

Г. А. Рустамов, д-р техн. наук, проф., gazanfar.rustamov@gmail.com,  
Азербайджанский технический университет, г. Баку

## $K_\infty$ -робастные системы управления

*Обсуждается развитие классических систем управления с большим коэффициентом усиления, которые в классической постановке (М. В. Мееров) не нашли должного развития. Основу предложенного подхода составляет метод функции Ляпунова. В результате синтеза получено "робастное эквивалентное управление". Возможность беспредельного увеличения коэффициента усиления регулятора без нарушения устойчивости системы позволяет подавлять генеральные составляющие неопределенной модели до сколь угодно малой величины. Этим обеспечивается высокая точность слежения эталонной траектории и быстрое действие для широкого класса нелинейностей и неопределенностей. В пределе система описывается уравнением гиперплоскости для произвольного начального состояния.  $K_\infty$ -робастная система применена к нелинейным многомерным связанным системам с интервальной неопределенностью. Показано, что удалось решить задачу автономности прямых каналов без использования компенсаторов перекрестных связей, что имеет важное прикладное значение. К недостаткам методики следует отнести отсутствие аналитической формулы для определения коэффициента усиления регулятора, усиление высокочастотных помех, имеющих непосредственный доступ в регулятор, а также использование производных выхода для формирования PD-регулятора. Кроме того, не всякий объект допускает реализацию высокого коэффициента усиления. Достоверность теоретических результатов подтверждена решением модельных задач на MATLAB/Simulink.*

**Ключевые слова:** следящая робастная система, функция Ляпунова, большой коэффициент усиления, робастное эквивалентное управление, связанная система, перевернутый маятник

### Введение

В настоящее время одним из бурно развивающихся направлений теории и практики автоматического управления является синтез и разработка систем управления в условиях неопределенности, в частности, робастных систем управления. Основным отличием понятия "робастные системы" от используемого в отечественной литературе термина "грубые системы" является тот факт, что робастные системы предназначены для поддержания качественных показателей и запасов устойчивости в допустимых пределах при изменении реквизитов объекта в широких пределах. Поэтому робастность можно характеризовать как "грубость в большом".

Широко распространенные робастные системы, основанные на  $H_\infty$ -теории [1–5], изначально были задуманы как неадаптивные системы управления. Потом произошла мутация, и начали появляться работы под названием "Адаптивно-робастные системы...", "Комбинированные робастные системы..." и др., частично использующие средства адаптации. В этом направлении следует отметить использование наблюдателей неопределенностей, синтезированных на основе как нечеткой [6, 7], так и детерминированной постановок [8–10]. Между тем "очистка" номинальной динамики от всевозможных неопределенностей является обременительной и часто невыполнимой задачей из-за невозможности разделения движения, особенно в нелинейном случае. Поэтому в основном рассматриваются аддитивные и медленно изменяющиеся неопределенности [8–10].

Согласно ряду работ, например [11], неадаптивные системы, обладающие робастными свойствами, классифицируются как "пассивные адаптивные системы".

Потребность практики требует разработки простых методов управления, позволяющих обходить нелинейность, нестационарность и неопределенность объекта, что в контексте  $H_\infty$ -теории и других неадаптивных методов робастного управления являются почти не разрешимой задачей. Простота может заключаться в подавлении (делении на большое число), а не в оценке нелинейностей и неопределенностей.

Среди методов построения неадаптивных робастных систем особый интерес представляют системы, позволяющие беспредельно увеличивать коэффициент усиления разомкнутой цепи без нарушения устойчивости системы. В классической постановке можно отметить работы [12, 13], а также [20].

Эти системы обладают высоким быстродействием и точностью для широкого класса неопределенностей. Однако сложность структуры в нелинейном случае и усиление высокочастотных помех, имеющих доступ в регулятор, ограничивают область применения подобных систем. Тем не менее, классические подходы в указанном направлении не нашли должного развития.

Во всех неадаптивных, тем более следящих робастных системах наблюдаются высокие коэффициенты усиления робастного регулятора, обусловленные свойствами робастности. Некоторые примеры в этом направлении приведены в работе [14].

Из этой особенности можно прийти к заключению о том, что возможность беспредельного увеличения коэффициента усиления можно предусмотреть при постановке задачи, не дожидаясь результатов решения различных робастных задач, приводящих не известно откуда к появлению большого коэффициента усиления.

Прототипом данной работы является "метод локализации" А. С. Вострикова [20], основанный на "методе обратных задач динамики". Отметим ряд недостатков "метода локализации":

- закон управления содержит заданную эталонную функцию, зависящую от состояния объекта, а также высшую производную выхода. Такая конструкция усложняет реализацию управления. Кроме того, эталонная функция (траектория) может быть и неизвестной;
- замыкание системы с помощью управления, найденного на основе "метода обратных задач динамики", часто приводит к "короткому замыканию" (математически — к тождеству) [15] (или то же самое по А. Б. Филимонову — к нарушению причинно-следственной последовательности [20]), что требует модификации закона управления.

В работах [14—16] исследованы робастные системы управления с высоким коэффициентом усиления, построенные на основе метода функции Ляпунова.

В работах [14, 15] рассмотрены одномерные по входу и выходу системы, а в работе [16] — многомерные связанные системы. Можно отметить следующие недостатки этих работ. Во-первых, все работы в предложенном направлении не имеют характерного названия, позволяющего четко определить суть проводимых исследований. Во-вторых, в уравнении робастного регулятора [15—16] имеется избыток. Можно было обойтись лишь гипернаблюдателем неопределенностей.

В данной статье ставятся следующие цели: во-первых, сформулировать характерное название, позволяющее раскрыть суть предложенного подхода. Во-вторых, распространить полученные в работах [14—16] результаты на неопределенные многомерные связанные системы с использованием "эквивалентного робастного управления", предложенного в работе [14]. Такое управление описывается уравнением гиперплоскости с достаточно высоким коэффициентом усиления. Возможность беспредельного увеличения коэффициента усиления без потери устойчивости замкнутой системы позволяет подавлять (математически это эквивалентно делению на большое число) генеральные составляющие неопределенной модели до сколь угодно малой величины и стягивать все траектории к многообразию, характеризующему гиперплоскость. Дальнейшее движение системы в начало координат происходит по этой плоскости.

В дальнейшем по аналогии с  $H_\infty$ -робастными системами предложенные в статье системы будем называть  $K_\infty$ -робастными системами управления.

## Постановка задачи

Рассмотрим многомерный связанный объект, представленный в виде неопределенной системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_i^{(k)} &= f_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m, t) + b_i^T(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m, t)u, \quad (1) \\ i &= \overline{1, m}, k \in [1, n], t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{y}_i = (y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(k-1)})^T = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i)^T \in R^k$  — доступный измерению или оценке вектор состояния;  $y_i \in R$  — управляемые выходы;  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  — вектор управляющих входов;  $f_i(\cdot), b_i^T(\cdot) = [b_{i1}(\cdot), b_{i2}(\cdot), \dots, b_{im}(\cdot)] > 0$  — структурно неопределенные ограниченные функции.

Генеральные составляющие модели  $f_i(\cdot)$  и  $b_i^T(\cdot)$  являются источниками неопределенностей, однако могут содержать и известные компоненты. В любом случае эти составляющие принимаются как потенциальные источники паразитной динамики и подавляются (делением на достаточно большое число). Взамен система наделяется новой эталонной линейной динамикой. В общем случае функции  $f_i(\cdot)$  и  $b_i^T(\cdot)$  могут содержать негладкие и разрывные нелинейности.

Рассматривается задача слежения, состоящая в выборе такого управления  $u_i$ , которое после завершения переходной составляющей обеспечивает движение выхода  $y_i(t)$  неопределенного объекта (1) по эталонной траектории  $y_{id}(t)$  с заданной точностью:

$$|y_{id}(t) - y_i(t)| \leq \delta_{is}, t \geq t_{is},$$

где  $\delta_{is} = (1 \dots 5) \%$  — допустимая ошибка установления,  $t_{is}$  — время установления (settling time).

При этом состояние системы отслеживает эталонную траекторию  $\mathbf{y}_{id} = (y_{id}, \dot{y}_{id}, \dots, y_{id}^{(k-1)})^T = (x_{1d}^i, x_{2d}^i, \dots, x_{kd}^i)^T$ . Вектор ошибок слежения по каналу " $u_i - y_i$ " определяется выражением

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_{id} - \mathbf{y}_i = (e_i, \dot{e}_i, \dots, e_i^{(k-1)})^T = (e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i)^T.$$

Необходимо выполнить развязку многомерной связной системы на  $m$  сепаратных (автономных) подсистем со своими эталонными траекториями (*reference trajectory*)  $y_{id}(t)$  и управлениями  $u_i$ . Решение этой задачи связано с построением робастной следящей системы управления для каждого прямого канала. Эта задача в какой-то мере является стандартной, однако здесь решается совершенно иным способом без использования компенсаторов динамики перекрестных каналов.

## Решение задачи

При сепарации (разделении) прямых каналов " $u_i - y_i$ " влияние перекрестных каналов, а также обратных связей по  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m, t$  на управляемый  $i$ -й выход  $y_i(t)$  будем рассматривать как "приведен-

ные неконтролируемые возмущения". В этом случае уравнение объекта (1) удобно представить в виде

$$\begin{aligned} y_i^{(k)} &= \varphi_i(\mathbf{y}, t) + b_{ii}(\mathbf{y}, t)u_i; \\ \varphi_i(\mathbf{y}, t) &= f_i(\mathbf{y}, t) + \sum_{j \neq i}^m b_{ij}(\mathbf{y}, t)u_j; \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi_i(\mathbf{y}, t)$  — ограниченное "приведенное неконтролируемое возмущение";  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

Уравнение (2) описывает одномерный по входу и выходу объект. Поэтому при синтезе регулятора для каждого сепаратного " $u_i - y_i$ " канала будем использовать методику синтеза одномерных систем, предложенную в работе [14].

В работе [14] на основе метода функции Ляпунова при  $V = 1/2s^2$  получено робастное эквивалентное управление:

$$u_{Req} = Ks = k(c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + e^{(k-1)}), \quad (3)$$

где  $K > 0$  — достаточно большое число;  $c_i > 0$  — угловые коэффициенты гиперплоскости  $s = 0$ .

При устремлении коэффициента усиления регулятора  $K$  в бесконечность замкнутая неопределенная система с объектом (2) и регулятором (3) описывается уравнением гиперплоскости

$$s = c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + e^{(k-1)} = 0, \quad s(0) = s_0. \quad (4)$$

При движении по гиперплоскости  $s = 0$  порядок системы уменьшается на единицу. Поэтому для устойчивости движения по гиперплоскости  $s = 0$  угловые коэффициенты  $c_i$  должны явиться коэффициентами Гурвицевого полинома пониженного порядка

$$S(p) = p^{k-1} + c_{k-1}p^{k-2} + \dots + c_1. \quad (5)$$

Вещественные части корней такого полинома  $\text{Re}(p_i) < 0$ .

В работе [14] по аналогии с работой [17] управление (3) названо "робастным эквивалентным управлением". Предложенное в работе [17] для полностью определенных объектов "эквивалентное управление"  $u_{eq}$  обеспечивает движение системы в начало координат по гиперплоскости  $s = 0$  лишь из точек, находящихся на этой гиперплоскости (режим движения по вырожденной траектории). "Робастное эквивалентное управление" (3) при достаточно большом коэффициенте усиления  $K$  обеспечивает движение системы по  $s = 0$  из произвольной начальной точки  $s(0) = s_0$ .

### Передаточные функции

Согласно (3) и (4) передаточная функция робастного регулятора и замкнутой системы соответственно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W_C(p) &= \frac{U_C(p)}{E(p)} = \\ &= K(p^{k-1} + c_{k-1}p^{k-2} + \dots + c_3p^2 + c_2p + c_1); \quad (6) \\ W_{SYS}(p) &= S(p) = \\ &= p^{k-1} + c_{k-1}p^{k-2} + \dots + c_3p^2 + c_2p + c_1. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь  $U_C$  — выход регулятора (вход объекта);  $E$  — вход регулятора (сигнал рассогласования).

**Особенности реализации.** Реализовать регулятор на основе выражения (6) невозможно, поскольку оно содержит операторы идеального дифференцирования. При реализации оператора дифференцирования  $p$  обычно используется реальное дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$W_d(p) = \frac{p}{T_d p + 1}. \quad (8)$$

Постоянная времени дифференциатора  $T_d \approx 0,001 \dots 0,02$  с.

В этом случае передаточную функцию регулятора (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} W_C(p) &= K(c_1 + c_2 W_d + c_3 W_d^2 + \\ &+ \dots + c_{n-1} W_d^{n-2} + c_n W_d^{n-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая выражение (8) в формуле (9) и приравняв в числителе  $T_d = 0$ , в силу его малости получим приближенную передаточную функцию, имеющую реализуемую форму в виде рациональной дроби:

$$W_C(p) \approx K \frac{p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \dots + c_3p^2 + c_2p + c_1}{(T_d p + 1)^{n-1}}. \quad (10)$$

При  $n = 2$  имеем:

$$W_C(p) \approx K \frac{p + c_1}{T_d p + 1}. \quad (11)$$

Для  $n = 2$  при моделировании в качестве уравнения регулятора целесообразно использовать точное выражение

$$u = Ks, \quad s = c_1 e + \dot{e}. \quad (12)$$

### Определение параметров настройки

При движении из произвольной начальной точки  $s(0) = s_0$  система при достаточно большом коэффициенте усиления  $K$  почти мгновенно попадает на гиперплоскость  $s = 0$  и в дальнейшем движется по этой плоскости в начало координат. Поэтому движение системы с достаточно высокой точностью может быть описано уравнением гиперплоскости  $s = 0$ .

Движение по  $s = 0$  определяется первыми  $k - 1$  начальными условиями  $\mathbf{e}_s(0) = (e(0), \dot{e}(0), \dots, e^{(k-2)}(0))^T$ .

**Настройка регулятора.** Качественные показатели (время установления  $t_s$ , перерегулирование  $\sigma$  (%) и др.) переходной характеристики по ошибке  $e(t)$  зависят от параметров настройки  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ , регулятора (6). Поскольку порядки регулятора и уравнения замкнутой системы одинаковы, то путем изменения параметров  $c_i$  можно разместить все полюса системы по желаемой схеме.

В общем случае для определения параметров настройки  $c_i$  можно использовать метод "модального управления". При этом в качестве желаемого характеристического полинома можно использовать, например, полиномы Чебышева, Баттерворса или полином, соответствующий минимуму некоторого интегрального показателя качества.

**Монотонная переходная характеристика,  $\sigma = 0\%$ .** Потребуем, чтобы переходная характеристика по ошибке слежения  $e(t)$  не имела перерегулирования, т. е. являлась монотонной. С этой целью для корней  $p_i$  характеристического полинома замкнутой системы (7) выбираем биномиальное распределение. При таком распределении  $p_1 = p_2 = \dots = p_{k-1}$ . Кратность корней позволяет определить их на основе требуемого времени установления  $t_s$  переходной характеристики.

При кратных отрицательных (устойчивых) корнях выражение (7) можно представить в виде

$$W_{SYS}(p) = (p + p_1)^{k-1}.$$

Определим  $p_1$ . При кратных корнях решение уравнения (4) имеет вид

$$e(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_n t^{k-2}) \exp(-p_1 t).$$

Определяя постоянные интегрирования для известного начального условия  $\mathbf{e}_s(0)$ , представим решение в векторном виде:

$$e(t) = C^T \theta \exp(-p_1 t), \quad C = Z^{-1} \mathbf{e}_s(0), \quad (13)$$

где

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \dots \\ t^{(k-2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_s(0) = \begin{pmatrix} e(0) \\ \dot{e}(0) \\ \ddot{e}(0) \\ \dots \\ e^{(k-2)}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{y}_{ds}(0) - \mathbf{y}_s(0);$$

$Z(t)|_{t=t_0=0}$  — квадратная матрица размера  $(k-1) \times (k-1)$ :

$$Z = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_{k-1}(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \dots & \dot{z}_{k-1}(t) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ z_1^{(k-2)}(t) & z_2^{(k-2)}(t) & \dots & z_{k-1}^{(k-2)}(t) \end{bmatrix}_{t=t_0=0}.$$

Фундаментальная система решений

$$z_1 = \exp(-p_1 t), \quad z_2 = t \exp(-p_1 t), \\ z_3 = t^2 \exp(-p_1 t), \quad \dots, \quad z_{n-1} = t^{k-2} \exp(-p_1 t).$$

В исследовательских задачах для  $k$ -го начального условия объекта можно принимать, например,  $y^{(k-1)}(0) = 0$ .

Пусть время установления (*settling time*) для  $\delta_s = \pm (2 \dots 5)\%$ -ной допустимой ошибки задано:

$t = t_s$ . Тогда согласно (13) для определения  $p_1$  получаем следующее выражение:

$$e(t_s) = \pm \delta_s / 100 = C^T \theta|_{t=t_s} \exp(-p_1 t_s).$$

Если  $e(0) > 0$ , то и  $\delta_s > 0$  (приближение сверху), иначе  $\delta_s < 0$ .

Соответствующее трансцендентное уравнение:

$$f(p_1) = C^T \theta|_{t=t_s} \exp(-p_1 t_s) \mp \delta_s / 100 = 0. \quad (14)$$

Для  $k = 2$  параметры  $\theta = 1$ ,  $\mathbf{e}_s(0) = e(0)$ ,  $Z^{-1} = 1 \Rightarrow \Rightarrow C^T = e(0)$ . Уравнение (14) примет вид

$$f(p_1) = e(0) \exp(-p_1 t_s) \mp \delta_s / 100 = 0. \quad (15)$$

Уравнение (14) при заданных  $\delta_s$ ,  $t_s$  и  $\mathbf{e}_s(0)$  можно решить с помощью функций MATLAB `solve('f(p1)=0')`. После вычисления  $p_1$  параметры настройки  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , определяем как коэффициенты полинома

$$W_{SYS}(p) = (p + p_1)^{n-1} = p^{n-1} + a_n - 1 p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1. \quad (16)$$

Отсюда

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2, \quad \dots, \quad c_{n-1} = a_{n-1}. \quad (17)$$

При реализации регулятора в виде передаточной функции (11)

$$W_C(p) \approx K \frac{(p + p_1)^{n-1}}{(T_d p + 1)^{n-1}} \quad (18)$$

параметры  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , можно не вычислять.

**Определение коэффициента усиления  $K$ .** Этот параметр связан с объектом и настраивается на доминирующий источник. Поэтому  $K$  определяется экспериментально при компьютерном моделировании или на реальном объекте.

Если доминирующий источник известен, то его нужно реализовать, вызывая наихудший режим. Увеличивая  $K$ , следует контролировать ошибку слежения  $e(t)$  в точке  $t = t_s$  и добиться вхождения траектории  $e(t)$  в коридор допустимой ошибки, т. е. выполнения условия  $e(t) \leq |\delta_s|/100$  для всех  $t \geq t_s$ .

После некоторого значения  $K$  в системе устанавливаются заданные  $\sigma$  и  $t_s$ . Однако не следует злоупотреблять значением  $K$ , поскольку это может привести к перерасходу энергии. Если энергия управления строго регламентирована, то целесообразно использовать экстремальный регулятор, поддерживающий  $K$  на минимальном уровне в зависимости от ошибки слежения  $e(t)$ .

## Результаты моделирования

Рассматриваемые здесь робастные системы управления относятся к параметрически неопределенным системам.

**Пример 1.** Пусть нелинейная модель двусвязного объекта задана системой нелинейных дифференциальных уравнений в форме "вход—выход":

$$\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 10y_1^2 + a_2\dot{y}_2 = y_1y_2u_1 + \sin(5t)u_2 + v_1;$$

$$\ddot{y}_2 + 0,5\dot{y}_2 + 4y_2 + a_1y_1 = 2u_1 + \cos(5t)\dot{y}_1u_2 + v_2.$$

Здесь  $k = 2$ ,  $m = 2$ ;  $\mathbf{y}_1 = (y_1, \dot{y}_1)^T = (x_1^1, x_2^1)^T$ ,  $\mathbf{y}_2 = (y_2, \dot{y}_2)^T = (x_1^2, x_2^2)^T$ ;  $f_1 = -2\dot{y}_1 - 10y_1^2 - a_2\dot{y}_2 + v_1$ ,  $f_2 = -0,5\dot{y}_2 - 4y_2 - a_1y_1 + v_2$ ;  $b_{11} = y_1y_2$ ,  $b_{12} = \sin(5t)$ ,  $b_{21} = 2$ ,  $b_{22} = \cos(5t)\dot{y}_1$ .

Неконтролируемые внешние возмущения  $v_1 = 1 + 0,5\sin(10t)$ ,  $v_2 = \sin(5t)\cos(10t)$ .

Модель (2) имеет вид

$$\ddot{y}_1 = \varphi_1 + b_{11}u_1;$$

$$\ddot{y}_2 = \varphi_2 + b_{22}u_2,$$

где "приведенные неконтролируемые возмущения"  $\varphi_1 = f_1 + \sin(5t)u_2$ ,  $\varphi_2 = f_2 + 2u_1$ .

Параметры перекрестных связей по выходам  $a_2$ ,  $a_1$  имеют интервальную неопределенность в диапазоне  $a_2 \in [-4, +4]$ ,  $a_1 \in [-2, +8]$ .

При моделировании на MATLAB/Simulink использовано соответствующее уравнение состояния:

$$\dot{x}_1^1 = x_2^1;$$

$$\dot{x}_2^1 = \varphi_1 + x_1^1 x_1^2 u_1;$$

$$\dot{x}_1^2 = x_2^2;$$

$$\dot{x}_2^2 = \varphi_2 + \cos(5t)x_2^1 u_2;$$

$$y_1 = x_1^1; y_2 = x_1^2;$$

$$\varphi_1 = -10(x_1^1)^2 - 2x_2^1 - a_2x_2^2 + v_1 + \sin(5t)u_2;$$

$$\varphi_2 = -4x_1^2 - 0,5x_2^2 - a_1x_1^1 + v_2 + 2u_1.$$

1. *Первый канал* ( $i = 1$ ) " $u_1 - y_1$ ". Здесь  $k = 2$ . В качестве эталонной траектории примем единичный скачок  $y_d(t) = 1(t)$ . Пусть при допустимой ошибке  $\delta_s = 2\%$  время установления  $t_s = 1$  с. При начальных условиях эталонной траектории  $\mathbf{y}_d(0) = (1; 0)^T$  и объекта  $\mathbf{y}(0) = (0; 0)^T$  начальное условие для ошибки  $\mathbf{e}(0) = \mathbf{y}_d(0) - \mathbf{y}(0) = (1; 0)^T \Rightarrow \mathbf{e}_s(0) = \mathbf{e}(0) = 1$ .

Уравнение (15) принимает вид

$$f(p_1) = e(0)\exp(-p_1 t_s) \mp \delta_s/100 = 1 \cdot \exp(-p_1) - 0,02 = 0.$$

Используя функцию  $\text{solve}(\cdot)$ , находим  $p_1 = 3,912$ . Тогда в соответствии с выражением (16)  $S = p + 3,912 \Rightarrow c_1 = 3,912$ . В результате уравнение регулятора примет вид  $u = K_1(3,912e + \dot{e})$ .

Согласно (18) передаточная функция регулятора

$$W_C(p) = K_1 \frac{p + 3,912}{T_d p + 1}.$$

При  $k = 2$  для регулятора используем точное выражение  $u = K_1(3,912e + \dot{e})$ .

2. *Второй канал* ( $i = 2$ ) " $u_2 - y_2$ ". Теперь для эталонной траектории примем гармонический сигнал  $y_d(t) = \sin(4t)$ . Пусть  $\delta_s = 2\%$ , а время установления  $t_s = 2$  с. Начальное условие эталонной траектории  $\mathbf{y}_d(0) = (0; 1)^T$ . Пусть начальное условие объекта  $\mathbf{y}(0) = (1,5; 0)^T$ . Тогда  $\mathbf{e}(0) = \mathbf{y}_d(0) - \mathbf{y}(0) = (-1,5; 1)^T \Rightarrow \mathbf{e}_s(0) = \mathbf{e}(0) = -1,5$ .

Уравнение (15) принимает вид

$$f(p_1) = e(0)\exp(-p_1 t_s) \mp \delta_s/100 = -1,5 \cdot \exp(-2p_1) + 0,02 = 0.$$

Используя функцию  $\text{solve}(\cdot)$ , находим  $p_1 = 2,159$ . Тогда в соответствии с выражением (16)  $S = p + 2,159 \Rightarrow c_1 = 2,159$ . В результате имеем уравнение регулятора  $u = K_2(2,159e + \dot{e})$ .

Согласно (18) передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_C(p) = K_2 \frac{p + 2,159}{T_d p + 1}.$$

При  $k = 2$  для регулятора используем точное выражение  $u = K_2(2,159e + \dot{e})$ .

На рис. 1 (см. вторую сторону обложки) для семи значений параметров, взятых из интервала  $a_2 = [-4, +4]$ ,  $a_1 \in [-2, +8]$ , показаны пучки переходных характеристик  $\{y_1(t)\}$  (рис. 1, а) и соответствующие сигналы управления  $\{u_1(t)\}$  (рис. 1, б) при  $K_1 = 250$ , а также показаны  $\{y_2(t)\}$  (рис. 1, в) и  $\{u_2(t)\}$  (рис. 1, г) при  $K_2 = 120$ .

Как видно из рис. 1, а и рис. 1, в, по обоим каналам для пучков переходных характеристик  $\{y_1(t)\}$  и  $\{y_2(t)\}$  удовлетворяются (пусть визуально) заданные показатели качества  $\sigma = 0\%$ ,  $t_s = 1$  с и  $\sigma = 0\%$ ,  $t_s = 2$  с.

**Пример 2. Перевернутый маятник.** Принимая обозначения  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ , уравнение нелинейного перевернутого маятника, используемое в работе [18], можно представить в следующем виде [19]:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \left( \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m} \right)}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} + \frac{\frac{\cos x_1}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} u + v(t);$$

$$y = x_1.$$

Параметры объекта:  $m_c = 1,5$  кг,  $m = 0,2$  кг,  $l = 1$  м,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Пусть начальное состояние объекта  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = (1 \text{ рад}; 0 \text{ рад/с})^T$ .

На рис. 2 представлена кинематическая схема перевернутого маятника.

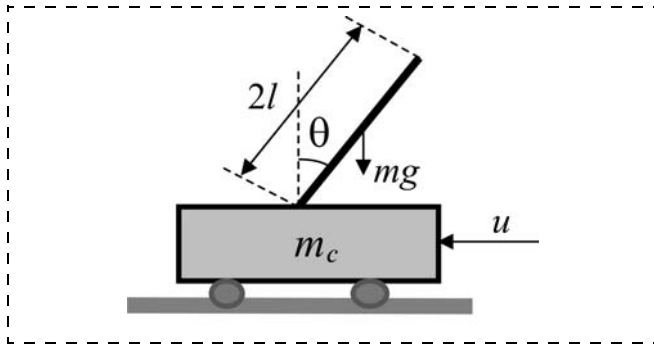


Рис. 2. Кинематическая схема перевернутого маятника

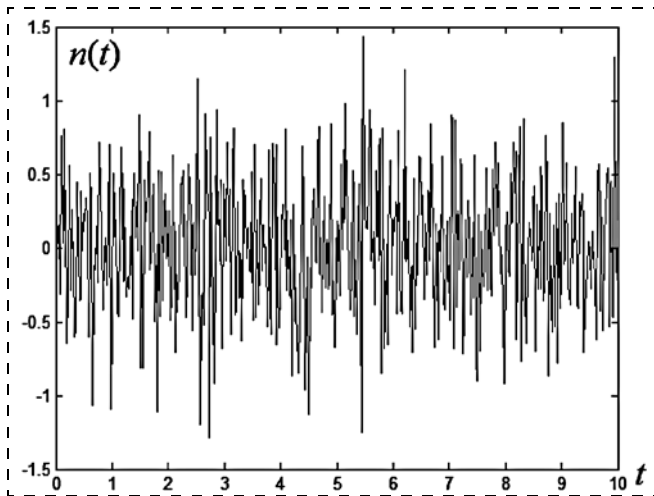


Рис. 3. Гауссовская помеха

На объект в точке приложения управления действует гауссовская помеха  $v(t)$ , представленная на рис. 3.

Пусть эталонная траектория задана в виде:  $y_d = \theta_d = 0,2\sin(t) + 0,05\cos(3t)$ . Начальное значение  $y_d(0) = (0,05; 0,2)^T$ .

Требуемые показатели качества: перерегулирование  $\sigma = 0\%$ ; время установления  $t_s = 1$  с для  $\delta = \pm 2\%$ -ной допустимой ошибки регулирования.

Вычисляем начальное значение ошибки:  $e(0) = y_d(0) - y(0) = (e(0); \dot{e}(0))^T = (-0,95; 0,2)^T$ .

Поскольку  $k = 2$ , то регулятор имеет один параметр настройки  $c_1$ . Для определения  $c_1$  сначала вычисляем  $p_1$ . При  $k = 2$  значения  $Z^{-1} = 1$ ,  $e_s(0) = e(0)$ ,  $\theta = 1 \Rightarrow C^T = e(0)$ . Тогда уравнение (15) имеет вид

$$f(p_1) = e(0)\exp(-p_1 t_s) + 0,02 = -0,95\exp(-p_1) + 0,02 = 0.$$

Используя функцию  $\text{solve}(\cdot)$ , находим  $p_1 = 3,86$ . Тогда в соответствии с выражением (16)  $S = p + 3,86 \Rightarrow c_1 = 3,86$ .

В результате уравнение регулятора имеет вид:  $u = K(3,86e + \dot{e})$ .

На рис. 4 показаны графики изменения ошибки регулирования  $e(t)$  в зависимости от коэффициента усиления  $K$  (рис. 4, а) и фазовый портрет системы (рис. 4, б) при номинальных значениях параметров объекта.

Для номинальных значений параметров уже при  $K = 120$  выполняются заданные показатели качества  $\sigma = 0\%$ ,  $t_s = 1$  с. Дальнейшее увеличение  $k$  не оказывает ощутимого влияния на показатели качества, однако приводит к увеличению энергии управления.

Фазовый портрет системы построен при начальных условиях  $y(0) = x_1(0) = [-0,3; 0,5; 1; -0,5; -1; 0,5]$ ,  $\dot{y}(0) = x_2(0) = [5; 2; 2; -1; -1; -4]$ . Начальные условия ошибки и ее производной вычислены как  $e(0) = y_d(0) - x_1(0)$ ,  $\dot{e}(0) = -x_2(0)$ . При  $K = 120$  все траектории стягиваются к линии  $s = \dot{e} + 3,86e = 0$ .

В начальный момент времени управляющий сигнал принимает довольно высокое значение  $u(0) = -870$ . Поэтому с помощью блока *Saturation* (насыщение) сигнал был ограничен на интервале  $-150 \leq u(t) \leq 150$ ,  $t \geq 0$ . Наложение позиционного ограничения на управление сужает допустимый интервал варьирования параметров.

Рассмотрим случай параметрической неопределенности. Пусть масса тележки  $m_c = 1,5$  кг изменяется на  $\approx \pm 50\%$ .

На рис. 5 показаны пучки переходных характеристик по выходу  $\{y(t)\}$  (рис. 5, а), ошибке  $\{e(t)\}$  (рис. 5, б) и сигнал управления  $\{u(t)\}$  (рис. 5, в) при  $m_c = [0,5; 1,0; 1,5; 2,5]$ ,  $K = 200$  и начальном условии объекта  $y(0) = (1; 0)^T$  в случае приложения на вход объекта помехи  $v(t)$ .

На рис. 6 показаны переходные характеристики для различных начальных условий, приведенных выше.

Концентрация пучков  $\{y(t)\}$  и  $\{e(t)\}$  довольно высокая. Через  $t_s \approx 1$  с выход объекта  $\{y(t)\}$  начинает довольно точно отслеживать эталонную траекторию  $y_d(t)$ .

В ослаблении действующих на вход объекта помех существенную роль играет фильтрующее свойство самого объекта. Задача синтеза усложняется, тогда, когда помеха прилагается к наблюдаемому выходу  $y(t)$  (в виде помехи

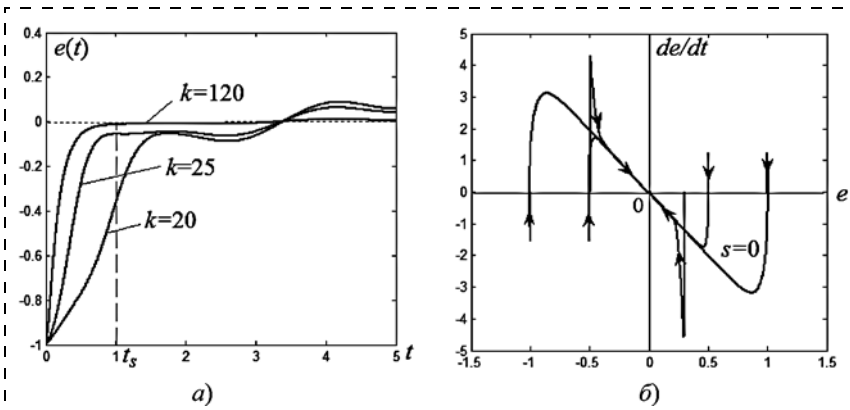


Рис. 4. Графики изменения ошибки и фазовый портрет системы

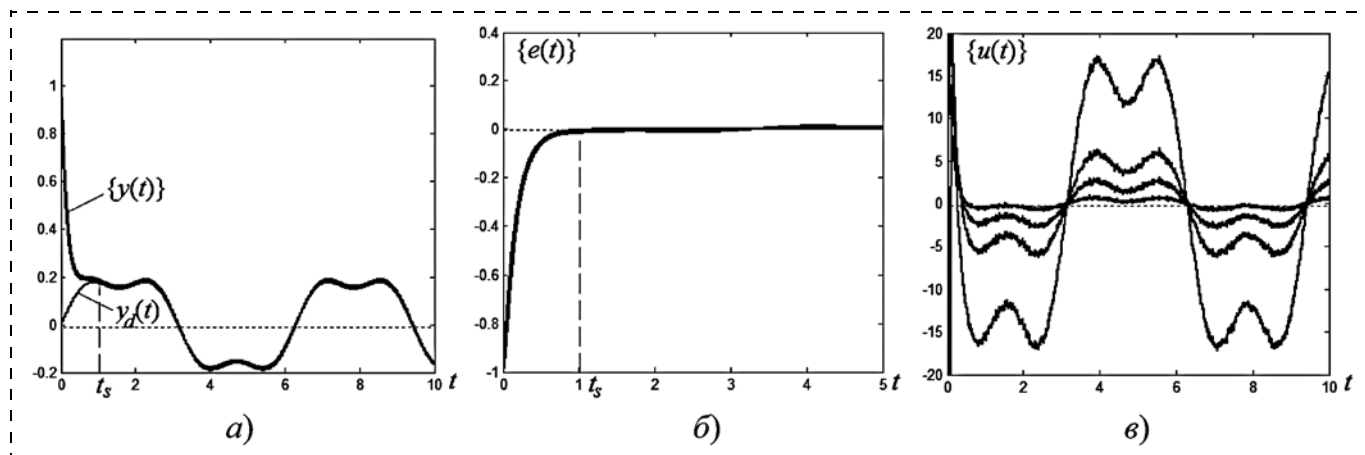


Рис. 5. Переходные характеристики и сигнал управления при изменении массы тележки

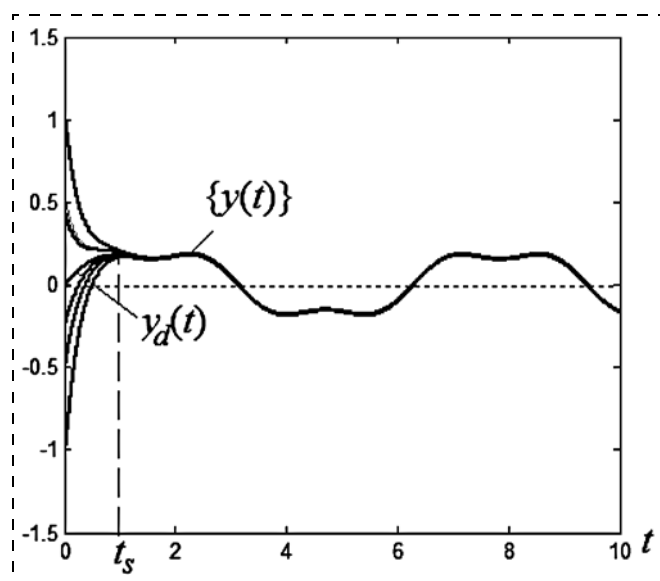


Рис. 6. Переходные характеристики при различных начальных условиях

измерения) или к эталонной траектории  $y_d(t)$ . При этом помеха имеет непосредственный "доступ" к регулятору и искажает сигнал управления.

На рис. 7 (см. вторую сторону обложки) показаны переходные характеристики по выходу при наложении помехи на эталонный сигнал  $\tilde{y}_d = y_d(t) + v(t)$  и  $m_c = [1; 1,5; 2]$ .

В данном случае происходит усиление помехи. Эта особенность является характерной для систем управления с большим коэффициентом усиления. Для ослабления уровня помехи можно использовать фильтр низкой частоты.

### Заключение

В работе рассмотрен один из возможных подходов к построению следящих робастных систем управления с большим коэффициентом усиления. Предложенная методика позволяет обойти слож-

ные математические трудности, присущие большинству известных подходов к синтезу робастных систем, и управлять нелинейными нестационарными объектами в условиях существенной неопределенности с помощью простого физически понятного  $PD^{n-1}$ -регулятора.

Преимущество методики заключается в следующем:

- используется незначительная информация об объекте — достаточно структурное представление модели. Исключение составляет  $H_\infty$ -теория, где используется точная номинальная модель объекта;
- не используются наблюдатели неопределенностей, которые уменьшают быстродействие системы и создают новые неудобства, связанные с известными проблемами сходимости в реальных условиях;
- простота синтеза и возможность построения простых робастных регуляторов, востребованных в промышленных приложениях;
- независимость настроек  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , и  $K$ ;
- возможность решить задачу автономности прямых каналов без использования компенсаторов перекрестных каналов, что имеет важное прикладное значение.

Недостатки методики:

- отсутствие аналитической формулы для определения коэффициента усиления  $K$ ;
- для формирования регулятора необходимо измерить (или оценить) производные выходной величины объекта;
- происходит усиление высокочастотных помех, имеющих непосредственный доступ к регулятору. При зашумленном входе можно использовать фильтр низких частот;
- не все объекты допускают реализации чрезмерно большого коэффициента усиления.

Решение модельной задачи с использованием пакета MATLAB/Simulink позволило сделать ряд положительных выводов, имеющих важное прикладное значение.

## Список литературы

1. Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. Vol. AC-34. № 8. P. 831–847.
2. Chen Y. H., Piontek E. D. Robust modal Control of distributed parameter system with uncertainty // Proc. Amer. Contr. San Diego. Calif. 1990. Vol. 2. P. 2014–2019.
3. Позняк А. С. Основы робастного управления ( $H_\infty$ -теория). М.: Изд-во МФТИ, 1991. 128 с.
4. Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Inc., 1996.
5. Поляк Б. Т., Шербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
6. Ho H. F., Wong Y. K., Rad A. B. Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control Design: Lyapunov Approach // Proc. IEEE International Conference on Fuzzy System. 2001. P. 6–11.
7. Lee H., Tomizuka M. Adaptive Traction Control. University of California, Berkeley. Department of Mechanical Engineering. September. 1995. P. 95–32.
8. Казурова А. Е., Потапенко Е. М. Возможные варианты построения высокоточных систем управления упругой неопределенной электромеханической системой // Электротехника та електроенергетика. 2009. — № 2. С. 4–14.
9. Потапенко Е. М. Сравнительная оценка робастных систем управления с различными типами наблюдателей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 1. С. 109–116.
10. Потапенко Е. М. Исследование робастности систем управления с наблюдателями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 2. С. 104–108.
11. Чакри Ф. Современная теория управления: Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Мир, 1975.
12. Мееров М. В. Системы автоматического управления, устойчивые при бесконечно больших коэффициентах усиления // Автоматика и телемеханика. 1947. Т. 8, № 4. С. 225–243.
13. Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического управления высокой точности. М.: Наука, 1967. 423 с.
14. Рустамов Г. А. Робастная система управления с повышенным потенциалом // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324, № 5. С. 13–19.
15. Rustamov G. A. Absolutely robust control systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, № 5. P. 227–241.
16. Rustamov G. A. Design of Absolutely Robust Control Systems for Multilinked Plant on the Basis of an Uncertainty Hyperobserver // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. V. 48, № 3. — P. 129–143.
17. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука. 1981. 368 с.
18. Wang L. X. A course in fuzzy systems and control. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice Hall. 1997.
19. Geng F., Zhu X. Novel Adaptive Fuzzy control of the Inverted Pendulum System / IEEE International Conference on Control and automation Guangzhou. CHINA-May 30 to June 1. 2007. P. 284–288.
20. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Метод больших коэффициентов усиления и эффект локализации движения в задачах синтеза систем автоматического управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 2 (95). С. 2–10.

## $K_\infty$ -Robust Control Systems

G. A. Rustamov, gazanfar.rustamov@gmail.com✉,  
Azerbaijani Technical University, Baku, AZ 1073, Azerbaijan

Corresponding author: Rustamov Gazanfar A., D. Sc., Professor,  
Azerbaijani Technical University, Baku, AZ 1073, Azerbaijan,  
e-mail: gazanfar.rustamov@gmail.com

Received on November 02, 2014

Accepted November 24, 2014

*The article presents development of the classical control systems with a high gain. In the classical formulation (M. V. Meyerov) these systems found no proper development. The basis of the proposed approach is the method of Lyapunov functions. As a result of a synthesis "a robust equivalent control" was obtained. A possibility of a limitless increase of the controller gain without violation of the stability of the system makes it possible to suppress the general components of an uncertain model to an arbitrarily small value. This ensures a high precision of the reference trajectory tracking and speed for a wide class of nonlinearities and uncertainties. In the limit the system is described by the equation of the hyperplane for an arbitrary initial state.  $K_\infty$ -robust system is applied to a nonlinear multidimensional coupled systems with an interval uncertainty. The author managed to solve the problem of autonomy of the direct channels without the use of the cross-channel compensators, which is of important practical significance. The disadvantages of the proposed methodology are absence of the analytical formula for determination of the gain coefficient of the controller, gain of the highfrequency noise having immediate access to the controller, as well as the use of the output derivative for formation of PD controller. Moreover, not every object can achieve a high gain. The theoretical results were proved by solving of the model problems on MATLAB/Simulink.*

**Keywords:** robust tracking system, Lyapunov function, high gain, robust equivalent control, related system, inverted pendulum

For citation:

Rustamov G. A.  $K_\infty$ -Robust Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 7, pp. 435–443.

DOI: 10.17587/mau.16.435-443

## References

1. Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1989, vol. AC-34, no. 8, pp. 831–847.
2. Chen Y. H., Piontek E. D. Robust modal Control of distributed parameter system with uncertainty, *Proc. Amer. Contr. San Diego. Calif.*, 1990, vol. 2, pp. 2014–2019.
3. Poznyak A. S. *Osnovy robastnogo upravleniya ( $H_\infty$ -teoriya)* (Fundamentals of robust control ( $H_\infty$  — theory)), Moscow, Publishing house of Moscow Physical-Technical University, 1991, 128 p. (in Russian).
4. Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Inc., 1996.
5. Polyak B. T., Sherbakov P. S. *Robastnaya ustoychivost i upravleniye* (Robust stability and control), Moscow, Nauka, 2002 (in Russian).
6. Ho H. F., Wong Y. K., Rad A. B. Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control Design: Lyapunov Approach, *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy System*, 2001, pp. 6–11.
7. Lee H., Tomizuka M. Adaptive Traction Control, University of California, Berkeley, Department of Mechanical Engineering, September, 1995, pp. 95–32.
8. Kazurova A. E., Potapenko E. M. *Vozmojnyiy varianti postroyeniya visokotochnikh systems upravleniya dlya uprugoy neopredelennoy elektricheskoy sistemy* (Possible options of design of high-precision



control systems for elastic uncertain electromechanical systems), *Elektrotehnika i elektroenergetika — Electrical engineering and electricity*, 2009, no. 2, pp. 4–14 (in Russian).

9. **Potapenko E. M.** *Sravnitel'naja ochenka pobastnich system upravleniya s razlichnymi tipami nabludatel'j* (Comparative evaluation of robust control systems with different types of observers), *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemi upravleniya — Bulletins of the Academy Sayns Rashin. Teorey and control systems*, 1995, no. 1, pp. 109–116 (in Russian).

10. **Potapenko E. M.** *Issledovaniye robastnosti system upravleniya s nabljudatelem* (Research of robust control systems with observers), *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemi upravleniya — Bulletins of the Academy Sayns Rashin. Teorey and control systems*, 1996, no. 2, pp. 104–108 (in Russian).

11. **Chaki F.** *Sovremennaya teoriya upravleniya: Nelineyniy, optimalmniy i adaptivniy sistemi* (Nonlinear, optimal and adaptive systems), Moscow, Mir, 1975, 224 p. (in Russian).

12. **Meyerov M. V.** *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya, ustojchivye pri beskonechno bolshih koeffitsientah usileniya* (Stable automatic control systems with an infinitely large gain coefficient). *Avtomatika i Telemekhanika (Automation and Telemechanics)*, 1947, vol. 8, no. 4, pp. 225–243 (in Russian).

13. **Meyerov M. V.** *Sintez struktur system avtomaticheskogo upravleniya vysokoy tochnosti* (Synthesis of structures of automatic control systems with high precision), Moscow, Nauka, 1967, 423 p. (in Russian).

14. **Rustamov G. A.** *Robastnaya sistema upravleniya s povysheym potentsialom* (Robust control system with high potential), *Bulletins of the Toms Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 5, pp. 13–19 (in Russian).

15. **Rustamov G. A.** Absolutely robust control systems, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2013, v. 47, no. 5, pp. 227–241.

16. **Rustamov G. A.** Design of Absolutely Robust Control Systems for Multilinked Plant on the Basis of an Uncertainty Hyperobserver, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2014, v. 48, no. 3, pp. 129–143.

17. **Utkin V. I.** *Sliding Modes in Optimization and Control Problems*, New York, Springer Verlag, 1992, 420 p.

18. **Wang L. X.** *A course in fuzzy systems and control*, Englewood Cliffs, NJ., Prentice Hall, 1997.

19. **Geng F., Zhu X.** Novel Adaptive Fuzzy control of the Inverted Pendulum System, *IEEE International Conference on Control and automation Guangzhou, CHINA* — May 30 to June 1, 2007, pp. 284–288.

20. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Metod bolshix koeffitsiyentov usileniya i effekt lokalizatsii dvizheniya v zadachakh sinteza system avtomaticheskogo upravleniya* (Method of Major Amplification Factors and the Effect of Localization of Movements in the Problems of Design of Automatic Control Systems), *Mechatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 2 (95), pp. 2–10 (in Russian).

УДК 621.3.078.3

DOI: 10.17587/mau.16.443-448

**Н. А. Балонин**, д-р техн. наук, доц., korbendfs@mail.ru,

Государственный университет аэрокосмического приборостроения, г. Санкт-Петербург,

**В. С. Суздаль**, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., suzda@isma.kharkov.ua,

**Ю. С. Козьмин**, канд. техн. наук, науч. сотр., ukoz55@mail.ru,

**В. Н. Тонкошкур**, инженер, Vladimir-t63@mail.ru,

Институт сцинтилляционных материалов НАН Украины, г. Харьков

## Синтез модального регулятора в системах выращивания монокристаллов

Рассматривается задача синтеза модального управления на основе мер модального доминирования. Параметры переходного процесса в замкнутой системе управления процессом выращивания сцинтилляционных монокристаллов показывают, что синтезированная система удовлетворяет требованиям к качеству управления.

**Ключевые слова:** модальное управление, модальное доминирование, управление выращиванием монокристаллов

### Введение

Модальное управление обычно определяется как управление, которое решает задачу выбора собственного пространства динамической системы, т. е. размещения ее собственных чисел, или собственных векторов, для достижения целей управления. Проблема модального синтеза, поставленная Калманом, получила свое развитие в ряде работ [3–7]. Впервые строгая математическая постановка задачи модального управления для линейных систем с полным выходом была сформулирована и решена в статье [4], где было показано, что критерием разрешимости задачи является полная управляемость рассматриваемой системы (выполнение критерия Калмана).

Для многосвязных систем выбор спектра влияет в малоприятную проблему манипулирования большим числом собственных значений, что существ-

венно осложняет процесс исследования их влияния на поведение динамической системы, т. е. основная проблема практического модального синтеза состоит в избыточном числе параметров, влияющих на которые, можно получать системы с различными свойствами.

Разработчики обычно определяют желаемый спектр синтезируемой системы на основе эвристических соображений. В монографии [2] предложен метод синтеза на основе мер модального доминирования, сводящий выбор многих собственных значений к выбору одного или нескольких показателей, описывающих сжатие спектра. Меры модального доминирования дают формальную оценку подвижности "позиций" собственных значений и позволяют при синтезе количественно контролировать тенденции изменения спектра.