное) положение — набором, приведенным в табл. 5, при шаге интегрирования  $h = 0,01$  с, коэффициенте усиления обратной связи  $K_{oc}^* = 1$  и требуемой точности решения, равной  $10^{-6}$ , были построены графики зависимости времени решения задачи от значений начальной линейной координаты  $d_3$  (рис. 8).

Отметим, что чем больше значение начальной линейной координаты  $d_3$ , тем меньше время, за которое компоненты моментной части бикватерниона ошибки местоположения сходятся к требуемым значениям. По этой причине уменьшается и общее время решения задачи. Из полученных результатов можно сделать вывод, что при решении обратной задачи кинематики следует брать значение начальной линейной координаты максимально возможным из рабочего диапазона манипулятора.

Отметим также, что в результате численного решения обратной задачи кинематики для разных значений входных параметров получался определенный набор фазовых координат, для которых программный (требуемый) бикватернион конечного положения выходного звена манипулятора имеет одно и то же значение (это отражает известный факт

неоднозначности решения обратной задачи кинематики). При этом полученные значения фазовых координат либо совпадали с теми, по которым вычислялся программный бикватернион, либо отличались от них на  $\pi$ , либо отличались знаком, либо они принимали совершенно другие значения. Из проведенных опытов можно сделать вывод, что принципиально другие значения фазовых координат получаются, когда имеют место сложные переходные процессы.

Проводя сравнение двух законов управления, можно отметить следующее: время решения обратной задачи кинематики меньше для закона управления в нормированных бикватернионах, чем для закона управления в ненормированных бикватернионах. В то же время максимальные амплитуды управлений (угловых и линейных скоростей) для

закона управления в ненормированных бикватернионах меньше. К тому же нужно иметь в виду возможность попадания в особую точку  $M_0^* = 0$  при решении задачи в нормированных бикватернионах, которой нет для алгоритма в ненормированных бикватернионах.

#### Список литературы

1. **Челноков Ю. Н.** Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 38—58.
2. **Фу К., Гонсалес Р., Ли К.** Робототехника. М.: Мир, 1989. 621 с.
3. **Нелаева Е. И., Челноков Ю. Н.** Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Часть 1. 2015. Т. 16, № 6. С. 376—380.

## Solution to the Problems of Direct and Inverse Kinematics of the Robots-Manipulators Using Dual Matrices and Biquaternions on the Example of Stanford Robot Arm. Part 2

**E. I. Nelayeva**, LomovtsevaEl@yandex.ru✉, **Yu. N. Chelnokov**, chelnokovyun@info.sgu.ru,  
Saratov State University, Institute of Precision Mechanics and Control,  
RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: **Nelayeva Ekaterina I.**, Postgraduate Student,  
Chair of Mathematical and Computer Modeling, Saratov State University, Saratov, 410012, Russian Federation,  
e-mail: LomovtsevaEl@yandex.ru

Received on January 27, 2015

Accepted February 18, 2015

*This paper presents a new method of solving the inverse kinematics problem of manipulators with the help of the biquaternion theory of kinematics control. Application of the method reduces solving of Cauchy problem for differential kinematic equations of a manipulator motion. Vectors of the angular and linear velocities contained in these equations are considered as controls. They are formed according to the feedback principal as certain functions of generalized coordinates. As the result of solving of Cauchy problem for any given initial values of the generalized coordinates from their operational range the generalized coordinates will finally take the values corresponding to the desired position of the end effector, so the inverse kinematics problem will be solved. In this paper an algorithm for solving the inverse kinematics of Stanford robot arm is introduced. Control laws used in the algorithm are valid for any manipulator. A numerical solution of the inverse kinematics problem of Stanford robot arm has been found. It proves efficiency of application of the biquaternion theory of kinematics control for solving of the inverse kinematics problem of manipulators. Given examples of the numerical solution demonstrate dependency between the solution results (obtained values of the phase coordinates, solution time) and the input parameters, such as initial pose (position and orientation) of the end effector of a manipulator, accuracy of the solution and dual feedback gain. Graphs of the changes of the generalized coordinates, the main and moment parts of the biquaternion of the end effector error pose, the main and moment parts of the control and tensor were built.*

**Keywords:** robot-manipulator, Stanford robot arm, biquaternion, kinematics equations, inverse kinematics problem

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 12-01-00165.

For citation:

**Nelayeva E. I., Chelnokov Yu. N.** Solutions to the Problems of Direct and Inverse Kinematics of the Robots-Manipulators Using Dual Matrices and Biquaternions on the Example of Stanford Robot Arm. Part 2, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 7, pp. 456—463.

DOI: 10.17587/mau.16.456-463

#### References

1. **Chelnokov Ju. N.** Bikvaternionnoe reshenie kinematicheskoy zadachi upravleniya dvizheniem tverdogo tela i ego prilozhenie k resheniju

obratnyh zadach kinematiki robotov-manipulyatorov (Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics), *Izv. RAN. Mehanika Tverdogo Tela*, 2013, no. 1, pp. 38—58 (in Russian).

2. **Fu K., Gonsales P., Li K.** *Robototekhnika* (Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence), Moscow, Mir, 1989, 621 p. (in Russian).

3. **Nelayeva E. I., Chelnokov Yu. N.** Resheniepryamih i obratnyh zadach kinematiki robotov-manipulyatorov s ispol'zovaniem dual'nyh matric i bikvaternionov na primere stjenfordskogo manipulyatora. Chast' 1 (Solution to the Problems of Direct and Inverse Kinematics of the Robots-Manipulators Using Dual Matrices and Biquaternions on the Example of Stanford Robot Arm. Part 1), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 6, pp. 376—380. (in Russian).