УДК 681.51 + 534

А. А. Колесников, Засл. деятель науки и техники РФ, д-р техн. наук, проф., anatoly.kolesnikov@gmail.com,
Ал. А. Колесников, канд. техн. наук, доц., kolesnik7@mail.ru,
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности
Южного федерального университета, г. Таганрог

Синергетическая теория управления и вибромеханика: концептуальная связь

Установлена глубокая концептуальная связь между вибромеханикой и синергетической теорией управления. Указанная концептуальная связь проявляется в возникновении в сложных системах таких новых эффектов, как расширение—сжатие фазового пространства системы; выход изображающей точки системы на внутренние притягивающие многообразия — аттракторы, на которых возникают новые динамические свойства системы. В качестве иллюстрирующего примера приведено полное решение известной задачи П. Л. Капицы о стабилизации "перевернутого маятника".

Ключевые слова: *расширение—сжатие фазового пространства системы, притягивающие инвариантные многообразия, аттракторы, новые динамические свойства системы, стабилизация "перевернутого маятника"*

Развитие любой динамической системы всегда происходит в окрестности некоторого аттрактора

Н. Моисеев

Вибромеханика изменяет законы механики

И. Блехман

Введение

Известно, что к универсальным инвариантам механических систем относятся вибромеханические движения, пронизывающие окружающий нас природный и искусственный миры. Под действием вибрации — быстрых движений в нелинейных колебательных системах — наиболее часто возникают следующие эффекты: вибрационное перемещение, т. е. направленное в среднем "медленное" движение, иначе говоря, некоторое изменение состояния механической системы; изменение физико-механических свойств тел; стабилизация или, наоборот, дестабилизация положения равновесия; вибрационное поддержание вращения и самосинхронизация неуравновешенных роторов, имеющая аналогию в поведении небесных тел, и т. д. Очевидно, что этот перечень вибрационных эффектов, которые формируют механические инварианты, охватывает огромный круг весьма разнообразных явлений в современной технике и технологии. Все они относятся к новой науке — *вибрационной механике* [1]. Одним из важных современных разделов этой науки является *виброреология*, изучающая изменение реологических характеристик тел под действием вибрации. К таким характеристикам относятся эффекты псевдосжижения, изменение коэффициентов вязкости материалов, виброползучесть, возникновение виброкипящего слоя и т. д.

Между вибрационной механикой и синергетической теорией управления, развитой научной школой Южного федерального университета [2—4], оказывается, существует внутренняя глубокая концептуальная связь. Эта связь проявляется в возникновении существенно новых динамических свойств систем. Перейдем к рассмотрению указанных свойств.

1. Базовые положения вибрационной механики

Рассмотрим базовые положения вибрационной механики, которые опираются на *концепцию частичного игнорирования движений, т. е. механики систем со скрытыми движениями* [1]. Предположим, что движение некоторой физической системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\mathbf{m}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор обобщенных координат, $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ — невырожденная $n \times n$ матрица инерционных коэффициентов, $\mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ — вектор сил. Тогда можно положить

$$\begin{gathered} x_1 = X_1 + y_1,\ ...,\ x_k = X_k + y_k,\ x_{k+1} = X_{k+1},\ ..., \\ x_{k+l} = X_{k+l},\quad x_{k+l+1} = \tilde{y}_{k+l+1},\ ...,x_n = \tilde{y}_n \end{gathered} \tag{2}$$

и назвать X_1, ..., X_{k+l} — *явными (учитываемыми)*, а $y_1, ..., y_k, \tilde{y}_{k+l+1}, ..., \tilde{y}_n$ — *скрытыми (игнорируемыми) движениями.* В монографии [1] обобщенные координаты x_{k+1}, ..., x_{k+l} названы *явными*, x_1, ..., x_k — *частично скрытыми*, а $x_{k+l+1} = \tilde{y}_{k+l+1}, ..., x_n = \tilde{y}_n$ — *скрытыми обобщенными координатами,* т. е. быстрыми переменными.

Перейдем теперь согласно выражениям (2) к новым обобщенным координатам $X_1, ..., X_{k+l}, \tilde{y}_{k+l+1}, ..., \tilde{y}_n$, тогда "избыточные" быстрые переменные $y_1, ..., y_k$ можно считать либо известными функциями времени, либо удовлетворяющими дополнительным независимым соотношениям

$$y_s(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = 0,\ s = 1, ..., k, \tag{3}$$

где $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_{k+l})$ и $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_k, \tilde{y}_{k+l+1}, ..., \tilde{y}_n)$ — соответственно $(k + l)$- и $(n - l)$-мерные вектор-столбцы; k — целое значение, равное числу скрытых переменных в (2). В работе [1] подчеркивается, что соотношения (3) можно задавать произвольно. В то же время эти равенства играют существенную роль, так как они определяют принцип, в соответствии с которым игнорируемые движения отделяются от учитываемых в первых k соотношениях (2). В общем случае эти соотношения могут представлять собой некоторые дифференциальные уравнения. Здесь же будем полагать их конечными и разрешимыми относительно $y_1, ..., y_k$. Предположим теперь, что

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{X}_0)\ddot{\mathbf{X}}_0(t) = \mathbf{R}_0(\dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{X}_0, t) \tag{4}$$

является системой $2(k + l)$-го порядка, которая составлена на основании того, что скрытые движения отсутствуют. В книге [1] эта система названа *упрощенной системой*, записанной относительно медленной переменной $\mathbf{X}$. Тогда, подставив (2) в уравнения (1) и используя $n - k - l$ этих уравнений и k соотношений (3), можно найти производные $\ddot{y}_1(t), ..., \ddot{y}_k(t), \ddot{y}_{k+l+1}(t), ..., \ddot{y}_n(t)$ и исключить их из остальных $(k \neq l)$ уравнений. В соответствии с соотношениями (3) из этих уравнений можно также исключить переменные $y_1, ..., y_k$ и $\dot{y}_1(t), ..., \dot{y}_k(t)$ и в результате получить

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{X}_0)\ddot{\mathbf{X}}_0(t) = \mathbf{R}_0(\dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{X}_0, t) + \mathbf{V}_1(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t), \tag{5.1}$$

где $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_{k+l+1}, ..., \tilde{y}_n)$.

Полученные уравнения отличаются от (4) наличием $\mathbf{V}_1$ — *вектора дополнительных сил*. Эти уравнения вместе с соотношениями (3) и остальными дифференциальными уравнениями образуют систему, которая в силу (2) эквивалентна исходной системе (1). Если бы указанные остальные дифференциальные уравнения удалось проинтегрировать с учетом (3), то тогда были бы найдены функции $\mathbf{y}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, t, \tilde{c})$, зависящие от $2n(n - k - l)$ произвольных постоянных $\tilde{c}$, которые зависят от начальных условий для функций $\tilde{y}_{k+l+1}, ..., \tilde{y}_n$. В результате была бы получена система

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{R}_0(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, t) + \mathbf{V}_2(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, t, c). \tag{5.2}$$

В монографии [1] более подробно изложены рассуждения, приводящие к такого рода системам. Переход к этим системам существенным образом опирается на предположение, что для нас первостепенный интерес представляют явные движения, а влияние скрытых движений либо мало, либо их можно учесть приближенно. При этих предположениях использование указанных систем окажется проще и удобнее. В этом и состоит сущность предложенной в работе [1] концепции игнорирования скрытых движений.

Преимущества этой концепции особенно проявляются в случае, когда дополнительные силы $\mathbf{V}_2$ можно считать не зависящими от постоянных c. Это наиболее характерно для систем, встречающихся в вибрационной механике, когда изучаются движения, асимптотически устойчивые по скрытым координатам $\tilde{y}_{k+l+1}, ..., \tilde{y}_n$ и их скоростям $\dot{\tilde{y}}_{k+l+1}(t), ..., \dot{\tilde{y}}_n(t)$ во всей области изменения переменных. Тогда, в принципе, можно как бы "почти забыть" о существовании в исходной системе скрытых обобщенных координат. При этом система с течением времени "забывает" соответствующие начальные условия, а переменные $\tilde{\mathbf{y}}$ и $\mathbf{y}$ превращаются в конкретные функции времени. В этом случае приведенные выше уравнения приобретают следующую общую форму:

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{R}_0(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, t) + \mathbf{V}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, t). \tag{5.3}$$

В этих уравнениях скрытые движения представлены только выражениями для дополнительных сил $\mathbf{V}$, и в зависимости от указанных асимптотически устойчивых движений эти выражения будут различными для соответствующего типа такого движения. Очевидные преимущества перехода от исходных уравнений (1) к уравнениям для явных движений (5.3) состоят в понижении порядка изучаемых движений.

В фазовом пространстве рассматриваемое понижение порядка дифференциальных уравнений можно интерпретировать как притяжение изображающей точки (ИТ) исходной системы (1) к некоторой цилиндрической поверхности $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}(t)$ и последующее ее движение по этой поверхности или в ее малой окрестности. Очевидно, что уравнения движения ИТ по указанной поверхности будут описываться уравнениями, отличающимися от уравнений движения в пространстве $\dot{\mathbf{X}}(t)$, $\tilde{\mathbf{y}}$, t. Подчеркнем, что при сформулированном условии, а также при выполнении соотношений (2) и (3) имеется полное соответствие между свойствами устойчивости исходной системы (1) по переменным $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{x}$ и движений координат $\dot{\mathbf{X}}(t)$ и $\mathbf{X}$, описываемых уравнениями (5).

Уравнения вида (5.3) отнесены в работе [1] к *основным уравнениям вибрационной механики*, построение которых опирается на следующую, почти очевидную основную теорему механики систем со скрытыми движениями:

Теорема. Дифференциальные уравнения явных движений отличаются от уравнений упрощенной системы наличием некоторых дополнительных сил, зависящих в общем случае как от явных, так и от скрытых обобщенных координат и скоростей или от явных обобщенных координат и скоростей и соответствующего числа постоянных интегрирования. В случае асимптотической устойчивости движения по скрытым обобщенным координатам и скоростям при любых $\mathbf{X}(t)$ из рассматриваемой области зависимость дополнительных сил от указанных постоянных с течением времени становится несущественной, и можно считать, что эти силы зависят только от явных движений. При условии однозначности и непрерывности преобразования от исходных переменных $\mathbf{x}$ к переменным $\mathbf{X}$, $\widetilde{\mathbf{y}}$ и обратно вблизи рассматриваемых движений между свойствами устойчивости движений исходной системы (1) по переменным $\dot{\mathbf{X}}(t)$ и $\mathbf{x}$ и системы (5.3) по переменным $\dot{\mathbf{X}}(t)$ и $\mathbf{X}$ имеется полное соответствие.

В книге [1] подчеркивается, что появление в уравнениях явных движений (5.3) дополнительных сил $\mathbf{V}$ не поддается объяснению, если не учитывать наличия скрытых движений. Разумеется, что при наличии скрытых движений и не учете сил $\mathbf{V}$ основные законы и положения механики для основных движений выполняться не будут, либо будут выполняться лишь приближенно. Указанное обстоятельство нередко служило поводом для ошибок и парадоксов, вплоть до выражения сомнений вообще в справедливости известных законов классической механики. Однако очевидно, что обоснованное игнорирование малосущественных движений и степеней свободы дает возможность значительно упростить изучение поведения механических систем. Игнорирование же существенных степеней свободы приводят к неверным утверждениям о движении этих систем количественного и качественного характера. В связи с этим в работе [1] ставятся два важных вопроса:

1. Допустимо ли не учитывать скрытые движения, в частности, скрытые степени свободы, т. е. вместо уравнений (1) или (5.3) рассматривать упрощенные уравнения (4)?

2. Как практически получить выражения, хотя бы приближенные, для дополнительных сил?

В работе [1] отмечается, что ответ на первый вопрос может быть получен на основе метода малого параметра и метода интегральных многообразий, однако в литературе мало публикаций, посвященных его рассмотрению с общих позиций механики. Ответу же на второй вопрос посвящена сама монография [1], в которой изложены способы приближенного нахождения вибрационной силы $\mathbf{V}$, а также составления и анализа основных уравнений вибрационной механики для различных случаев их разделения на медленные и быстрые движения для конкретных предположений и технических применений.

В целом, судя по работе [1], в настоящее время развиты методы приближенного анализа вибрационных процессов и эвристического построения соответствующих уравнений типа (4), описывающих медленные движения механической системы. Что же касается методов регулярного синтеза и целенаправленного формирования вибрационных сил, например для виброреологических нелинейных систем, то эти методы только начинают развиваться. Как отмечается в работе [1], решение этой важной проблемы — задача ближайшего будущего.

Учитывая важность формирующихся в течение многих десятилетий теоретических основ вибрационной механики, а также ее разнообразных применений — от маятниковых устройств и роторных механизмов до виброреологии различных сред, рассмотрим теперь изложенные выше базовые положения вибромеханики и возникающие при этом нерешенные проблемы с точки зрения синергетического подхода к управляемым механическим системам.

2. Вибрационная механика и методы синергетической теории управления

Если внимательно изучить содержание кратко изложенных выше базовых положений вибромеханики и ее основной теоремы, то можно с очевидностью убедиться, что все они существенным образом согласуются с идеологией синергетического подхода, опирающегося, как известно, на принцип "расширения—сжатия" фазового пространства. Исчерпывающее решение указанных выше задач вибрационной механики, сформулированных Н. И. Блехманом в основополагающей монографии [1], может быть изложено в терминах синергетического подхода и, следовательно, метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). Тогда эту науку можно назвать *"управляемой вибромеханикой"*. Рассмотрим ее основные задачи в терминах метода АКАР.

Так, скрытые переменные вибромеханики — это координаты состояния, которые не являются основными и "исчезают" в процессе движения ИТ управляемой системы к финишному инвариантному многообразию, непосредственно связанному с той технологической задачей, которую и должна, в конечном итоге, реализовать вибросистема. Указанное финишное многообразие как раз и описывается системой уравнений пониженного порядка (4), относящейся к основным уравнениям вибромеханики. Иначе говоря, уравнения (4) — это уравнения декомпозированной системы в методе АКАР.

Действие же сил $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}$, соответственно входящих в основные уравнения вибромеханики (5.1)—(5.3), адекватны действию "внутренних" управлений метода АКАР, обеспечивающих асимптотически устойчивое движение ИТ вдоль инвариантных многообразий или их пересечений. Следует подчеркнуть, что в методе АКАР, в отличие от методов вибромеханики [1], никаких упрощающих эвристических предположений о разделении движений на "быстрые" и "медленные" не делается. Такого рода разделение движений в методе АКАР реализуется в результате регулярных процессов управления, "сжимающих" фазовый объем системы, т. е. осуществляется управляемая асимптотическая динамическая декомпозиция системы. В результате этих декомпозиционных процессов могут быть сформированы уравнения типа (4), описывающие некоторую поверхность в фазовом пространстве. К этой поверхности "притягиваются" ИТ из определенной области.

Особо подчеркнем, что синергетический подход и метод АКАР позволяют дать исчерпывающие ответы на поставленные выше два фундаментальных вопроса вибрационной механики [1]. *Во-первых*, дело не столько в игнорировании скрытых движений, т. е. скрытых степеней свободы, сколько в целенаправленности процессов движения ИТ к финишным многообразиям, описываемым уравнениями (4) пониженного порядка. В процессе этого движения указанные скрытые степени свободы "оседают" на промежуточных или финишных инвариантных многообразиях. *Во-вторых*, в методе АКАР совершенно регулярно и точно получаются "внутренние" управления, действие которых адекватно действию дополнительных сил в приближенных методах вибрационной механики. Именно исчерпывающие ответы на указанные выше фундаментальные вопросы, данные методом АКАР, и позволяют положить начало нового направления — *"управляемой вибромеханики"*.

Конкретно суть этого направления сводится к целенаправленному формированию уравнений типа (4), которые в терминах метода АКАР являются желаемыми инвариантными многообразиями, включающими в себя, в частности, и *технологические инварианты*. Такие инварианты возникают в вибромеханике при рассмотрении следующих задач [1]: стабилизация маятниковых систем с вибрирующей осью подвеса; синхронизация вращающихся тел; вибрационное поддержание вращения роторов; вибрационное поддержание планетарного движения (вибрационные дробилки и мельницы); вибрационное торможение вращения; самосинхронизация механических вибровозбудителей; вибрационное перемещение и смещение (грохота, сушилки, концентрационные столы, сепараторы и др.); вибрационное разделение компонентов сыпучих смесей; вибрационное погружение, внедрение и резание; виброреология, т. е. деформация и текучесть веществ, и т. д.

3. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу П. Л. Капицы о стабилизации "перевернутого маятника". На рис. 1, взятом из работы [5], изображена схема такого маятника, который требуется поддерживать в устойчивом верхнем положении, используя соответствующие способы перемещения его оси. Для решения этой задачи применим метод (АКАР) [2—4], позволяющий синтезировать базовые законы управления, отражающие естественные свойства "перевернутого маятника".

Синтез законов управления. В научно-технической литературе [6] в течение многих лет исследуется поведение нелинейной колебательной системы с параметрическим возбуждением вида

$$\dot{\theta}(t) = \omega; \ \dot{\omega}(t) = M - (\nu + \mu \sin\omega t)\sin\theta, \qquad (6)$$

где θ — угловая переменная; M, ν, μ — параметры. Уравнениями (6) описывается, например, движение маятника на колеблющемся основании или дисбалансного ротора, движение заряженной частицы в поле синусоидальной волны и т. д. Так, при $M = 0$ и $\sin\theta \approx \theta$ система (6) превращается в широко известное уравнение Матье, описывающее процессы линейного параметрического возбуждения и резонанса. Особенно много внимания было уделено изучению устойчивости "перевернутого маятника" в верхнем положении, когда его основание подвергается вертикальным гармоническим колебаниям. В этом случае маятник описывается дифференциальным уравнением

$$J\ddot{\theta}(t) - ml(g + a\omega^2 \sin\omega t)\sin\theta = 0, \qquad (7)$$

где θ — угол отклонения от вертикали; J, m — момент инерции и масса; l — расстояние от центра масс до оси подвеса; g — ускорение силы тяжести.

В начале 50-х годов XX в. были опубликованы знаменитые работы П. Л. Капицы [7, 8], вызвавшие научную сенсацию. В этих работах на основе эвристических рассуждений изучается задача о поведении маятника (7) с вибрирующей осью подвеса. Именно в них впервые было введено понятие о "вибраци-

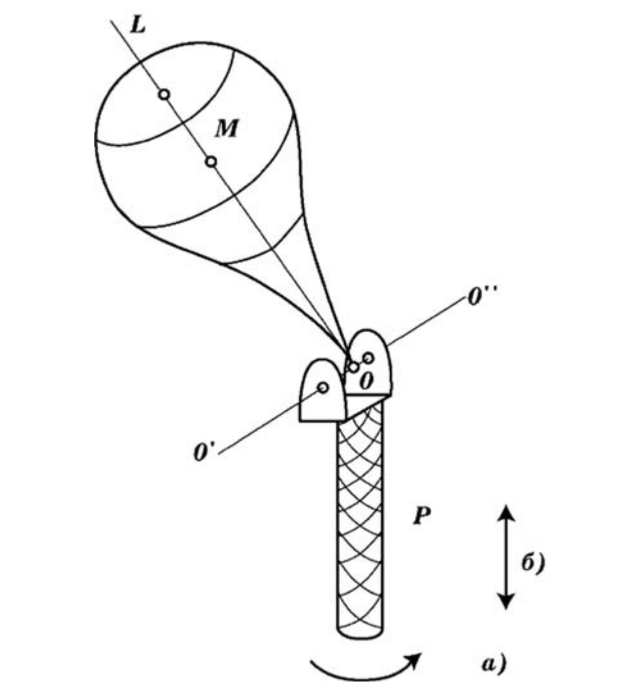

Рис. 1. Схема "перевернутого маятника"

онном моменте". В последующих многочисленных работах этот прием был использован для решения различных прикладных задач в области нелинейных колебаний [1]. Собственно говоря, П. Л. Капицей был поставлен сложный вопрос о причинах стабилизации верхнего, опрокинутого положения маятника (7) путем гармонических вертикальных колебаний его оси подвеса по закону $u(t) = a\omega^2\sin\omega t$. Рассмотрим решение методом АКАР [2—4] более общей задачи синтеза управления "перевернутым маятником": найти закон управления $u = F(\theta, \dot{\theta})$ в форме обратных связей, обеспечивающий стабилизацию маятника (7) относительно вертикального положения. Синтезируемый закон, имеющий физический смысл ускорения, должен в функции времени $u(t)$ иметь периодический характер. Для решения этой новой задачи синтеза введем обозначения $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}(t)$ и запишем уравнение (7) в виде системы

$$\dot{x}_1(t) = x_2;\ \dot{x}_2(t) = \frac{ml}{J}(g + u)\sin x_1. \qquad (8)$$

Ставится задача: найти закон управления $u(x_1, x_2)$, обеспечивающий устойчивость системы (8) относительно положения $x_1 = x_2 = 0$. Желательно, чтобы этот закон в функции времени имел периодический характер. Для этого введем следующую макропеременную:

$$\psi = x_2 - \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}, \qquad (9)$$

где A, ω — соответственно заданные амплитуда и частота колебаний. Тогда, подставляя ψ (9) в инвариантное соотношение

$$T\dot{\psi}(t) + x_1^2\psi = 0,$$

получаем выражение

$$x_2 + \frac{\omega x_1\dot{x}_1(t)}{\sqrt{A^2 - x_1^2}} + \frac{x_1^2}{T}\psi = 0,$$

откуда, в силу уравнений маятника (8), находим закон управления

$$\frac{mlu}{J} = -\frac{\omega x_1 x_2}{\sqrt{A^2 - x_1^2}\sin x_1} - \frac{x_1^2\psi}{T\sin x_1} - \frac{mlg}{J}. \qquad (10)$$

Отсюда следует, что движение замкнутой системы (8), (11) будет описываться дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2;\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\omega x_1 x_2}{\sqrt{A^2 - x_1^2}} = -\frac{x_1^2\psi}{T}. \qquad (11)$$

Покажем, что система (11) действительно имеет интеграл движения $\psi_1 = 0$ (9). Для этого поделим второе уравнение системы (11) на первое, тогда получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega x_1}{\sqrt{A^2 - x_1^2}} - \frac{x_1^2\psi}{Tx_2}.$$

Положив в этом уравнении $\psi_1 = 0$ и интегрируя, находим

$$x_2 = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2},$$

т. е. снова получаем $\psi_1 = 0$, что свидетельствует о наличии в системе (11) интеграла движения $\psi_1 = 0$ (9). Итак, энергетическим методом синтезирован базовый закон управления u (10) в функции обратных связей, т. е. координат x_1 и x_2 "перевернутого маятника". Используя (9), представим замкнутую систему (11) в координатах x_1 и ψ:

$$\dot{x}_1(t) = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2} + \psi;\ \psi(t) = -\frac{x_1^2}{T}\psi. \qquad (12)$$

Продифференцировав первое уравнение, запишем замкнутую систему с учетом ψ (9) также в виде

$$\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 x_1 - \left(\frac{\omega^2 x_1 x_2}{x_2 - \psi} + \frac{x_1^2}{T}\right)\psi;\ \dot{\psi}(t) = -\frac{x_1^2}{T}\psi. \qquad (13)$$

Из уравнений (13) следует, что через $t \approx (3\div4)T$ функция $\psi \to 0$, и в замкнутой системе (11) устанавливаются гармонические колебания

$$x_1(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0);\ x_2(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (14)$$

Рассмотрим теперь поведение замкнутой системы (11) на инвариантном многообразии $\psi = 0$ (9), куда она неизбежно выходит под действием базового закона управления (10). Движение замкнутой системы (11) вдоль многообразия $\psi = 0$ (9) описывается декомпозированным уравнением

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = \omega\sqrt{A^2 - x_{1\psi}^2},$$

$$\text{т. е. } \dot{x}_{1\psi}^2 + \omega^2 x_{1\psi}^2 = \omega^2 A^2 = 2E_0, \qquad (15)$$

где E_0 — полная энергия системы. Это означает, что система (11) обладает на многообразии $\psi = 0$ (9) предельным циклом, т. е. гармоническим аттрактором. Отсюда следует, что маятник, который как бы еще раз "перевернулся", устойчиво колеблется возле верхнего положения с заданными частотой ω и амплитудой A. На многообразии $\psi = 0$ (9) базовый закон управления (11) редуцируется во "внутреннее" управление

$$\frac{mlu_\psi}{J} = -\frac{\omega^2 x_{1\psi}}{\sin x_{1\psi}} - \frac{mlg}{J}, \qquad (16)$$

а замкнутая система (8), (16) описывается уравнением

$$\ddot{x}_{1\psi}(t) + \omega^2 x_{1\psi} = 0, \qquad (17)$$

которое непосредственно следует из (13) при $\psi = 0$. Несколько неожиданно, что полученное выражение (17) — это уравнение обычной консервативной системы. Иначе говоря, диссипативная система, исходно описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями (11) или (12), преобразуется на многообразии $\psi = 0$ (9) в консервативную систему (17), имеющую решение

$$x_{1\psi}(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (18)$$

где

$$a = \frac{1}{\omega}\sqrt{\dot{x}_{10\psi}^2 + \omega^2 x_{10\psi}^2}\,;\ \varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\dot{x}_{10\psi}}{\omega x_{10}}\right). \qquad (19)$$

Переход замкнутой диссипативной системы (11) в консервативную форму (17) на многообразии $\psi = 0$ (9) вполне естественен с физической точки зрения. Дело в том, что после попадания системы (11) на многообразие $\psi = 0$ (9) в ней устанавливается баланс между энергией маятника и энергией, поступающей от управления u (10). По своей структуре решение (18), (19) совпадает с (14), однако начальные условия в (19) связаны соотношением (9), т. е.

$$x_{20\psi} = \dot{x}_{10\psi} = \omega\sqrt{A^2 - x_{10\psi}^2},$$

подставив которое в (19), находим

$$a = A \text{ и } \varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{A^2 - x_{10\psi}^2}}{\dot{x}_{10}}\right) = \arcsin\frac{x_{10\psi}}{A}. \qquad (20)$$

Согласно (14) и (20) решения нелинейной системы (12) и консервативной системы (17) на энергетическом многообразии $\psi = 0$ (9) точно совпадают.

Таким образом, поведение маятника на многообразии $\psi = 0$ (9) описывается, с одной стороны, нелинейным дифференциальным уравнением (12), имеющим решение (14), а с другой — уравнением консервативной системы (17), которое имеет решение (18), точно совпадающее с (14). Этот, на наш взгляд, достаточно неординарный факт, отражающий внутренние естественные закономерности в поведении маятника (8), управляемого законом (10), свидетельствует о перспективных возможностях метода АКАР в задачах управления нелинейными колебаниями.

Сделаем теперь упрощающие предположения о том, что сила тяжести mg в система (8) либо мала по сравнению с развиваемой вибрирующим маятником силой инерции $mA\omega^2$, либо $g(t)$ представляет собой некоторое неизмеряемое постоянное и ограниченное возмущение $|g| \leqslant g_0$, действующее на маятник (8). Тогда член $\frac{ml}{J}g$ в законе управления (10) будет отсутствовать, т. е.

$$u = -\frac{J\omega x_1 x_2}{ml\sqrt{A^2 - x_1^2}\sin x_1} - \frac{J\psi x_1^2}{mlT\sin x_1}. \qquad (21)$$

В этом случае поведение замкнутой системы (8), (21) по-прежнему описывается уравнениями (11). При этом на многообразии $\psi = 0$ (9) закон управления u (21) редуцируется в форму

$$u_{1\psi} = -\frac{J\omega^2 x_{1\psi}}{ml\sin x_{1\psi}}, \qquad (22)$$

а замкнутая система (8), (22) будет иметь консервативный вид:

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi};$$
$$\dot{x}_{2\psi}(t) = -\omega^2 x_{1\psi} + \frac{mlg}{J}\sin x_{1\psi}. \qquad (23)$$

Условие устойчивости системы (23) следующее:

$$J\omega^2 > mlg \text{ при } -\pi < x_{1\psi} < \pi. \qquad (24)$$

Отсюда предполагая, что для маятника $J = ml^2$, имеем

$$l\omega^2 > g. \qquad (25)$$

Условие (25) является верхним и обеспечивает устойчивость "перевернутого маятника" (8) при действии на него редуцированного закона управления (22).

Найдем теперь нижнюю и верхнюю границы амплитуды управляющего воздействия $u_{1\psi}$ (21). Для этого вычислим предел

$$u_{1\psi\inf} = -\lim_{x_{1\psi}\to 0}\left|\frac{l\omega^2 x_{1\psi}}{\sin x_{1\psi}}\right| = -l\omega^2, \qquad (26)$$

из которого следует нижняя граница управляющего воздействия. Учитывая, что $x_{1\psi}(t)$ — это гармоническая функция (14) с амплитудой A, верхнее значение управляющего воздействия $u_{1\psi}$ (22) будет равно

$$u_{1\psi\sup} = -\frac{l\omega^2 A}{\sin A} \text{ при } A < \pi, \text{ рад}. \qquad (27)$$

Из (26) и (27) следует, что амплитуда управляющего воздействия $u_{1\psi}$, имеющего периодический характер, равна

$$B = A_u = 0{,}5l\omega^2\left(\frac{A}{\sin A} - 1\right),\ A < \pi, \text{ рад}. \qquad (28)$$

Итак, в результате исследования замкнутой системы (8), (22) на многообразии $\psi = 0$ (9) найдены условия устойчивости (25), амплитуда A_u (28) управляющего воздействия и гарантированная область притяжения (24) "перевернутого маятника" к верхнему положению. Следует отметить, что закон управления $u_{1\psi}$ (22) — это своего рода аналог вибрационной силы, формирующей "медленное" движение маятника согласно основам вибрационной механики [1, 7, 8].

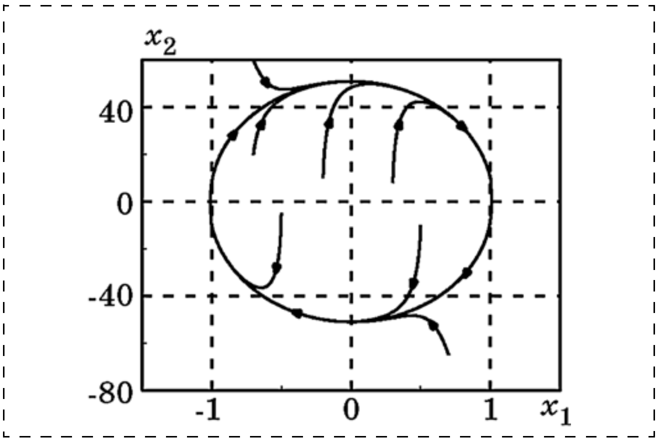

Рис. 2. Фазовый портрет системы

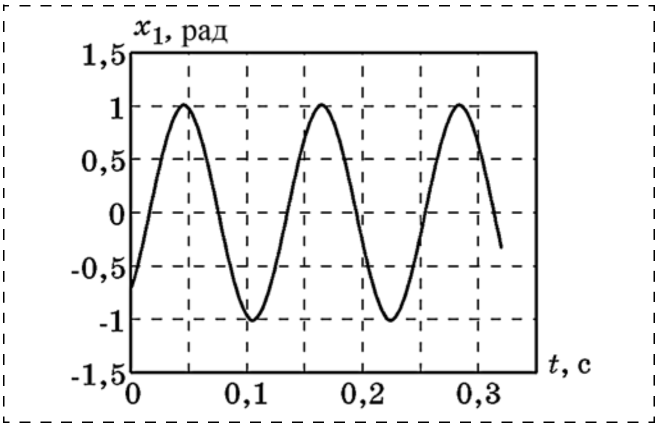

Рис. 3. График поведения координаты x_1

На рис. 2—5 приведены результаты моделирования системы (8), (21) при $l = 0{,}3$ м, $\omega = 50$ рад/с, $A = 1$ рад, $T = 0{,}02$ с, которые в полной мере подтверждают теоретические положения метода АКАР применительно к задаче управления "перевернутым маятником" путем введения обратных связей.

О задаче П. Л. Капицы. Изложенное выше решение задачи стабилизации "перевернутого маятника" (8) основано на идеологии введения некоторой совокупности обратных связей по координатам x_1 и x_2. Эти связи синтезированы в виде соответствующего закона управления $u(x_1, x_2)$ на основе энергетического метода, базирующегося на введении инвариантных многообразий. В указанной постановке задача стабилизации "перевернутого маятника" исчерпывающим образом решена как в форме базового закона управления $u(x_1, x_2)$ (10), переводящего маятник в верхнее положение из произвольных начальных условий по x_{10} и x_{20}, так и в форме редуцированного закона u_ψ (22), обеспечивающего стабилизацию маятника в определенной области притяжения. На основе полученных законов замкнутого управления могут быть построены соответствующие системы стабилизации. Такова суть общего подхода к задаче стабилизации "перевернутого маятника" вертикальными колебаниями на основе синтезируемых обратных связей.

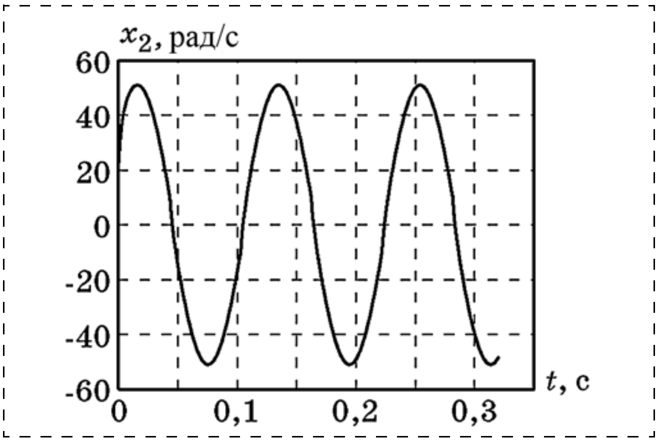

Рис. 4. График поведения координаты x_2

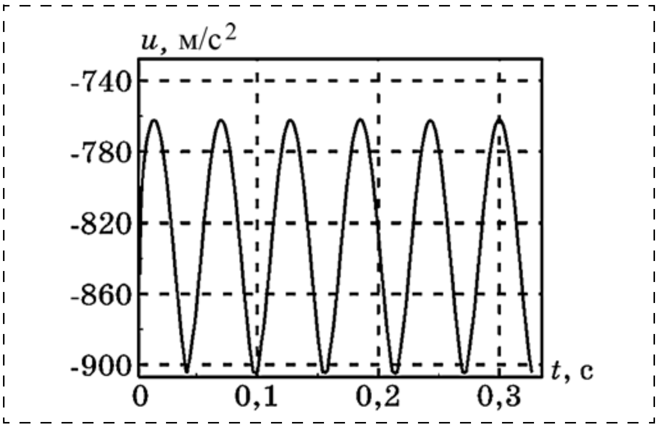

Рис. 5. График поведения управления u_1

Однако, начиная с работ П. Л. Капицы [7, 8], задача стабилизации "перевернутого маятника" продолжает активно изучаться как задача анализа системы (8) при априорном задании закона управления в виде гармонической функции времени $u(t) = a\omega^2\sin\omega t$. В результате приходят к необходимости анализа нелинейного нестационарного дифференциального уравнения типа Матье (7), точное решение которого в литературе отсутствует [1, 5, 6, 9]. В связи с этим в работах многих авторов развивались методы поиска приближенных решений таких уравнений путем разделения движений на быстрые и медленные. Обширный обзор такого рода методов асимптотического усреднения сделан в монографии [1].

Перейдем теперь к исследованию свойств синтезированных выше законов управления как периодических функций времени. Проведем общепринятый анализ [1, 6, 7] поведения маятника (8), находящегося под действием вертикальных колебаний, генерируемых законом управления (22) в виде периодической функции времени. С учетом (14) запишем закон управления:

$$u_{1\psi}(t) = -\frac{l\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)}{\sin[A\sin(\omega t + \varphi_0)]}. \qquad (29)$$

Видно, что закон управления $u_{1\psi}(t)$ — это периодическая функция времени с амплитудой A_u (28). Учитывая, что $\sin^2(\omega t + \varphi_0) = 0{,}5 - 0{,}5\cos 2(\omega t + \varphi_0)$, на основе (29) можно получить приближенные законы управления

$$u_{1\psi}(t) \cong -\frac{12 l\omega^2}{12 - A^2 + A^2\cos 2(\omega t + \varphi_0)} \quad (30)$$

или

$$u_{1\psi}(t) \approx -l\omega^2\left[1 + \frac{A^2}{12} - \frac{A^2}{12}\cos 2(\omega t + \varphi_0)\right]. \quad (31)$$

Из (29)—(31) непосредственно следует, что закон $u_{1\psi}(t)$ (29) — это периодическая функция времени с задаваемыми амплитудой A_u (26), частотой $\omega_1 = 2\omega$ и периодом $T \cong \pi/\omega$. На рис. 6 и 7 показаны результаты моделирования поведения "перевернутого маятника" (8) под действием вертикальных периодических колебаний $u_{1\psi}(t)$ (27). Из-за резонансного взаимодействия между управлением $u_{1\psi}(t)$ (27) и маятником (8) могут возникать его модулированные колебания. Аналогично действуют и законы управления (28) и (29).

Таким образом, закон управления $u_{1\psi}(t)$ (27) и его приближения (28) или (29) позволили найти элегантное решение задачи стабилизации "перевернутого маятника" в форме, поставленной П. Л. Капицей [7, 8]. Оказывается, что для этого следует осуществить вертикальные колебания точки подвеса маятника по периодическому закону $u_{1\psi}(t)$ (27), который имеет амплитуду A_u (26), частоту $\omega_1 = 2\omega$ и период $T = \pi/\omega$. При этом должно выполняться условие $l\omega^2 > g$, т. е. $l\omega_1^2 > 4g$. Важно особо подчеркнуть, что между колебаниями управляющего воздействия $u_{1\psi}(t)$ (27) и маятника возникает основной параметрический резонанс $\omega_1 : \omega = 2$, что имеет самостоятельное значение. Реализация законов (27)—(29) не вызывает каких-либо технических затруднений и может быть осуществлена на генераторах гармонических колебаний.

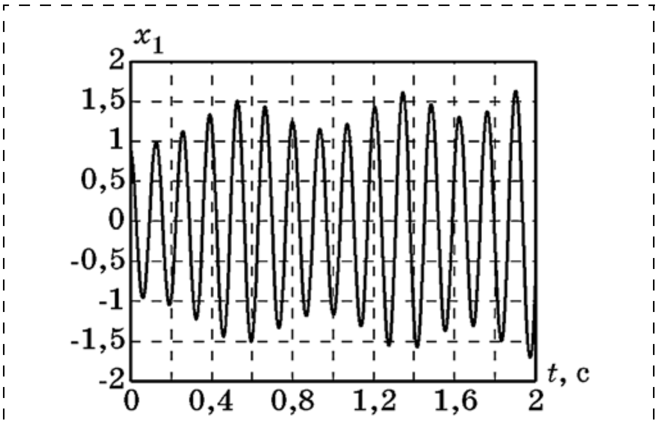

Рис. 6. График поведения координаты x_1

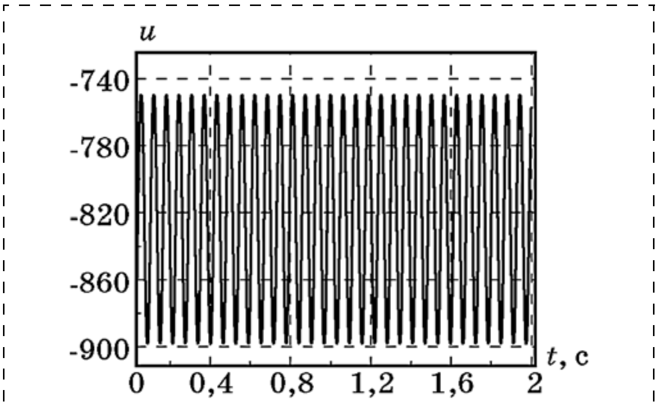

Рис. 7. График поведения управления $u_{1\psi}$

Подведем итоги. Синтезированный на основе метода АКАР базовый закон управления u (11), формирующий соответствующие обратные связи по координатам x_1 и x_2, переводит "перевернутый маятник" из произвольного начального состояния (x_{10}, x_{20}) на многообразие $\psi = 0$ (9), на котором он совершает устойчивые колебания (14) с заданными амплитудой A и частотой ω. При использовании усеченного закона u_1 (20) маятник также стабилизируется в верхнем положении при выполнении условия (23). На многообразии $\psi = 0$ (9) законы (11) и (20) редуцируются соответственно в формы (16) и (21), имеющие периодический характер. Закон управления $u_{1\psi}(t)$ (21), записанный в виде функций времени (27) или (28), (29), эффективно решает задачу П. Л. Капицы [7, 8] стабилизации "перевернутого маятника" вертикальными колебаниями.

Сравним полученные здесь результаты с уже известными. В работах [1, 7, 8] и многих других показано, что если в модели (8) выбрать закон управления в виде $u(t) = a\omega^2\sin\omega t$, то условие устойчивости "перевернутого маятника" в верхнем положении должно быть следующим: $a^2\omega^2 > 2lg$. Это условие существенно отличается от полученного выше выражения (23) тем, что содержит амплитуду a, которая, как и частота ω в законе управления $u = a\omega^2\sin\omega t$, должна быть должным образом выбрана. Условие же (23) вообще не содержит амплитуды колебаний, что позволяет выбирать ее, исходя из наших желаний. Такое преимущество синергетических законов управления (20), (21), (27) или (28), (29) объясняется тем важным обстоятельством, что эти законы были синтезированы методом АКАР, а не внешне "навязаны", как это имеет место в известных подходах к задаче П. Л. Капицы [1, 7, 8]. В работе [10] особое внимание обращается на необходимость минимизации амплитуды закона управления u. В нашем случае эта амплитуда может выбираться в зависимости от желаемых частоты ω и амплитуды A колебаний маятника в верхнем положении.

В целом, изложенное означает, что проблема стабилизации маятника с вибрирующим подвесом получила в методе АКАР общее решение как в форме обратных связей, так и в виде периодических во времени колебаний.

Заключение

В статье выявлена концептуальная взаимосвязь между двумя крупными направлениями современной науки — синергетической теорией управления и вибромеханикой, получившими в последние годы существенное развитие. Указанная взаимосвязь проявляется в аналогии процессов динамического взаимодействия, в возникновении притягивающих многообразий — аттракторов, а также в возникновении новых динамических и технологических свойств синтезируемых систем. Между указанными направлениями имеются и определенные различия. Дело в том, что в вибромеханике управляющие воздействия осуществляются, как правило, в функции времени путем подбора соответствующих колебательных воздействий, а в синергетической теории управления управляющие воздействия синтезируются в функции обратных связей, обеспечивающих желаемые колебательные и вибрационные процессы. Указанные новые научные направления дополняют друг друга для решения современных крупных технологических задач управления сложными объектами разной природы.

Список литературы

1. **Блехман И. И.** Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
2. **Колесников А. А.** Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат. 1994.
3. **Современная** прикладная теория управления / Под ред. А. А. Колесникова. Москва-Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.
4. **Синергетические** методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: УРСС/КомКнига, 2006, 2012. 240 с.
5. **Неймарк Ю. И., Коган Н. Я., Савельев В. П.** Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985.
6. **Неймарк Ю. И., Ланда П. С.** Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. **Капица П. Л.** Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1954. Т. 44, Вып. 1.
8. **Капица П. Л.** Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Т. 21, Вып. 5.
9. **Стокер Дж.** Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ, 1952.
10. **Фрадков А. Л.** Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003.

Synergetic Control Theory and Vibro-Mechanics: a Conceptual Relation

A. A. Kolesnikov, anatoly.kolesnikov@gmail.com, **Al. A. Kolesnikov,** kolesnik7@mail.ru,
Southern Federal University, Taganrog, 347922, Russian Federation

Received on January 29, 2015

The paper established a deep conceptual relation between the vibro-mechanics and the synergetic control theory. This conceptual relation is revealed in the emergence of new phenomena in the complex systems, namely: expansion and compression of the phase flow; transition of the point representing system into the internal attracting manifolds, on which new dynamic properties of the system are formed. In vibro-mehanics the control actions are carried out usually as a function of time by selecting the corresponding vibration actions, but the synergetic theory of the control actions is synthesized in the feedback function, ensuring the desired oscillation and vibration processes. These new research areas complement each other in meeting today's major technological challenges of controlling complex objects of different nature. We prove that with an example of a complete solution of the famous P. L. Kapitza's problem of "the inverted pendulum stabilization".

Keywords: *system phase space extension—compression, attracting invariant manifolds, attractors, dynamic properties, stabilization, inverted pendulum*

For citation:

Kolesnikov A. A., Kolesnikov Al. A. Synergetic Control Theory and Vibro-Mechanics: a Conceptual Relation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie, 2015, vol. 16, no. 5, pp. 291—299.*

DOI: 10.17587/mau.16.291-299

References

1. **Blehman I. I.** *Vibracionnaja mehanika* (Vibrational mechanics), Moscow, Nauka, 1994 (in Russian).
2. **Kolesnikov A. A.** *Sinergeticheskaja teorija upravlenija* (Synergetic control theory), Moscow, Jenergoatomizdat, 1994 (in Russian).
3. **Kolesnikov A. A.** *Sovremennaja prikladnaja teorija upravlenija* (Modern Applied Control Theory), Moskva—Taganrog, Publishing house of TRTU, 2000 (in Russian).
4. **Kolesnikov A. A.** *Sinergeticheskie metody upravlenija slozhnymi sistemami: teorija sistemnogo sinteza* (Synergetic control methods for complex systems: theory system synthesis), Moscow, URSS/ KomKniga, 2006, 240 p. (in Russian).
5. **Nejmark Ju. I., Kogan N. Ja., Savel'ev V. P.** *Dinamicheskie modeli teorii upravlenija* (Dynamic models of control theory), Moscow, Nauka, 1985 (in Russian).
6. **Nejmark Ju. I., Landa P. S.** *Stohasticheskie i haoticheskie kolebanija* (Stochastic and Chaotic Oscillations), Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).
7. **Kapica P. L.** *Majatnik s vibrirujushhim podvesom* (The pendulum with a vibrating suspension), *Uspehi Fizicheskih Nauk,* 1954, vol. 44, iss. 1 (in Russian).
8. **Kapica P. L.** *Dinamicheskaja ustojchivost' majatnika pri kolebljushhejsja tochke podvesa* (Dynamic stability of a pendulum with a vibrating suspension point), *Zhurnal Jeksperimental'noj i Teoreticheskoj Fiziki*, 1951, vol. 21, iss. 5 (in Russian).
9. **Stoker Dzh.** *Nelinejnye kolebanija v mehanicheskih ijelektricheskih sistemah* (Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems), Moscow, IL, 1952 (in Russian).
10. **Fradkov A. L.** *Kiberneticheskaja fizika* (Cybernetic physics), SPb., Nauka, 2003 (in Russian).

Corresponding author:

Kolesnikov Anatoly A., D. Sc, Professor, Southern Federal University, Taganrog, 347922, Russian Federation,
e-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com