- 12. Basyrov A. G., Lebedev D. M., Mastin A. B. Planirovanie parallel'noj obrabotki informacii v vysokoproizvoditel'nyh vychislitel'nyh sis-temah bortovyh kompkksov upravlenija kosmicheskimi apparatami (Planning for parallel processing of information in high-performance computing systems onboard spacecraft control systems), Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie, 2011, no. 1, pp. 74—77 (in Russian).

  13. Brovkin A. G., Burdygov B. G., Gordijko S. V. Bortovye sis-
- 13. **Brovkin A. G., Burdygov B. G., Gordijko S. V.** *Bortovye sistemy upravlenija kosmicheskimi apparatami* (The onboard systems of spacecraft control), Moscow, MAI-PRINT, 2010, 304 p. (in Russian).
- 14. Ahmetov R. V., Makarov V. P., Sollogub A. V. Koncepcija avtonomnogo upravlenija zhivuchest'ju avtomaticheskih kosmicheskih apparatov distancionnogo zondirovanija zemli v anomal'nyh situacijah (The concept of autonomous control of unmanned spacecraft survivability of remote sensing in abnormal situations), Mehanika i Mashinostroenie, 2009, vol. 11, no. 3, pp. 165—176 (in Russian).
- 15. Alekseeva Ju. S., Zlatkina Ju. M., Krivcova V. S., Kulika A. S., Chumachenko V. I. Proektirovanie i jeksperimentarnaja otrabotka system upravlenija ob ektov raketno-kosmicheskoj tehniki (Design and experimental development of control systems Ob-projects rocket and space technology. T. 2. Design of Control Systems Outer vehicles and orbital station modules: a textbook in 3 volumes.), Khar'kov, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", NPP Hartron-Arkos, 2012, 680 p. (in Russian).
- 16. **Harchenko V. S.** *Bezopasnost' kriticheskihinfrastruktur: mate-maticheskie i inzhenernye metody analiza i obespechenija* (Security of critical infrastructures: mathematical and engi-stock-analysis methods

- and software), Khar'kov, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", 2011, 641 p. (in Russian).
- 17. **Firsov S. N.** Obespechenie funkcional noj ustojchivosti sistemy stabilizacii i orientacii malogabaritnogo avtonomnogo letajushheogo izdelija (Ensuring the functional stability of the system stabilization and targeting small-sized autonomous letayuscheogo products), Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie, 2014, no. 5, pp. 54—60 (in Russian)
- 18. Firsov S. N. Reznikova O. V. Apparatno-programmnyj kompleks jeksperimental'noj otrabotki processov upravlenija, diagnostirovanija i parirovanija otkazov malyh kosmicheskih apparatov (Hardware-software complex experimental development management processes, diagnosis and parry bounce small spacecraft), *Pribory i Sistemy. Upravlenie, Kontrol'*, *Diagnostika*, 2014, no. 6, pp. 60—69 (in Russian).
- 19. **Firsov S. N.** Obespechenie funkcional'noj ustojchivost'ju stabilizacii i orientacii kosmicheskogo apparata (Ensuring functional stability and stabilization of the orientation of the spacecraft), *Science Rise*, 2014, no. 1 (1), pp. 32—41.
- 2014, no. 1 (1), pp. 32—41.

  20. **Kulik A. S.** *Signal no-parametricheskoe diagnostirovanie system upravlenija* (The signal-parametric diagnostics of control systems), Khar'kov, Biznes Inform, 2000, 260 p. (in Russian).

Corresponding author:

**Firsov Sergey N.,** Ph. D, Associate Professor, National Aerospace University named after Zhukovsky, KhAI, Kharkov, 61000, Ukraine, e-mail: sn.firsof@gmail.com

УДК 531.383

**М. А. Барулина**, канд. техн. наук, науч. сотр., marina@barulina.ru, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

# Построение матрицы масс трехмерного конечного элемента для моделирования динамики микромеханических датчиков инерциальной информации и их узлов

Построена матрица масс трехмерного конечного элемента, полностью учитывающая теорию Тимошенко — жесткость сечения балки на изгиб и сдвиг сечения при деформации. Полученная матрица масс обобщает построенные ранее матрицы масс для подобных элементов. Показана возможность использования конечного элемента с предлагаемой матрицей масс для численного моделирования динамических процессов и нагрузок в микромеханических датчиках инерциальной информации и их узлах.

**Ключевые слова:** микромеханический гироскоп, микромеханический акселерометр, конечно-элементное моделирование, теория Тимошенко, вибрации, динамическое воздействие, матрица масс

## Введение

Одним из главных недостатков, препятствующих более широкому использованию микромеханических датчиков, к которым относятся и микромеханические гироскопы (ММГ) и акселерометры (ММА), остается их относительно невысокая точность [1—5]. Так, современные ММГ демонстрируют стабильность систематического дрейфа на уровне единиц и десятков градусов в час (гироскоп ММГ-ЭПТРОН фирмы ГНЦ РФ ЦНИИ Электроприбор, Россия; QRS11 фирмы Systron Donner, США) [2, 3]. При этом требование к точности современных систем навигации и управления неуклонно растут. Требования по дрейфу ("уходу") для современных прецизионных датчиков инерциальной информации находятся на уровне сотых, тысячных и менее угловых градусов в час [1, 4, 5]. Такие требования к точности приборов обусловливают необходимость глубокого, с достаточной степенью обобщения, исследования особенностей взаимного влияния различных по своей природе физических процессов, учета влияния внешней среды функционирования этих датчиков и, в частности, таких важнейших факторов, оказывающих влияние на точность и эффективность приборов инерциальной информации, как вибрационные воздействия.

При эксплуатации в реальных условиях микромеханические датчики инерциальной информации могут испытывать вибрации с амплитудами до 10g и с частотами до 2 кГц. Так как микромеханические гироскопы имеют подвижную вибрирующую часть [4, 5], то при проектировании и исследовании микромеханических датчиков инерциальной информации представляется важным более точное моделирование колебательных процессов, происходящих в приборе. Также важно при моделировании результата, более близкого к реальным процессам,

происходящим в датчике, рассматривать датчик как колебательную систему, состоящую из деформируемых тел — упругих подвесов, чувствительного элемента и т. д.

Одним из методов, которыми можно осуществлять такое моделирование, является метод конечных элементов (МКЭ) [6].

МКЭ получил широкое распространение с развитием вычислительной техники, и к настоящему времени его основные теоретические аспекты метода хорошо разработаны [6—8]. К достоинствам метода МКЭ можно отнести его универсальность и возможность применимости к решению самых разных классов задач. Одними из базовых типов для построения и исследования конечно-элементных моделей в задачах механики твердого тела, на основе которых проектируются современные ММГ и ММА, являются балочный и/или стержневой элементы [6, 7]. Поэтому в настоящей работе особое внимание уделено именно этому типу элементов.

Для исследования колебаний консервативной механической системы без учета демпфирования с помощью конечно-элементной модели записывается следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$M\ddot{u} + Ku = P(t), \tag{1}$$

где M — матрица масс модели; K — матрица жесткости; P — вектор нагрузки; u,  $\ddot{u}$  — соответственно вектор перемещений и ускорений узлов модели.

Учет влияния на датчик тепловых, электростатических и других типов воздействий не является предметом рассмотрения данной статьи и требует дальнейшего исследования.

Матрицы масс и жесткости модели составляются по определенным правилам [6—8] из соответствующих матриц конечных элементов, составляющих конечно-элементную модель.

Решением уравнения (1) являются значения узловых перемещений. Зная узловые перемещения в данный момент времени, можно найти поле перемещений модели и определить напряженно-деформированное состояние в данный момент времени.

Физику процессов, для исследования которых предназначается конечный элемент, описывают так называемые аппроксимирующие функции, которые определяются в соответствии с той или иной теорией, принятой в качестве основной в зависимости от класса и вида решаемых задач. Выбор аппроксимирующих функций, обеспечивающих достаточную точность при относительной простоте вычислений, представляет собой одну из основных проблем МКЭ [7].

Для численного исследования колебательных процессов и напряженно деформированного состояния в механике твердого тела в настоящее время широко используются конечные элементы с аппроксимирующими функциями, полученными на основе классической теории изгиба Эйлера—Бернулли и сдвиговой теории Тимошенко.

Наиболее широко распространенная для моделирования классическая теория изгиба Эйлера—Бернулли имеет ряд недостатков, приводящих к недостоверным результатам при решении некоторых задач [9]. В рамках классической теории изгиба Эйлера—Бернулли делаются следующие предположения [10, 11]:

- 1) поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации, во время изгиба остаются плоскими и перпендикулярными деформированной оси стержня;
- 2) продольные сечения при изгибе не оказывают влияния друг на друга;
- 3) инерция поперечного сечения стержня при изгибе считается пренебрежимо малой.

В отличие от классической теории изгиба, теория Тимошенко описывает изгиб конечной балки более точно, ближе к реальному изгибу. Так, теория Тимошенко, во-первых, учитывает инерцию вращения поперечного сечения балки и, во-вторых, предполагает, что плоское поперечное сечение, нормальное к продольной оси, после деформации остается плоским, но не обязательно нормальным к деформированной продольной оси [9].

Эффекты, которые учитывает теория Тимошенко, очень важны при решении целого ряда современных задач, например, при рассмотрении изгибных деформаций коротких балок и стержней, решении динамических задач распространения фронтов возмущения, исследовании колебаний высокой частоты и т. д. Следует отметить и тот факт, что в динамических задачах возможно искажение поперечных сечений, связанное с модами колебаний [9].

Надо отметить, что вопросы применения теории Тимошенко в различных областях науки и техники привлекают внимание как зарубежных, так и российских ученых [12—17].

В настоящее время существует потребность в совершенствовании математического аппарата для конечных элементов, учитывающих теорию Тимошенко. Так, если аппроксимирующие функции и матрицы жесткости для трехмерных и двухмерных стержневых конечных элементов были ранее получены в работе [18], то матрица масс, полностью соответствующая теории Тимошенко, до настоящего времени была не разработана.

*Целью данной работы* является построение с учетом жесткости сечения балки на изгиб и сдвига сечения при деформации матрицы масс трехмерного конечного элемента на основе выражения для его кинетической энергии.

## Аппроксимирующие функции

Рассмотрим конечный элемент длины L (рис. 1). В данной работе будем рассматривать только элемент с постоянным прямоугольным поперечным сечением, хотя большинство выкладок может быть распространенно на балки с произвольным поперечным сечением.

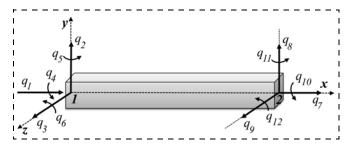


Рис. 1. Трехмерный элемент и узловые перемещения

Определим два узла — в центре левого и правого торцов соответственно (см. рис. 1). Введем локальную систему координат (xyz), начало которой поместим в первом узле. Таким образом, координаты первого узла будут (0, 0, 0), координаты второго узла — (L, 0, 0).

Каждый узел рассматриваемого конечного элемента имеет шесть степеней свободы. Тогда вектор узловых перемещений q конечного элемента можно записать в виде:

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]^{\mathrm{T}};$$
 (2) где  $q_1, q_7$  — продольное перемещение 1-го и 2-го узлов вдоль оси  $x; \ q_2, \ q_8$  и  $q_3, \ q_9$  — поперечное перемещение узлов в направлении оси  $y$  и  $z$  соответственно;  $q_4, \ q_{10}$  — углы кручения вокруг оси  $x; \ q_5, \ q_{11}$  и  $q_6, \ q_{12}$  — углы изгиба в плоскости  $(xz)$  и  $(xy)$  соответственно.

Согласно принципам конечно-элементного моделирования, вектор перемещений в произвольной точке конечного элемента можно выразить через значения перемещений и углов поворота в узловых точках:

$$U = Nq, (3)$$

где  $U = [U_x U_y U_z]^{\rm T}$  — вектор проекций перемещения произвольной точки балки на оси x, y, z; N — матрица аппроксимирующих функций, которые описывают поступательную и изгибную деформации балки. Отметим, что аппроксимирующие функции всегда (и для статики, и для динамики) являются функциями координат, в то время как узловые перемещения в случае динамики зависят от времени.

Компоненты вектора перемещений точки балки можно выразить через перемещения центра поперечного сечения, к которому она принадлежит, и через углы поворота сечения следующим образом [13]:

$$U_{x} = u_{x}(x, t) - \theta(x, t)y + \psi(x, t)z;$$

$$U_{y} = u_{y}(x, t) - \varphi(x, t)z;$$

$$U_{z} = u_{z}(x, t) + \varphi(x, t)y,$$
(4)

где x, y, z — координаты точки;  $u_x(x, t)$  — продольное перемещение центра сечения;  $u_y(x, t), u_z(x, t)$  — поперечные перемещения центра сечения в направлении осей y и z соответственно;  $\varphi(x, t)$  — угол кручения вокруг оси x;  $\psi(x, t), \theta(x, t)$  — углы изгиба в плоскости (xz) и (xy) соответственно. Далее для краткости обозначение  $u_x, u_y, u_z, \varphi, \psi, \theta$  как функций координаты x и времени t будет опущено.

Функции  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  можно выразить через компоненты вектора узловых перемещений q следующим образом [18, 19]:

$$u_{x} = (1 - \xi)q_{1} + \xi q_{7}; \ \varphi = (1 - \xi)q_{4} + \xi q_{10};$$

$$u_{y} = -(\xi - 1)(\mu_{z}\xi - 2\mu_{z}\xi^{2} + 1)q_{2} + \frac{1}{2}[-\xi(\xi - 1)L(\mu_{z} - 2\mu_{z}\xi + 1)]q_{6} - \xi(2\mu_{z}\xi^{2} - 3\mu_{z}\xi + 1)q_{12};$$

$$+ \mu_{z} - 1)q_{8} + \frac{1}{2}[\xi(\xi - 1)L(2\mu_{z}\xi - \mu_{z} + 1)]q_{12};$$

$$\theta = 6\frac{1}{L}\xi(\xi - 1)\mu_{z}q_{2} + (\xi - 1)(3\xi\mu_{z} - 1)q_{6} - \frac{1}{L}\xi(\xi - 1)\mu_{z}q_{8} + \xi(3\mu_{z}\xi - 3\mu_{z} + 1)q_{12};$$

$$u_{z} = -(\xi - 1)(\mu_{y}\xi - 2\mu_{y}\xi^{2} + 1)q_{3} + \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)L(\mu_{y} - 2\mu_{y}\xi + 1)q_{5} - \xi(2\mu_{y}\xi^{2} - 3\mu_{y}\xi + 1)q_{12};$$

$$\psi = -6\frac{1}{L}\xi(\xi - 1)\mu_{y}q_{3} + (\xi - 1)(3\xi\mu_{y} - 1)q_{5} + \frac{1}{L}\xi(\xi - 1)\mu_{y}q_{9} + \xi(3\mu_{y}\xi - 3\mu_{y} + 1)q_{11}.$$
(5)

В формулах (5) приняты следующие обозначения:

$$\xi = \frac{x}{L}; \; \mu_z = \frac{1}{1 + \frac{12EI_z}{kAGL^2}}; \; \mu_y = \frac{1}{1 + \frac{12EI_y}{kAGL^2}},$$

где E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; k — коэффициент сдвига; A — площадь сечения;  $I_z$ ,  $I_y$  — осевые моменты инерции поперечного сечения; L — длина элемента.

Коэффициент сдвига k позволяет учитывать деформацию поперечного сечения, а также нелинейность распределения нормальных продольных и поперечных напряжений. В данной работе для моделирования будет использоваться следующая формула для коэффициента сдвига [9]:

$$k = \frac{3}{2} - \frac{3}{10(1+v)} - \frac{3v}{4(1+v)},$$

где v — коэффициент Пуассона.

## Кинетическая энергия и матрица масс двухузлового конечного элемента с двенадцатью степенями свободы

К настоящему времени достаточно хорошо разработана общая теория построения матриц масс — согласованных, диагональных, несогласованных [6, 8, 20, 21]. В данной работе будет построена согласованная матрица масс (т. е. с использованием тех же аппроксимирующих функций (5), которые использовались и для матрицы жесткости в работе [18])

как дающая наиболее хороший уровень аппроксимации в задачах динамики [21].

Для построения матрицы масс, полностью учитывающей теорию Тимошенко, будет использован классический и хорошо зарекомендовавший себя метод построения матрицы масс путем представления кинетической энергии конечного элемента через узловые скорости [6].

Так, если вектор узловых скоростей представить в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6 \ \dot{q}_7 \ \dot{q}_8 \ \dot{q}_9 \ \dot{q}_{10} \ \dot{q}_{11} \dot{q}_{12}]^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

где точкой обозначена производная по времени, то кинетическую энергию T элемента можно представить в виде квадратичной формы узловых скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{12} m_{i,j} \dot{q}_i \, \dot{q}_j. \tag{7}$$

Коэффициенты  $m_{i,j}$  в выражении (7) представляют собой компоненты матрицы масс.

Запишем кинетическую энергию балочного элемента в виде следующего интеграла по его объему V [22]:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{V} \left( \left( \frac{\partial U_{x}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial U_{y}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial U_{x}}{\partial t} \right)^{2} \right) dV, \tag{8}$$

где  $\rho$  — плотность.

Учитывая соотношения (4) для рассматриваемого конечного элемента балки, выражение (8) перепишем в виде

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{V} ((\dot{u}_{x} + \dot{\psi}z - \dot{\theta}y)^{2} + (\dot{u}_{y} - \dot{\varphi}z)^{2} + (\dot{u}_{z} + \dot{\varphi}z)^{2})dV.$$
(9)

Раскрывая скобки и проинтегрировав по площади поперечного сечения A, придем к следующему соотношению, с учетом того, что оси локальной системы координат являются главными осями инерции:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{0}^{L} (A\dot{u}_{x}^{2} + (I_{y} + I_{z})\dot{\varphi}^{2} + A\dot{u}_{y}^{2} + I_{z}\dot{\varphi}^{2} + A\dot{u}_{z}^{2} + I_{z}\dot{\varphi}^{2})dx,$$
(10)

где A — площадь сечения, а осевые моменты инерции сечения  $I_{\nu}$ ,  $I_{z}$  определяются соотношениями

$$I_y = \int_A z^2 dA$$
,  $I_z = \int_A y^2 dA$ .

Подставив в (10) выражения для производных по времени  $\dot{u}_x$ ,  $\dot{u}_y$ ,  $\dot{u}_z$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  от функций (5) и проинтегрировав по x, получим искомое представление (7) кинетической энергии через узловые скорости, в котором ненулевые компоненты  $m_i$ ;

матрицы масс определяются следующими соотношениями ( $m_{i,i} = m_{i,i}$ ):

$$\begin{split} &m_{1,\ 1} = m_{7,\ 7} = \frac{\rho LA}{6}; \ m_{4,\ 10} = \frac{\rho L(I_z + I_y)}{6}; \\ &m_{1,\ 7} = \frac{\rho LA}{6}; \ m_{4,\ 10} = \frac{\rho L(I_z + I_y)}{6}; \\ &m_{2,\ 2} = m_{8,\ 8} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_z)^2} \bigg[ \frac{6}{5L} r_z^2 + \frac{L(70\gamma_z^2 + 147\gamma_z + 78)}{210} \bigg]; \\ &m_{6,\ 6} = m_{12,\ 12} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_z)^2} \bigg[ \frac{L(10\gamma_z^2 + 5\gamma_z + 4)}{30} r_z^2 + \frac{L^3(7\gamma_z^2 + 14\gamma_z + 8)}{840} \bigg]; \\ &m_{2,\ 6} = -m_{8,\ 12} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_z)^2} \bigg[ -\frac{(5\gamma_z - 1)}{10} r_z^2 + \frac{L^2(35\gamma_z^2 + 77\gamma_z + 44)}{840} \bigg]; \\ &m_{2,\ 8} = \frac{\rho A}{(1 + \gamma_z)^2} \bigg[ -\frac{6}{5L} r_z^2 + \frac{L(35\gamma_z^2 + 63\gamma_z + 27)}{840} \bigg]; \\ &m_{2,\ 12} = -m_{6,\ 8} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_z)^2} \bigg[ -\frac{(5\gamma_z - 1)}{10} r_z^2 - \frac{L^2(35\gamma_z^2 + 63\gamma_z + 26)}{840} \bigg]; \\ &m_{6,\ 12} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_z)^2} \bigg[ -\frac{L(-5\gamma_z^2 + 5\gamma_z + 1)}{30} r_z^2 - \frac{L^3(7\gamma_z^2 + 14\gamma_z + 6)}{840} \bigg]; \\ &m_{3,\ 3} = m_{9,\ 9} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{6}{5L} r_y^2 + \frac{L(70\gamma_y^2 + 147\gamma_y + 78)}{210} \bigg]; \\ &m_{3,\ 5} = m_{11,\ 11} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{L(10\gamma_y^2 + 5\gamma_y + 4)}{30} r_y^2 - \frac{L^3(7\gamma_y^2 + 14\gamma_y + 8)}{840} \bigg]; \\ &m_{3,\ 9} = \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{6}{5L} r_y^2 + \frac{L(35\gamma_y^2 + 63\gamma_y + 27)}{840} \bigg]; \\ &m_{3,\ 22} = -m_{5,\ 9} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{1}{10} r_y^2 + \frac{L^2(35\gamma_y^2 + 63\gamma_y + 26)}{840} \bigg]; \\ &m_{3,\ 12} = -m_{5,\ 9} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{L(-5\gamma_y^2 + 5\gamma_y + 1)}{30} r_y^2 - \frac{L^3(7\gamma_y^2 + 14\gamma_y + 6)}{840} \bigg]; \\ &m_{5,\ 11} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{L(-5\gamma_y^2 + 5\gamma_y + 1)}{30} r_y^2 - \frac{L^3(7\gamma_y^2 + 14\gamma_y + 6)}{840} \bigg]; \\ &m_{5,\ 11} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{L(-5\gamma_y^2 + 5\gamma_y + 1)}{30} r_y^2 - \frac{L^3(7\gamma_y^2 + 14\gamma_y + 6)}{840} \bigg]; \\ &m_{5,\ 11} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{L(-5\gamma_y^2 + 5\gamma_y + 1)}{30} r_y^2 - \frac{L^3(7\gamma_y^2 + 14\gamma_y + 6)}{840} \bigg]; \\ &m_{5,\ 11} = \\ &= \frac{\rho A}{(1 + \gamma_y)^2} \bigg[ -\frac{L(-5\gamma_y^2 + 5\gamma_y + 1)}{30} r_y^2 - \frac{L^3(7\gamma_y^2 + 14\gamma_y + 6)}{840} \bigg]; \\ &m_{5,\ 11} = \frac{L(-5\gamma_y^2 + 5\gamma_y + 1)}{30} r_y^2 - \frac{L^3(7\gamma_y^2 + 14\gamma_y + 6)}{840} \bigg].$$

В формулах (11) для  $m_{i,j}$  приняты следующие обозначения:

$$\gamma_z = \frac{12EI_z}{kAGL^2}; \gamma_y = \frac{12EI_y}{kAGL^2}; r_y^2 = \frac{I_y}{A}; r_z^2 = \frac{I_z}{A}.$$
 (12)

Как видно из формул (12),  $r_y^2$ ,  $r_z^2$  — квадраты радиуса инерции поперечного сечения балки.

Таким образом, формулы (11) определяют полностью матрицу масс рассматриваемого балочного элемента на основе теории Тимошенко.

Компоненты  $m_{i,j}$  (i,j=1,4,7,10) определяют вклад в матрицу масс от продольного движения; компоненты  $m_{i,j}$  (i,j=2,6,8,12) — вклад поперечного движения в плоскости (xy); компоненты  $m_{i,j}$  (i,j=3,5,9,11) — вклад поперечного движения в плоскости (xz).

Из формул (11) следует, что учет влияния на деформацию балки жесткости сечения на изгиб выражается слагаемыми с квадратом радиуса инерции  $r_y^2$ ,  $r_z^2$ . Учет дополнительного сдвига сечения при деформации в соответствии с теорией Тимошенко приводит к появлению в выражениях для компонент матрицы масс слагаемых с  $\gamma_z$ ,  $\gamma_v$ .

В общем виде матрица масс конечного элемента, ненулевые элементы которой вычисляются по формулам (11), имеет вид

$$M^{(e)} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,2} & 0 & 0 & 0 & m_{2,6} & 0 & m_{2,8} & 0 & 0 & 0 & m_{2,12} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & 0 & m_{3,5} & 0 & 0 & 0 & m_{3,9} & 0 & m_{3,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{4,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,5} & 0 & m_{5,5} & 0 & 0 & 0 & m_{5,9} & 0 & m_{5,11} & 0 \\ 0 & 0 & m_{2,6} & 0 & 0 & 0 & m_{6,6} & 0 & m_{6,8} & 0 & 0 & 0 & m_{6,12} \\ m_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,8} & 0 & 0 & 0 & m_{6,8} & 0 & m_{8,8} & 0 & 0 & 0 & m_{8,12} \\ 0 & 0 & m_{3,9} & 0 & m_{5,9} & 0 & 0 & 0 & m_{9,9} & 0 & m_{9,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{4,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{10,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,11} & 0 & m_{5,11} & 0 & 0 & 0 & m_{9,11} & 0 & m_{11,11} & 0 \\ 0 & m_{3,12} & 0 & 0 & 0 & m_{6,12} & 0 & m_{8,12} & 0 & 0 & 0 & m_{13,13} \end{bmatrix}.$$

Как видно из соотношений (11), матрица масс балочного конечного элемента (13) является симметричной матрицей с положительными элементами на главной диагонали. Помимо этого, матрица масс является положительно определенной.

Полученная матрица масс может быть приведена к матрице масс, приведенной в работе [6], полученной для балочных конечных элементов в рамках классической теории Эйлера — Бернулли. Для этого в формулах (11) достаточно положить равными нулю коэффициенты с  $\gamma_z$ ,  $\gamma_y$ ,  $r_y^2$ ,  $r_z^2$ .

Для учета при деформации только жесткости сечения на изгиб и при пренебрежении сдвигом поперечного сечения необходимо обнулить слагаемые с  $\gamma_z$ ,  $\gamma_y$ . Полученная в результате этих действий матрица совпадает с матрицей, построенной в работе [18].

# Численное моделирование и анализ результатов

Проверку построенного математического обеспечения выполнили на примере суперминиатюрного микромеханического гироскопа и акселерометра (СММГА) [23]. Для численного исследования в СММГА динамических процессов с использованием разработанной матрицы масс, учитывающей инерцию и сдвиг сечения при деформации, было разработано оригинальное специализированное программное обеспечение SMMGAtim.

Полученные в процессе численного моделирования результаты сравнивали с результатами, полученными в широко известном универсальном комплексе ANSYS при конечно-элементном моделировании с помощью элементов, учитывающих теорию Тимошенко.

Для интегрирования уравнений (1) в разработанном программном обеспечении SMMGAtim использовался безусловно сходящийся метод Ньюмарка [24]. В качестве матрицы жесткости в уравнении (1) использовалась матрица жесткости балочного элемента, построенная в работе [18] с учетом теории Тимошенко:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,2} & 0 & 0 & 0 & k_{2,6} & 0 & k_{2,8} & 0 & 0 & 0 & k_{2,12} \\ 0 & 0 & k_{3,3} & 0 & k_{3,5} & 0 & 0 & 0 & k_{3,9} & 0 & k_{3,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,5} & 0 & k_{5,5} & 0 & 0 & 0 & k_{5,9} & 0 & k_{5,11} & 0 \\ 0 & k_{2,6} & 0 & 0 & 0 & k_{6,6} & 0 & k_{6,8} & 0 & 0 & 0 & k_{6,12} \\ k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,8} & 0 & 0 & 0 & k_{6,8} & 0 & k_{8,8} & 0 & 0 & 0 & k_{8,12} \\ 0 & 0 & k_{3,9} & 0 & k_{5,9} & 0 & 0 & 0 & k_{9,9} & 0 & k_{9,11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,11} & 0 & k_{5,11} & 0 & 0 & 0 & k_{9,11} & 0 & k_{11,11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,11} & 0 & k_{5,11} & 0 & 0 & 0 & k_{9,11} & 0 & k_{11,11} & 0 \\ 0 & k_{2,12} & 0 & 0 & 0 & k_{6,12} & 0 & k_{8,12} & 0 & 0 & 0 & k_{12,12} \end{bmatrix},$$

где 
$$k_{1, 1} = k_{7, 7} = -k_{1, 7} = \frac{EA}{L};$$

$$k_{4, 4} = k_{10, 10} = -k_{4, 10} = \frac{kG(I_z + I_y)}{L};$$

$$k_{2, 2} = k_{8, 8} = -k_{2, 8} = \frac{12EI_z}{L^3(\gamma_z + 1)};$$

$$k_{6, 6} = k_{12, 12} = \frac{EI_z(\gamma_z + 4)}{L(\gamma_z + 1)};$$

$$k_{2, 6} = k_{2, 12} = -k_{8, 12} = -k_{6, 8} = \frac{6EI_z}{L^2(\gamma_z + 1)};$$

$$k_{6, 12} = -\frac{EI_z(\gamma_z - 2)}{L(\gamma_z + 1)};$$

$$k_{3, 3} = k_{9, 9} = -k_{3, 9} = \frac{12EI_y}{L^3(\gamma_y + 1)};$$

$$k_{5, 5} = k_{11, 11} = \frac{EI_y(\gamma_y + 4)}{L(\gamma_y + 1)};$$

$$k_{3, 5} = k_{3, 11} = -k_{9, 11} = -k_{5, 9} = \frac{-6EI_y}{L^2(\gamma_y + 1)};$$
  
 $k_{5, 11} = -\frac{EI_y(\gamma_y - 2)}{L(\gamma_y + 1)}.$ 

Рассматривалась модель из двух конечных элементов (рис. 2, a). На рис. 2, a номера элементов показаны черными цифрами, номера узлов модели — белыми. Элемент I представляет упругий подвес, элемент 2 — чувствительный элемент.

Были приняты следующие параметры СММГА [23]: плотность  $\rho = 2228$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга E = 190 ГПа, коэффициент Пуассона v = 0.266.

Длина, высота и ширина подвеса принимались равными 164,9 мкм, 3,6 мкм, 3,6 мкм соответственно. Длина, высота и ширина чувствительного элемента равны 164,9 мкм [23].

Для моделирования в ANSYS была построена конечно-элементная модель (рис. 2,  $\delta$ ), содержащая 1095 элементов и 2217 узлов.

На первом этапе решалась задача о нахождении собственных частот и форм колебаний СММГА.

В таблице приведены результаты определения собственных частот в разработанном программном обеспечении SMMGAtim на конечно-элементной модели из двух элементов и модального анализа ANSYS.

Первые две моды в таблице соответствуют собственным поперечным колебаниям в плоскостях (xy) и (xz). Третья и шестая мода соответствуют крутильным колебаниям вокруг оси x, четвертая и пятая моды — поперечным колебаниям в плоскостях (xy) и (xz).

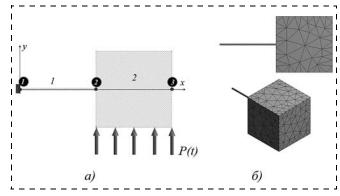
Как видно из таблицы, отличия значений собственных частот поступательного движения, полученных в SMMGAtim и в ANSYS, составляет менее 1 %. Более значительное отличие собственных частот мод 3 и 6, полученных в SMMGAtim и в ANSYS, можно объяснить тем, что в ANSYS скорее всего используется матрица масс, полученная в работе [18] и не учитывающая сдвиг сечения.

Соответствующие первой частоте формы собственных колебаний, определенных на разработанной модели, идентичны определенным в ANSYS (рис. 3). Формы собственных колебаний, соответствующие остальным частотам, также совпали.

На следующем этапе была исследована реакции СММГА на динамическую нагрузку, обеспечивающую первичные колебания чувствительного элемента [23]. Рассматривалась распределенная нагрузка P(t), приложенная к чувствительному элементу и изменяющаяся по гармоническому закону (рис. 3, a):

$$P(t) = A_p \sin(2\pi f_p t + \varphi_p), \tag{14}$$

где  $A_p, f_p, \varphi_p$  — амплитуда, частота и фаза приложенной нагрузки.



**Рис. 2. Конечно-элементная модель СММГА:** a — из двух элементов (SMMGAtim);  $\delta$  — из 1095 элементов (ANSYS)

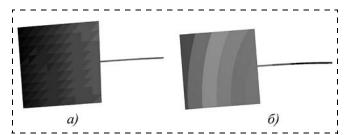


Рис. 3. Первая форма собственных колебаний: a- модель SMMGAtim;  $\delta-$  ANSYS

### Результаты численного нахождения собственных частот (Гц)

Про- граммное обеспечение	№ моды					
	1	2	3	4	5	6
SMMGAtim ANSYS		1102,3 1104,3			11577,8 11593	194652,7 193730

Для расчетов принимались следующие параметры нагрузки:

$$A_p = 5 \text{ H/м}^2$$
,  $\varphi_p = 0 \text{ рад.}$ 

В реальном датчике частота  $f_p$  первичных вынужденных колебаний должна совпадать с резонансной. Для исследования влияния динамической нагрузки на чувствительный элемент частоту  $f_p$  будем варьировать от 20 до 1600 Гц.

На рис. 4—6 показан прогиб  $u_p$  чувствительного элемента (ЧЭ) как функции времени в точке приложения силы при различных значениях частоты вынужденных колебаний.

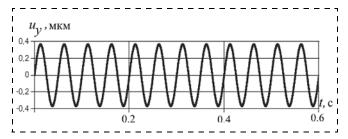


Рис. 4. Прогиб ЧЭ СММГА при  $f_p = 20$  Гц

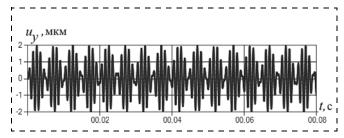


Рис. 5. Прогиб ЧЭ СММГА при  $f_p = 900$  Гц

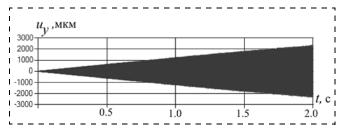


Рис. 6. Прогиб ЧЭ СММГА при  $f_p = 1102,28$  Гц

При частоте вынуждающей силы  $f_p = 20$  Гц максимальный прогиб составил 0,3697 мкм. Расчет в ANSYS дал максимальный прогиб 0,3794 мкм. Для частоты  $f_p = 900$  Гц максимальный прогиб составил 1,97 и 1,77 мкм.

На рис. 5 явно видно биение при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте, на рис. 6 — показан прогиб чувствительного элемента при частоте вынуждающей нагрузки, совпадающей с резонансной.

Надо отметить, что для моделирования динамических процессов выбор шага расчета имеет важное значение. Метод Ньюмарка с параметрами 0,5 и 0,25 имеет второй порядок точности [25]. Поэтому для обеспечения точности результатов при вычис-

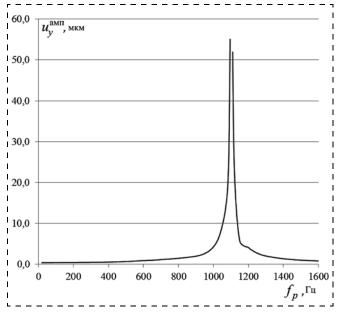


Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика

лениях для  $f_p = 900$  Гц и  $f_p = 1102,28$  Гц (рис. 5, 6) шаг расчета принимался  $5 \cdot 10^{-7}$  с. Вычисления динамических задач в ANSYS с таким шагом требуют значительного времени (нескольких часов и более) и вычислительных ресурсов или же требуют использования редуцированных моделей [26]. Расчеты с использованием специализированного разработанного программного обеспечения SMMGAtim заняли менее 1 мин.

На рис. 7, на котором показана зависимость амплитуды колебаний чувствительного элемента  $u_y^{\rm aM\Pi}$  от частоты  $f_p$  вынуждающей силы, явно видно явление резонанса при частоте  $f_p=1102,28$  Гц.

#### Выводы

Таким образом, построенная в данной работе матрица масс трехмерного конечного элемента, полностью учитывает теорию Тимошенко — жесткость сечения балки на изгиб и сдвиг сечения при деформации.

Построенная матрица масс, учитывающая сдвиг и инерцию сечения при деформации, обобщает полученные ранее матрицы масс, построенные на основе теории Эйлера—Бернулли [6,8] или только с учетом инерции сечения [18], которые могут быть определены из полученной матрицы как частный случай обнулением коэффициентов  $\gamma_z$ ,  $\gamma_y$ ,  $r_z^2$ ,  $r_y^2$ .

Построенная матрица масс может быть использована для моделирования упругих подвесов микромеханических датчиков инерциальной информации и других элементов, которые могут быть представлены балочными или стержневыми конечными элементами.

В работе показана возможность использования трехмерного конечного элемента с предлагаемой матрицей масс для численного моделирования динамических процессов и нагрузок в микромеханических датчиках инерциальной информации.

Преимуществом предлагаемого трехмерного двенадцатистепенного конечного элемента для моделирования являются: учет сдвига и инерции сечения при деформации; полный контроль исследователя над процессом вычислений на любой стадии; низкие требования к вычислительным мощностям относительно универсальных программ конечно-элементного моделирования; возможность исследования высокочастотных колебаний, требующих при конечно-элементном моделировании использовать шаг расчета порядка  $10^{-7}$  с и менее.

Применение предлагаемого конечного элемента позволяет создавать специализированные программы с прозрачным алгоритмом расчета для компьютерного моделирования конкретных схем датчиков с учетом теории Тимошенко.

#### Список литературы

1. **Пешехонов В. Г.** Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация. 2011. № 1. С. 3—17.

- 2. **URL:** http://elektropribor.spb.ru/ru/newprod/rek.12012/ mmg-eptron.pdf
- 3. **URL:** http://www.svstron.com/gyroscopes/qrs11-single-axis-analog-gyroscope
- 4. **Располов В. Я.** Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
- 5. Джашитов В. Э., Панкратов В. М. Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий / Под общей ред. акад. РАН В. Г. Пешехонова. С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2005. 404 с.
- 6. **Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С.** Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
- 7. **Расчеты** машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др.; Под общ. Ред. В. И. Мяченкова. М.: Машиностроение. 1989. 520 с.
  - 8. Rades M. Finite element analysis. Printech, 2006. 274 p.
- 9. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер.: Мех. тверд, деформ. тел. 1973. Т. 5. 272 с.
- 10. **Дарков А. В., Шпиро Г. С.** Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1969. 734 с.
- 11. **Светлицкий В. А.** Механика стержней. В 2-х ч. Ч. 1. Статика. М.: Высшая школа, 1987. 320 с.
- 12. **Stephen N. G.** The second spectrum of Timoshenko beam theory Further assessment // Journal of Sound and Vibration. 2006. N. 292. P. 372—389.
- 13. **Bedjilili Y., Tounsi A., Berrabah H. M., Mechab I., Adda Bedia E. A., Benaissa S.** Natural frequencies of composite beams with a variable fiber volume fraction including rotary inertia and shear deformation // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). 2009. N. 30 (6). P. 717—726.
- 14. **Sadeghian M., Ekhteraei Toussi H.** Frequency analysis of a Timoshenko beam located on an elastic foundation // International Journal of Engineering (IJE) Transactions A: Basics. 2011. Vol. 24, N. 1. P. 87—105.

- 15. **Rongqiao Xu, Guannan Wang.** Bending solutions of the Timoshenko partial-interaction composite beams using Euler-Bernoulli solutions // Journal of Engineering Mechanics. 2013. Vol. 139, N. 12. P. 1881—1885.
- 16. **Троценко Ю. В.** О применении модели балки Тимошенко в задаче о собственных не осесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом // Акустичний вісник. 2003. Т. 6, № 4. С. 54—64.
- 17. **Тулкина А. Н.** Определение частот и форм колебаний стержневой системы, содержащей нанообъект, на основе теории С. П. Тимошенко // Вестник СПбГУ (Серия 1). 2011. Вып. № 1. С. 144—154.
- 18. **Przemieniecki J. S.** Theory of matrix structural analysis. New York: Dover publications, 1985. 480 c.
- 19. **Bazoune A., Knulief Y. A.** Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element // Journal of Sound and Vibration. 2003. 259 (2). P. 473—480.
- 20. **Бацева О. Д., Дмитриев С. Н.** Сравнительный анализ способов получения несогласованных матриц масс // Наука и образование. 2013. № 12.
- 21. **Zienkiewicz O. C.** The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill Publishing Co., 1971. 521 р. (Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.)
- 22. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
- 23. Джашитов В. Э., Панкратов В. М., Барулина М. А. Теоретические основы разработки и создания суперминиатюрного микромеханического многофункционального датчика инерциальной информации // Нано- и микросистемная техника. 2010. № 5 (118). С. 46—54.
- 24. **Newmark N. M.** A method of computation for structural dynamics // Journal of Engineering Mechanics. 1959. Vol. 85, N. 3. P. 67—94.
- 25. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
- 26. **Li H. Nayfeh, Mohammad I. Younis, Eihab M.** Abdel-Rehman. Reduced-Order Models for MEMS Applications // Nonlinear Dynamics. 2005. Vol. 41, Iss. 1—3. P. 211—236.

# Development of a Mass Matrix of the 3D Finite Element for Modeling of the Dynamics of Micromechanical Inertial Sensor Data and their Components

M. A. Barulina, marina@barulina.ru,
Institute of Precision Mechanics and Control, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Received on November 10, 2015

Mass matrix of the 3D finite element with twelve degrees of freedom was constructed taking fully into account Timoshenko theory — the stiffness of the beam section bending and shear deformation of the cross section. The created mass matrix generalizes the mass matrices of the beam element, obtained in compliance with Eu-ler-Bernoulli theory and Rayleigh theory previously constructed by the other authors. These matrices can be obtained by zeroing the specified coefficients in the mass matrix proposed in the paper. In order to verify the constructed mass matrix several numerical experiments were performed. The results were compared with the results of the numerical simulation in ANSYS. Numerical modeling demonstrated that the difference between the values of the natural frequencies in the translational motion obtained with the constructed mass matrix and in ANSYS, is less than 1%. The difference of the maximum displacement under the harmonic loads is less than 5%. The beats take place, when the frequency of the driving force is close to the value of the natural frequency. The effect of the resonance was obtained in the conditions of coincidence of the values of frequency of the driving force and the natural frequency. Thus the feasibility of using the proposed finite element mass matrix for the numerical simulation of the vibrating processes and loads of micromechanical inertial sensors was proved. The main advantages of the proposed 3D finite element with twelve degrees of freedom for modeling are: full respect of the inertia and shear deformation of the cross area; full control over the process of computing at any stage; low requirements for a computer power in comparison with the universal programs for the finite element modeling; possibility to do a study of high-frequency oscillations with a step of calculation equal to or less than  $10^{-7}$  s.

**Keywords:** micromechanical gyroscope, micromechanical accelerometer, finite element analysis, theory of Timoshenko, vibration, mass matrix

For citation:

**Barulina M. A.** Development of a Mass Matrix of the 3D Finite Element for Modeling of the Dynamics of Micromechanical Inertial

Sensor Data and their Components, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol.16, no. 5, pp. 352—360.

DOI: 10.17587/mau.16.352-360

#### References

- 1. **Peshehonov V. G.** *Sovremennoe sostojanie i perspektivy razvitija giroskopicheskih system* (Gyroscopic Systems: Current Status and Prospects), *Giroskopija i navigacija*, 2011, no. 1, pp. 3—17 (in Russian).
- 2. **URL:** http://elektropribor.spb.ru/ru/newprod/rekl2012/mmg-eptron.pdf
- URL: http://www.systron.com/gyroscopes/qrs11-single-axisanalog-gyroscope
- 4. **Raspopov V. Ja.** *Mikromehanicheskie pribory* (Micromechanical devices), Mashinostroenie, 2007, 400 p. (in Russian).
- 5. **Dzhashitov V. Je., Pankratov V. M.** *Datchiki, pribory i sistemy aviakosmicheskogo i morskogo priborostroenija v uslovijah teplovyh vozdejstvij* (Sensors, instruments and systems for aerospace and ocean engineering under conditions of thermal effects, S.-Peterburg, GNC RF CNII "Jelektropribor", 2005, 404 p. (in Russian).
- 6. **Obrazcov I. F., Savel'ev L. M., Hazanov H. S.** *Metod konechnyh jelementov v zadachah stroitel'noj mehaniki letatel'nyh apparatov* (The finite element method in problems of structural mechanics of aircraft), Moscow, Vysshayya shkola, 1985, 392 p. (in Russian).
- 7. Mjachenkov V. I., Mal'cev V. P., Majboroda V. P. Raschety mashinostroitel'nyh konstrukcij metodom konechnyh jelementov: Spravochnik (Calculations of engineering structures by the finite element method), Moscow, Mashinostroenie, 1989, 520 p. (in Russian).
  - 8. Rades M. Finite element analysis, Printech, 2006, 274 p.
- 9. **Grigoljuk Je. I., Selezov I. T.** *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek* (Non-classical theory of oscillations of rods, plates and shells), *Itogi nauki i tehniki. Ser. Mehanika deform. tver. tel.*, 1973, vol. 5, 272 p. (in Russian).
- 10. **Darkov A. V., Shpiro G. S.** *Soprotivlenie materialov* (Strength of materials), Moscow, Vysshaja shkola, 1969, 734 p. (in Russian).
- 11. **Svetlickij V. A.** *Mehanika sterzhnej* (Mechanics of rods). Part 1, Moscow, Vysshaja shkola, 1987, 320 p. (in Russian).
- 12. **Stephen N. G.** The second spectrum of Timoshenko beam theory Further assessment, *Journal of Sound and Vibration*, 2006, no. 292, pp. 372—389.
- 13. Bedjilili Y., Tounsi A., Berrabah H. M., Mechab I., Adda Bedia E. A., Benaissa S. Natural frequencies of composite beams with a variable fiber volume fraction including rotary inertia and shear deformation, *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2009, no. 30 (6), pp. 717—726.
- 14. **Sadeghian M., Ekhteraei Toussi H.** Frequency analysis of a Timoshenko beam located on an elastic foundation, *International Journal of Engineering (IJE) Transactions A: Basics*, 2011, vol. 24, no. 1, pp. 87—105.
- 15. Rongqiao Xu, Guannan Wang. Bending solutions of the Timoshenko partial-interaction composite beams using Euler-Bernoulli

- solutions, *Journal of Engineering Mechanics*, 2013, vol. 139, no. 12, pp. 1881—1885.
- 16. **Trocenko Ju. V.** *O primenenii modeli balki Timoshenko v zadache o sobstvennyh ne osesimmetrichnyh kolebanijah cilindricheskoj obolochki s prisoedinennym tverdym telom* (The application of Timoshenko beam model to the problem of natural not axisymmetric vibrations of a cylindrical shell with attached solid), *Akustichnij Visnik*, 2003, vol. 6, no. 4. pp. 54—64 (in Russian).
- 17. **Tulkina A. N.** Opredelenie chastot i form kolebanij sterzhnevoj sistemy, soderzhashhej nanoob 'ekt, na osnove teorii S. P. Timoshenko (Definition of frequencies and mode shapes of rods system containing nano-objects, based on the theory SP Tymoshenko), Vestnik SPbGU (Serija 1), SPbGU, 2011, iss. 1, pp. 144—154 (in Russian).
- 18. **Przemieniecki J. S.** Theory of matrix structural analysis, Dover publications, New York, 1985, 480 p.
- 19. **Bazoune A., Knulief Y. A.** Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 259 (2), pp. 473—480.
- 20. **Baceva O. D., Dmitriev S. N.** *Sravnitel'nyj analiz sposobov poluchenija nesoglasovannyh matric mass* (Comparative analysis of methods for the preparation inconsistent mass matrix), *Nauka i Obrazovanie*, 2013, no. 12 (in Russian).
- 21. **Zienkiewicz O. C.** The Finite Element Method in Engineering Science, London, McGraw-Hill Publishing Co., 1971. 521 p.
- 22. **Pobedrja B. E., Georgievskij D. V.** *Osnovy mehaniki sploshnoj sredy. Kurs lekcij* (Fundamentals of continuum mechanics. Lectures), Moscow, Fizmatlit, 2006, 272 p. (in Russian).
- 23. Dzhashitov V. Je., Pankratov V. M., Barulina M. A. Teoreticheskie osnovy razrabotki i sozdanija superminiatjurnogo mikromehanicheskogo mnogofunkcion-al'nogo datchika inercial'noj informacii (The Theoretical Bases of Development and Creation of the Superminiature Micromechanical MultifunctionSensor of the Inertial Information), Nano- i Mikrosistemnaja Tehnika, 2010, no. 5 (118), pp. 46—54 (in Russian).
- 24. **Newmark N. M.** A method of computation for structural dynamics, *Journal of Engineering Mechanics*, 1959, vol. 85, no. 3. pp. 67—94.
- 25. **Korobejnikov S. N.** *Nelinejnoe deformirovanie tverdyh tel* (Nonlinear deformation of solids), Novosibirsk, publishing house SO RAN, 2000 (in Russian).
- 26. **Li H. Nayfeh, Mohammad I. Younis, Eihab M.** Abdel-Rehman Reduced-Order Models for MEMS Applications, *Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 41, iss. 1—3, pp. 211—236.

Corresponding author:

**Barulina M. A.,** Ph. D., Researcher, Institute of Precision Mechanics and Control, RAS, ul. Rabochaya, 24, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: marina@barulina.ru

### Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Дизайнер T. H. Погорелова. Технический редактор E. B. Конова. Корректор T. B. Пчелкина.

Сдано в набор 03.03.2015. Подписано в печать 13.04.2015. Формат  $60\times88$  1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН515. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз". 119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.