МЕТОДЫ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

УДК 519.6

А. Г. Ченцов, чл.-корр. РАН, гл. науч. сотр., проф., chentsov@imm.uran.ru,
М. С. Кошелева, мл. науч. сотр., инженер-исследователь, kosheleva.ms@gmail.com,
Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

Динамическое программирование в задаче курьера со стоимостями, зависящими от списка заданий[1]

Построена схема независимых вычислений функции Беллмана для задачи курьера (задача коммивояжера с условиями предшествования), в которой стоимости зависят от списка невыполненных (на текущий момент) заданий. Постановка и методы решения ориентированы на применение в задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации.

Ключевые слова: *динамическое программирование, маршрут, условия предшествования, существенные списки (заданий), слои пространства позиций, независимые вычисления, функция Беллмана*

Введение

Статья посвящена исследованию одной задачи маршрутизации перемещений с ограничениями и усложненными функциями стоимости упомянутых перемещений. Данное усложнение касается ситуации, когда стоимости перемещений явным образом зависят от списка заданий, не выполненных на текущий момент.

Эта особенность возникает, в частности, в актуальной инженерной задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. Речь идет о маршрутизации перемещений при радиационном воздействии излучающих элементов, подлежащих демонтированию в той или иной очередности. При этом воздействие на этапе перемещений от одного излучающего элемента к другому определяется совокупностью излучателей, не демонтированных на момент данного перемещения. Кроме того, имеются многочисленные условия предшествования, порожденные требованиями технологического характера, геометрией системы излучателей и другими соображениями. Целью исследования в упомянутой задаче является определение маршрута перемещения работника (бригады работников), оптимального с точки зрения совокупной дозы радиации [1, 2].

С идейной точки зрения рассматриваемая постановка имеет своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (ЗК). В связи с последней отметим работы [3—7]. Полезно отметить, что в работе [3], наряду с ЗК, рассматривается целый ряд подобных задач маршрутизации, учитывающих особенности, связанные с приложениями. Среди модификаций ЗК отметим задачу курьера. Данная постановка имеет непосредственное отношение к последующим построениям, касающимся решения усложненной (но также "точечной" в отличие от задач, рассматриваемых в работе [8, 9]) задачи.

Сводка обозначений общего характера. В дальнейшем используется обычная теоретико-множественная символика, включая кванторы, пропорциональные связки; $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая с (неотрицательной) полуосью $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$, и для каждого непустого множества S через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначается множество всех функций из S в $[0, \infty[$ (в качестве S в дальнейшем будут использоваться различные множества). Ниже широко используется индексная форма записи функций или отображений [10]. В частности, при $m \in \mathbb{N}$ рассматриваем кортежи вида $(x_i)_{i \in \overline{0, m}}$ и $(y_i)_{i \in \overline{1, m}}$ со значениями в заданных априори множествах; строго говоря, данные кортежи являются отображениями на $\overline{0, m}$ и $\overline{1, m}$ соответственно, для записи которых удобна индексная форма. Через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее объект x. Если z — упорядоченная пара (УП) объектов x и y, т. е. $z = (x, y)$, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ условимся обозначать соответственно первый и второй элементы z, т. е. $\mathrm{pr}_1(z) = x$ и $\mathrm{pr}_2(z) = y$. Пусть $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; ...\}$ (множество всех натуральных чисел), $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2...\}$; $\overline{k, l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 | (k \leqslant i) \;\&\; (i \leqslant l)\} \; \forall k \in \mathbb{N}_0 \; \forall l \in \mathbb{N}_0$. Если

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-08-00-643-а, № 14-08-00419).

K — непустое конечное множество, то $|K| \in \mathbb{N}$ есть его мощность (полагаем также $|\varnothing| \triangleq 0$). Наряду с УП рассматриваем триплеты: если a, b и c — объекты, то [11, с. 17] $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$; если A, B и C — множества, то $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Специальные обозначения, используемые в задаче маршрутизации. Всюду в дальнейшем фиксируем число $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$, число 0 используем в качестве базы (начального пункта) процесса посещения "городов" с индексами из $\overline{1, N}$. Последующие определения извлекаются из работы [9, ч. 2] для случая, когда рассматриваемые в работе [9, ч. 2] мегаполисы являются одноэлементными (синглетонами). Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1, N}$, называемых (полными) маршрутами посещения "городов", определяемых соответствующими индексами из $\overline{1, N}$ (элементы $\mathbb{P}$ суть биекции $\overline{1, N}$ на себя). Таким образом, рассматриваем процессы $0 \to \alpha(1) \to ... \to \alpha(N)$, где $\alpha \in \mathbb{P}$; на выбор α могут накладываться ограничения. С этой целью фиксируем множество $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$ (случай $\mathbf{K} = \varnothing$ не исключается и отвечает отсутствию ограничений в виде условий предшествования). Элементы $\mathbf{K}$, являющиеся УП, называем адресными парами, для каждой из которых первый элемент имеет смысл отправителя, а второй — получателя (сообщения, груза и т. п.). Постулируем, что для каждого непустого множества $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}$, непременно существует УП $z_0 \in \mathbf{K}_0$, для которой [9, условие 2.2.1] $\mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall z \in \mathbf{K}_0$. Требуется, чтобы выбранный маршрут $\alpha \in \mathbb{P}$ обеспечивал более раннее посещение отправителя для каждой адресной пары. Определяем при $\alpha \in \mathbb{P}$ обратную (к α) перестановку $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$ (итак, $\alpha^{-1}(\alpha(k)) = \alpha(\alpha^{-1}(k)) = k\ \forall\ k \in \overline{1, N}$). Тогда [9, ч. 2] $\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(h)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(h))\ \forall h \in \mathbf{K}\} \neq \varnothing$ есть множество всех допустимых по предшествованию маршрутов, которые только и могут использоваться.

1. Постановка задачи

Функции стоимости. Введем способы оценивания перемещения и терминального состояния. Для этого фиксируем отображение $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\overline{0, N} \times \overline{0, N} \times \mathfrak{N}]$, где $\mathfrak{N}$ — семейство всех непустых подмножеств $\overline{1, N}$. Кроме того, пусть $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\overline{0, N}]$. На основе $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$ формируем аддитивный критерий, полагая при $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathfrak{C}_\alpha \triangleq \mathbf{c}(0, \alpha(1), \overline{1, N}) + \sum_{t=1}^{N-1} \mathbf{c}(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(j): j \in \overline{t+1, N}\}) + \mathbf{f}(\alpha(N)). \quad (1)$$

При этом $(\mathfrak{C}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{P}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{P}]$. Основная задача маршрутизации (ОЗМ) имеет вид

$$\mathfrak{C}_\alpha \to \min, \ \alpha \in \mathbb{A}. \quad (2)$$

Через V обозначаем значение (экстремум) задачи (2), т. е. наименьшее из чисел $\mathfrak{C}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{A}$. Маршрут $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ называем оптимальным, если $\mathfrak{C}_{\alpha_0} = V$. Наша цель состоит в определении V и построении какого-либо оптимального маршрута.

2. Расширение задачи и метод динамического программирования

Задача (2) содержит ограничение (в виде условий предшествования) на маршрут "в целом", чем затрудняется непосредственное применение аппарата на основе динамического программирования (ДП). В связи с этим подобно тому, как сделано в работе [9, ч. 2], мы сначала осуществляем преобразование системы ограничений, подменяя допустимость (маршрутов) по предшествованию допустимостью по вычеркиванию (заданий из списка). Новые ограничения сводятся к условиям на переход от выполнения одного задания к выполнению другого. Используя данные преобразования, наряду с ОЗМ (2) рассматриваем частичные задачи. Речь идет о случае посещения "городов" из множеств $K \in \mathfrak{N}$ при условии, что начальный пункт есть $s \in \overline{0, N}$ (разумеется, вариант $s = 0$ и $K = \overline{1, N}$ здесь также допускается). Для формирования упомянутых частичных задач мы, следуя работе [9], заменяем, как уже отмечалось, допустимость по предшествованию допустимостью "по вычеркиванию", используя при этом оператор $\mathbf{I}$ [9, (2.2.27), (2.2.28)], действующий в $\mathfrak{N}$.

В связи с построением расширения ОЗМ введем при $K \in \mathfrak{N}$ в рассмотрение множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций "отрезка" $\overline{1, |K|}$ на K (итак, элементы $(\mathrm{bi})[K]$ суть взаимно однозначные отображения $\overline{1, |K|}$ на K и только они), а также множество $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ всех биекций $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ со свойством $\alpha(k) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l): l \in \overline{k, |K|}\})$ $\forall k \in \overline{1, |K|}$. Биекции из множества $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ будем называть частичными маршрутами, допустимыми по вычеркиванию. Напомним, что [9, ч. 2] $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \neq \varnothing\ \forall K \in \mathfrak{N}$. Кроме того, $\mathbb{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1, N}]$ [9, (2.2.32), теорема 2.2.1]; легко видеть, что $\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(l): l \in \overline{1, k-1}\})\ \forall k \in \overline{1, N}\}$. Условимся о соглашении: под расширением ОЗМ понимаем определенную ниже систему частичных задач. Если $s \in \overline{0, N}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $|K| \geqslant 2$, то рассматриваем задачу, которой сопоставляем экстремум (значение)

$$v(s, K) = \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]} \Big[\mathbf{c}(s, \alpha(1), K) + \sum_{t=1}^{|K|-1} \mathbf{c}(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(j): j \in \overline{t+1, |K|}\}) + \mathbf{f}(\alpha(|K|))\Big]. \quad (3)$$

Если же (при $s \in \overline{0, N}$ и $K \in \mathfrak{N}$) $|K| = 1$, то определяем $v(s, K) \triangleq \mathbf{c}(s, r, \{r\}) + \mathbf{f}(r)$, где $r \in \overline{1, N}$ есть такой единственный индекс, для которого $K = \{r\}$. В этом случае мы рассматриваем $v(s, K)$ как значение простейшей задачи о переходе из "города" с номером s в "город" с номером r.

Замечание 1. В ситуации $K = \{r\}$, где $r \in \overline{1, N}$, имеем (в силу вышеупомянутого условия), что $\mathbf{I}(K) = \mathbf{I}(\{r\}) = \{r\} = K$ (см. [9, предложение 2.2.1]). Тогда $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] = (\mathrm{bi})[K] = \{a_r\}$, где a_r: $\{1\} \to K$ однозначно определяется правилом $a_r(1) \triangleq r$. Данное свойство позволяет толковать $v(s, K) = v(s, \{r\})$ как экстремум в оптимизационной задаче с единственным допустимым элементом a_r.

Полагаем, наконец, что $v(s, \varnothing) \triangleq \mathbf{f}(s)\ \forall s \in \overline{0, N}$. Определяя $\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\varnothing\}$, мы получаем функцию Беллмана v: $\overline{0, N} \times \mathbf{N} \to [0, \infty[$, определенную вышеупомянутыми условиями. Из результатов [8] вытекает следующее

Предложение 1. Если $s \in \overline{0, N}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то справедливо равенство

$$v(s, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} [\mathbf{c}(s, j, K) + v(j, K \backslash \{j\})].$$

Напомним, что при $\alpha \in \mathbb{A}$ реализуется включение $\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1, N}]$, а тогда согласно (1) $\mathfrak{C}_\alpha$ есть критерий задачи (3) в условиях $s = 0$, $K = \overline{1, N}$. Поэтому $v(0, \overline{1, N}) = V$. Итак, формирование маршрутов $\alpha \in \mathbb{A}$ сводится к организации процедуры: сначала выбирается $\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$, после чего вычеркивается; далее выбирается $\alpha(2) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \backslash \{\alpha(1)\})$ и снова вычеркивается и так далее. Конкретный выбор $\alpha(1)$, ..., $\alpha(N - 1)$ можно подчинить соображениям, связанным с оптимизацией в классе маршрутов, допустимых по вычеркиванию, а стало быть, и по предшествованию. Теперь уже вполне очевидным является

Следствие 1. Справедливо равенство $V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} [\mathbf{c}(0, j, \overline{1, N}) + v(j, \overline{1, N} \backslash \{j\})]$.

3. Слои функции Беллмана

Предложение 1 в сочетании с ранее упомянутым краевым условием, формулируемым в терминах $\mathbf{f}$, определяет принципиальную возможность построения "всей" функции Беллмана v, но практически это возможно лишь для задачи очень малой размерности. Можно, однако, ограничиться построением лишь некоторой "части" массива значений упомянутой функции. Для реализации данного подхода в дальнейшем используем конструкцию [9, § 4.9], важную роль в которой играют существенные (по предшествованию) списки заданий: $\mathbf{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K}\ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$ есть множество всех существенных списков. Элементы $\mathbf{G}$ ранжируем по мощности, полагая $\mathbf{G}_s \triangleq \{K \in \mathbf{G} \mid s = |K|\}\ \forall s \in \overline{1, N}$. Ясно, что $\mathbf{G}_N = \{\overline{1, N}\}$ (одноэлементное семейство, содержащее $\overline{1, N}$); кроме того,

$$\mathbf{G}_{s-1} = \{K \backslash \{t\}: K \in \mathbf{G}_s,\ t \in \mathbf{I}(K)\}\ \forall s \in \overline{2, N}. \quad (4)$$

Тем самым реализуется рекуррентная процедура построения всех семейств $\mathbf{G}_1$, ..., $\mathbf{G}_N$ (подробнее см. в работе [13]). В связи с (4) отметим очень простое представление $\mathbf{G}_1$, полагая $\mathbb{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z): z \in \mathbf{K}\}$ и $\mathbf{M} = \overline{1, N} \backslash \mathbb{K}_1$: $\mathbf{G}_1 = \{\{t\}: t \in \mathbf{M}\}$. С каждым семейством $\mathbf{G}_1$, ..., $\mathbf{G}_N$ связываем соответствующий слой пространства позиций.

Полагаем, что $D_0 \triangleq \{(s, \varnothing): s \in \mathbf{M}\}$, что согласуется с работой [9, с. 174]. Кроме того, $D_N \triangleq \{(0, \overline{1, N})\}$ (одноэлементное множество, содержащее УП $(0, \overline{1, N})$). Для построения промежуточных слоев D_1, ..., D_{N-1} напомним следующую конструкцию [9, §4.9]: если $s \in \overline{1, N-1}$, то $\mathfrak{J}_s(K) \triangleq \{i \in \overline{1, N} \backslash K \mid \{i\} \cup K \in \mathbf{G}_{s+1}\}\ \forall K \in \mathbf{G}_s$;

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathbf{G}_s} \{(j, K): j \in \mathfrak{J}_s(K)\}.$$

Таким образом, определены все слои D_0, D_1, ..., D_N пространства позиций. При этом [9, предложение 4.9.3] упомянутые слои являются непустыми множествами: $D_s \neq \varnothing\ \forall s \in \overline{0, N}$. Напомним важное свойство [9, предложение 4.9.4]

$$(l, K \backslash \{l\}) \in D_{s-1}\ \forall s \in \overline{1, N}\ \forall (i, K) \in D_s\ \forall l \in \mathbf{I}(K). \quad (5)$$

В этих терминах определяем слои самой функции Беллмана: если $s \in \overline{0, N}$, то v_s: $D_s \to [0, \infty[$ определяется правилом

$$v_s(i, K) \triangleq v(i, K)\ \forall (i, K) \in D_s. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) мы получаем, что при всяком выборе $s \in \overline{1, N}$ и $(i, K) \in D_s$ определено значение $v_{s-1}(l, K \backslash \{l\}) \in [0, \infty[$, где $l \in \mathbf{I}(K)$. Поэтому определена наименьшая из величин $\mathbf{c}(i, l, K) + v_{s-1}(l, K \backslash \{l\})$, $l \in \mathbf{I}(K)$.

Предложение 2. Если $s \in \overline{1, N}$ и $(i, K) \in D_s$, то

$$v_s(i, K) = \min_{l \in \mathbf{I}(K)} [\mathbf{c}(i, l, K) + v_{s-1}(l, K \backslash \{l\})].$$

Доказательство извлекается из работы [12, (3.13), (3.15)]. При этом

$$v_0(t, \varnothing) = \mathbf{f}(t)\ \forall t \in \mathbf{M}. \quad (7)$$

Далее, согласно предложению 2 при $m \in \overline{0, N-1}$ преобразование $v_m \to v_{m+1}$ определяется условиями: если $(i, K) \in D_{m+1}$, то

$$v_{m+1}(i, K) = \min_{l \in \mathbf{I}(K)} [\mathbf{c}(i, l, K) + v_m(l, K \backslash \{l\})]. \quad (8)$$

После исполнения N шагов типа (8) будет, в частности, определено значение $v_N(0, \overline{1, N}) \in [0, \infty[$ (см. представление D_N), для которого согласно (6)

$$v_N(0, \overline{1, N}) = v(0, \overline{1, N}) = V. \quad (9)$$

Таким образом, определена рекуррентная процедура $v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N$, где v_N определяет экстремум V основной задачи (см. (9)).

4. Построение оптимального маршрута

Рассмотрим процедуру построения оптимального маршрута, используя только что построенные слои функции Беллмана (см. формулы (8), (9)). Значения этой функции для позиций, не принадлежащих слоям, использоваться не будут и известными не предполагаются. Заметим прежде всего, что согласно (8), (9)

$$V = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} [\mathbf{c}(0, k, \overline{1,N}) + v_{N-1}(k, \overline{1,N}\setminus\{k\})]. \quad (10)$$

С учетом (10) построение начинаем с индекса, доставляющего минимум в правой части (10): выбираем индекс $\mathbb{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ таким, что справедливо равенство

$$V = \mathbf{c}(0, \mathbb{i}_1, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathbb{i}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}). \quad (11)$$

Осуществляем перемещение $0 \to \mathbb{i}_1$. С учетом (5) получаем свойство $(\mathbb{i}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}) \in D_{N-1}$. В этом случае определено значение $v_{N-1}(\mathbb{i}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}) \in [0, \infty[$ (см. (6)), для которого

$$v_{N-1}(\mathbb{i}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\})} [\mathbf{c}(\mathbb{i}_1, k, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}) + v_{N-2}(k, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1; k\})]. \quad (12)$$

С учетом (12) выбираем очередной индекс $\mathbb{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\})$ так, чтобы при этом

$$v_{N-1}(\mathbb{i}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbb{i}_1, \mathbb{i}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}) + v_{N-2}(\mathbb{i}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1; \mathbb{i}_2\}). \quad (13)$$

С учетом (13) осуществляем перемещение $\mathbb{i}_1 \to \mathbb{i}_2$. Получили начальный "отрезок" $(\mathbb{i}_1, \mathbb{i}_2)$ маршрута. При этом $(\mathbb{i}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1; \mathbb{i}_2\}) \in D_{N-2}$ и (см. (6)) определено значение $v_{N-2}(\mathbb{i}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1; \mathbb{i}_2\}) \in [0, \infty[$. Из (11) и (13) получаем, что

$$V = \mathbf{c}(0, \mathbb{i}_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathbb{i}_1, \mathbb{i}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1\}) + v_{N-2}(\mathbb{i}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbb{i}_1; \mathbb{i}_2\}). \quad (14)$$

В формуле (14) первые два слагаемых отвечают текущим затратам, а последнее — перспективным затратам. Процедуру последовательного выбора индексов следует продолжать вплоть до исчерпывания множества $\overline{1,N}$. В результате будет построен (допустимый) маршрут $\eta = (\mathbb{i}_j)_{j \in \overline{1,N}} \in \mathbb{A}$ со свойством $\mathfrak{C}_\eta = V$, являющийся оптимальным решением ОЗМ; $\eta(1) = \mathbb{i}_1, \eta(2) = \mathbb{i}_2, ..., \eta(N) = \mathbb{i}_N$.

5. Схема независимых вычислений

В настоящем разделе конкретизируются положения [13, 14] для рассматриваемого "точечного" варианта маршрутной задачи. Для этого сначала отметим простые следствия построений раздела 3. Так, в частности, из формулы (4) вытекает, что

$$\mathbf{G}_{N-1} = \{\overline{1,N}\setminus\{j\}: j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})\}. \quad (15)$$

В соответствии с (15) мы можем занумеровать множества семейства $\mathbf{G}_{N-1}$, нумеруя $\mathbf{I}(\overline{1,N})$ (множество $\mathbf{I}(\overline{1,N})$ непусто и конечно; $|\mathbf{I}(\overline{1,N})| \leqslant N$). Будем полагать в дальнейшем, что упомянутые множества распределяются между вычислителями; каждому вычислителю соответствует, таким образом, индекс из $\mathbf{I}(\overline{1,N})$.

Имеем $\mathfrak{I}_{N-1}(K) = \{i \in \overline{1,N}\setminus K \mid \{i\} \cup K = \overline{1,N}\}\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}$. Определены множества $\mathfrak{I}_{N-1}(\overline{1,N}\setminus\{j\})$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$. Из [13, предложение 5] вытекает, что

$$\mathfrak{I}_{N-1}(\overline{1,N}\setminus\{j\}) = \{j\}\ \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}). \quad (16)$$

С учетом (15), (16) множество D_{N-1} принимает следующий вид

$$D_{N-1} = \bigcup_{K \in G_{N-1}} \{(s, K): s \in \mathfrak{I}_{N-1}(K)\} = \bigcup_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \{(s, \overline{1,N}\setminus\{j\}): s \in \mathfrak{I}_{N-1}(\overline{1,N}\setminus\{j\})\} = \bigcup_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \{(s, \overline{1,N}\setminus\{j\}): s \in \{j\}\} = \bigcup_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \{(j, \overline{1,N}\setminus\{j\})\} = \{(j, \overline{1,N}\setminus\{j\}): j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})\}; \quad (17)$$

в силу (17) можно рассматривать позиции $(j, \overline{1,N}\setminus\{j\})$ $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ как стартовые в схеме построения слоев функции Беллмана в режиме независимых вычислений: каждый вычислитель получит свою стартовую позицию. В связи с этим напомним, что согласно (9) и следствию 1

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} [\mathbf{c}(0, j, \overline{1,N}) + v_{N-1}(j, \overline{1,N}\setminus\{j\})]. \quad (18)$$

Для вычисления V надо, следовательно, определить все значения $v_{N-1}(j, \overline{1,N}\setminus\{j\})$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$.

В дальнейшем полагаем, что $3 \leqslant N$. Следуя работам [13, 14], введем в рассмотрение траектории в пространстве списков: если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, то через $\mathrm{T}[K]$ обозначаем множество всех кортежей $(K_i)_{i \in \overline{0, N-2}}: \overline{0, N-2} \to \mathbf{G}$, для каждого из которых

$$(K_0 = K) \ \&\ (\forall j \in \overline{1, N-2}\ \exists s \in \mathbf{I}(K_{j-1}): K_j = K_{j-1}\setminus\{s\}). \quad (19)$$

Тогда, в частности, определены (см. (15)) множества $\mathrm{T}[\overline{1,N}\setminus\{j\}]$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$, каждое из которых состоит из траекторий (19).

При этом [13, предложение 6] $K_j \in \mathbf{G}_{N-(j+1)}$ для $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $(K_i)_{i \in \overline{0, N-2}} \in \mathrm{T}[K]$ и $j \in \overline{0, N-2}$. Кроме того, из [13, предложение 7] $\mathrm{T}[K] \neq \varnothing\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}$. С пучками траекторий $\mathrm{T}[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, связываются области достижимости (ОД) [13, (50)]: если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $t \in \overline{0, N-2}$, то ОД в момент t есть

$\widetilde{\mathbb{T}}[K;\, t] \triangleq \{K_t\colon (K_i)_{i\,\in\,\overline{0,\, N-2}} \in \mathrm{T}[K]\}$. Легко видеть, что (см. [13, (51)]) ($\widetilde{\mathbb{T}}[K;\, 0] = \{K\}$) & ($\widetilde{\mathbb{T}}$ $[K;\, N-2] \subset \mathbf{G}_1$) при всяком выборе $K \in \mathbf{G}_{N-1}$. Из [13, предложение 12] вытекает, что справедлива система равенств

$$\mathbf{G}_{N-(t+1)} = \bigcup_{K\,\in\,\mathbf{G}_{N-1}} \widetilde{\mathbb{T}}[K;\, t]\ \forall t \in \overline{0,\, N-2}. \qquad (20)$$

С учетом [13, предложение 14] получаем, что

$$\widetilde{\mathbb{T}}[K;\, t] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_{N-(t+1)})\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1},\ \forall t \in \overline{0,\, N-2}. \ (21)$$

В частности, получаем из (21), что

$$\widetilde{\mathbb{T}}\ [K;\, N-2] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_1)\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \qquad (22)$$

Напомним теперь следующее положение [13, предложение 16]:

$$\widetilde{\mathbb{T}}[K;\, t+1] = \{\mathrm{M}\backslash\{j\}\colon \mathrm{M} \in \widetilde{\mathbb{T}}[K,\, t],\, j \in \mathbf{I}(\mathrm{M})\}$$
$$\forall K \in \mathbf{G}_{N-1}\ \forall t \in \overline{0,\, N-3}. \qquad (23)$$

Таким образом (см. (23)), мы располагаем рекуррентной процедурой построения ОД для каждого фиксированного списка $K \in \mathbf{G}_{N-1}$:

$$(\widetilde{\mathbb{T}}[K;\, 0] = \{K\}) \to \widetilde{\mathbb{T}}\ [K;\, 1] \to \ldots \to \widetilde{\mathbb{T}}[K;\, N-2].$$

6. Потоки значений функции Беллмана

Конструкцию настоящего раздела рассматриваем как естественную конкретизацию положений [13, раздел 6] (см. также [14]). В связи с построением слоев D_1, ..., D_{N-1} уместно ввести клетки пространства позиций: полагаем, что

$$\mathbb{D}_s[H] \triangleq \{(j,\, H)\colon j \in \mathfrak{J}_s(H)\}\ \forall s \in \overline{1, N-1}\ \ \forall H \in \mathbf{G}_s. (24)$$

Легко видеть [13, (92)], что множества-клетки (24) непусты; кроме того, $\mathbb{D}_s[H] \subset D_s\ \forall s \in \overline{1, N-1}\ \ \forall H \in \mathbf{G}_s$.

В связи с (24) отметим, что при $t \in \overline{0,\, N-2}$

$$N - (t+1) \in \overline{1, N-1}, \qquad (25)$$

а потому определено семейство $\mathbf{G}_{N-(t+1)}$; при этом для $H \in \mathbf{G}_{N-(t+1)}$ определена (см. (24), (25)) клетка $\mathbb{D}_{N-(t+1)}[H]$. В этом построении согласно (20) можно полагать, что $H \in \widetilde{\mathbb{T}}\ [K;\, t]$ при некотором $K \in \mathbf{G}_{N-1}$. Таким образом [13, (93)],

$$\mathbb{D}_{N-(t+1)}[H] \in \mathcal{P}'(D_{N-(t+1)})\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}$$
$$\forall t \in \overline{0,\, N-2}\ \ \forall H \in \widetilde{\mathbb{T}}[K;\, t]. \qquad (26)$$

С учетом (23) и (26) определяются следующие множества-объединения

$$\bigcup_{H\in\widetilde{\mathbb{T}}[K;t]} \mathbb{D}_{N-(t+1)}[H] \in \mathcal{P}'(D_{N-(t+1)})$$
$$\forall K \in \mathbf{G}_{N-1}\ \forall t \in \overline{0,\, N-2}. \qquad (27)$$

Из выражения (27) вытекает "терминальное" включение для $t = N-2$: $\bigcup_{H\in\widetilde{\mathbb{T}}[K;N-2]} \mathbb{D}_1[H] \in \mathcal{P}'(D_1)$.

Если же $s \in \overline{1, N-1}$, то подобно (25) имеем свойство $t_s \triangleq N-(s+1) \in \overline{0,\, N-2}$, а потому согласно (21) определена ОД $\widetilde{\mathbb{T}}[K;\, N-(s+1)] = \widetilde{\mathbb{T}}\ [K;\, t_s] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_s)$, где $K \in \mathbf{G}_{N-1}$; в этом случае можно использовать формулу (27), получая при этом:

$$\bigcup_{H\in\widetilde{\mathbb{T}}[K;N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[H] = \bigcup_{H\in\widetilde{\mathbb{T}}[K;t_s]} \mathbb{D}_{N-(t_s+1)} \in \mathcal{P}'(D_s).$$

Таким образом, корректно определяются множества

$$\mathfrak{D}_s[K] \triangleq \bigcup_{H\in\widetilde{\mathbb{T}}[K;N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[H] \in \mathcal{P}'(D_s)$$
$$\forall s \in \overline{1, N-1}\ \ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \qquad (28)$$

В частности, из (22) и (28) получаем, что при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$

$$\widetilde{\mathbb{T}}[K;\, N-2] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_1)\colon \mathfrak{D}_1[K] =$$
$$= \bigcup_{H\in\widetilde{\mathbb{T}}[K;N-2]} \mathbb{D}_1[H] \in \mathcal{P}'(D_1). \qquad (29)$$

Из работы [13, предложение 15] вытекает, что $(h,\, \mathbb{K}\backslash\{h\}) \in \mathfrak{D}_s[K]\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}\ \forall s \in \overline{1,\, N-2}\ \ \forall (i,\, \mathbb{K}) \in \in \mathfrak{D}_{s+1}[K]\ \forall h \in \mathbf{I}(\mathbb{K})$. Новые слои $\mathfrak{D}_1[K]$, ..., $\mathfrak{D}_{N-1}[K]$ образуют при выборе каждого списка $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ поток пространства позиций. Совокупность таких потоков определяет прежние слои D_1, ..., D_{N-1}. Действительно, согласно работе [13, предложение 17] $\forall s \in \overline{1, N-1}$

$$D_s = \bigcup_{K\,\in\,\mathbf{G}_{N-1}} \mathfrak{D}_s[K] = \bigcup_{j\,\in\,\mathbf{I}(\overline{1,N})} \mathfrak{D}_s[\overline{1, N}\backslash\{j\}]. \qquad (30)$$

С множествами (28) связываем потоки значений функции Беллмана, "привязанные" каждый к своему индексу из $\mathbf{I}(\overline{1, N})$. При $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ $\mathcal{W}_s[K] \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{D}_s[K]]$ определяется условиями (см. (8), (28))

$$\mathcal{W}_s[K](i,\, P) \triangleq v_s(i,\, P)\ \forall (i,\, P) \in \mathfrak{D}_s[K]; \qquad (31)$$

с учетом (6) и (31) получаем, что $\mathcal{W}_s[K] = = (v(i,\, P))_{(i,\, P)\in\mathfrak{D}_s[K]}$, т. е. $\mathcal{W}_s[K](i,\, P) = v(i,\, P)$ при $(i, P) \in \mathfrak{D}_s[K]$. В частности, $\mathcal{W}_1[K] = (v(i,\, P))_{(i,\, P)\in\mathfrak{D}_1[K]} \in \in \mathcal{R}_+\ [\mathfrak{D}_1[K]]$ при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$; для $(\mathbb{j},\, Q) \in \mathfrak{D}_1[K]$ справедливо также равенство

$$\mathcal{W}_1[K](\mathbb{j},\, Q) = v_1(\mathbb{j},\, Q). \qquad (32)$$

Напомним, что $v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1]$, и согласно предложению 2 и свойствам (5), (7) для $(j,\, T) \in D_1$ имеет место $T = \{t\}$, где $t \in \overline{1, N}\backslash\mathbb{K}_1$, что означает (см. замечание 1) $\mathbf{I}(T) = \mathbf{I}(\{t\}) = \{t\} = T$, а тогда при $l \in \mathbf{I}(T)$

имеем равенство $l = t$. Поэтому (см. (6)) $(l, T\backslash\{l\}) = (t, \varnothing) \in D_0$, где $t \in \mathbf{M}$, это доставляет (см. (7)) равенство $v_0(l, T\backslash\{l\}) = \mathbf{f}(t)$. Возвращаясь к $(j, T) \in D_1$, получаем из предложения 2, что

$$v_1(j, T) = \min_{l \in T}[\mathbf{c}(j, l, T) + \mathbf{f}(t)] = \mathbf{c}(j, t, \{t\}) + \mathbf{f}(t), \quad (33)$$

где $t \in \overline{1, N}\backslash\mathbb{K}_1$ таково, что $T = \{t\}$ (такой индекс t обязательно найдется). Это свойство (см. (33)) следует учесть в равенстве (32): если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $(\mathbb{j}, Q) \in \mathfrak{D}_1[K]$, то с учетом выражения (29) имеем для некоторого $q \in \mathbf{M}$ равенство $Q = \{q\}$, а потому

$$\mathcal{W}_1[K](\mathbb{j}, Q) = \mathbf{c}(\mathbb{j}, q, \{q\}) + \mathbf{f}(q). \quad (34)$$

В связи с (34) отметим, что согласно (22) и определению $\mathbf{G}_1$ (см. раздел 3)

$$\forall K \in \mathbf{G}_{N-1}\ \forall H \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]\ \exists h \in \mathbf{M}: H = \{h\}. \quad (35)$$

Из (22) и (35) вытекает, в частности, что

$$\mathbf{M}_0[K] \triangleq \{h \in \mathbf{M} | \{h\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]\}\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \quad (36)$$

Из (35), (36) вытекает, что $\forall K \in \mathbf{G}_{N-1}\ \forall H \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]\ \exists h \in \mathbf{M}_0[K]: H = \{h\}$. Поскольку при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ $\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$ — непустое множество, то $\mathbf{M}_0[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{M})$.

Предложение 6.1. Если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, *то справедливо равенство*

$$\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] = \{\{h\}: h \in \mathbf{M}_0[K]\}. \quad (37)$$

Доказательство. Обозначим через Ω семейство в правой части (37). Из (37) вытекает, что при $S \in \Omega$ реализуется при некотором $h_0 \in \mathbf{M}_0[K]$ равенство $S = \{h_0\}$, и согласно (36) $\{h_0\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$ и потому $S \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Следовательно,

$$\Omega \subset \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]. \quad (38)$$

Пусть, напротив, $T \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Тогда $T = \{t_0\}$, где $t_0 \in \mathbf{M}_0[K]$; по определению Ω $\{t_0\} \in \Omega$ и, стало быть, $T \in \Omega$. Установлено вложение $\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] \subset \Omega$. С учетом (38) получаем равенство $\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] = \Omega$. □

С учетом предложения 6.1 модифицируем определение $\mathfrak{D}_1[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$.

Предложение 6.2. *Если* $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, *то*

$$\mathfrak{D}_1[K] = \bigcup_{h \in \mathbf{M}_0[K]} \mathbb{D}_1[\{h\}]. \quad (39)$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{D}$ семейство в правой части (39). Пусть $(i_*, K_*) \in \mathfrak{D}_1[K]$. Тогда согласно (29) $(i_*, K_*) \in \mathbb{D}_1[H_*]$ для некоторого $H_* \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Тогда согласно (24) $H_* \in \mathbf{G}_1$ и, кроме того, для некоторого $j_* \in \mathfrak{J}_1(H_*)$ имеем равенство $(i_*, K_*) = (j_*, H_*)$. Это означает, что $K_* = H_*$ и, кроме того, $i_* \in \mathfrak{J}_1(K_*)$, где $K_* \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Согласно предложению 6.1 $K_* = \{h_*\}$ для некоторого $h_* \in \mathbf{M}_0[K]$. С учетом (24)

$$(i_*, K_*) \in \mathbb{D}_1[\{h_*\}], \quad (40)$$

поскольку $H_* = \{h_*\}$. При этом $\mathbb{D}_1[\{h_*\}] \subset \mathbf{D}$; в силу (40) $(i_*, K_*) \in \mathbf{D}$. Поскольку выбор (i_*, K_*) был произвольным, установлено, что $\mathfrak{D}_1[K] \subset \mathbf{D}$. Покажем, что справедливо и противоположное вложение. Пусть

$$(i^*, K^*) \in \mathbf{D}. \quad (41)$$

Тогда согласно условию (41) для некоторого $h^* \in \mathbf{M}_0[K]$ справедливо, что

$$(i^*, K^*) \in \mathbb{D}_1[\{h^*\}]. \quad (42)$$

Согласно (36) получаем, что $h^* \in \mathbf{M}$ и $\{h^*\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Из (29) следует, что $\mathbb{D}_1[\{h^*\}] \subset \mathfrak{D}_1[K]$, а тогда согласно (42) $(i^*, K^*) \in \mathfrak{D}_1[K]$. Итак (см. (41)), установлено, что $\mathbf{D} \subset \mathfrak{D}_1[K]$. Получили равенство $\mathfrak{D}_1[K] = \mathbf{D}$. □

С учетом (24) $\mathbb{D}_1[H] = \{(j, H): j \in \mathfrak{J}_1(H)\}\ \forall H \in \mathbf{G}_1$. Как следствие

$$\mathbb{D}_1[H] = \{(j, H): j \in \mathfrak{J}_1(H)\}$$
$$\forall K \in \mathbf{G}_{N-1}\ \forall H \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]. \quad (43)$$

Согласно (36) и (29) при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $h \in \mathbf{M}_0[K]$ имеем $\{h\} \in \mathbf{G}$, а потому (см. раздел 3) определено $\mathfrak{J}_1(\{h\})$. С учетом предложения 6.1 и (43) получаем, что

$$\mathbb{D}_1[\{h\}] = \{(j, \{h\}): j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})\}$$
$$\forall K \in \mathbf{G}_{N-1}\ \forall h \in \mathbf{M}_0[K]. \quad (44)$$

Из (44) и предложения 6.2 вытекают равенства

$$\mathfrak{D}_1[K] = \bigcup_{h \in \mathbf{M}_0[K]} \{(j, \{h\}): j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})\}\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \quad (45)$$

Следовательно, при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $(\mathbb{j}, Q) \in \mathfrak{D}_1[K]$ непременно реализуется равенство $(\mathbb{j}, Q) = (j, \{h\})$ для некоторых $h \in \mathbf{M}_0[K]$ и $j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})$; иными словами, $Q = \{h\}$, где $h \in \mathbf{M}_0[K]$, а $\mathbb{j} \in \mathfrak{J}_1(\{h\})$. При этом h определяется при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ по $(\mathbb{j}, Q) \in \mathfrak{D}_1[K]$ единственным образом. Согласно (36) и (29) при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $h \in \mathbf{M}_0[K]$ имеем $\{h\} \in \mathbf{G}_1$, а потому (см. раздел 3) определено $\mathfrak{J}_1(\{h\})$. Комбинируя (34) и (45), мы получаем при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $h \in \mathbf{M}_0[K]$ и $\mathbb{j} \in \mathfrak{J}_1(\{h\})$, что

$$\mathcal{W}_1[K](j, \{h\}) = \mathbf{c}(j, h, \{h\}) + \mathbf{f}(h). \quad (46)$$

С учетом (45) получаем при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, что (46) определяет функцию $\mathcal{W}_1[K]$.

При $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $l \in \overline{1, N-2}$, $(i, P) \in \mathfrak{D}_{l+1}[K]$ и $h \in \mathbf{I}(P)$ определено значение $\mathcal{W}_l[K](h, P\backslash\{h\}) = v_l(h, P\backslash\{h\}) \in [0, \infty[$. Как следствие, при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $l \in \overline{1, N-2}$ и $(i, P) \in \mathfrak{D}_{l+1}[K]$

$$\min_{h \in \mathbf{I}(P)}[\mathbf{c}(i, h, P) + \mathcal{W}_l[K](h, P\backslash\{h\})] =$$
$$= \min_{h \in \mathbf{I}(P)}[\mathbf{c}(i, h, P) + v_l(h, P\backslash\{h\})]. \quad (47)$$

Предложение 6.3. *Если* $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $l \in \overline{1, N-2}$, $(i, P) \in \mathfrak{D}_{l+1}[K]$, *то*

$$\mathcal{W}_{l+1}[K](i, P) = \\ = \min_{h \in \mathbf{I}(P)} [\mathbf{c}(i, h, P) + \mathcal{W}_l[K](h, P\backslash\{h\})]. \quad (48)$$

Доказательство. Учтем, что $l + 1 \in \overline{2, N-1}$ и $(h, P\backslash\{h\}) \in \mathfrak{D}_l[K]$ $\forall h \in \mathbf{I}(K)$. Вместе с тем $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $l+1 \in \overline{2, N-1}$, а потому в силу (31) $\mathcal{W}_{l+1}[K]\,(i, P) = v_{l+1}(i, P)$. Отметим также, что согласно (30) $\mathfrak{D}_l[K] \subset D_l$, $\mathfrak{D}_{l+1}[K] \subset D_{l+1}$. Тогда $(h, P\backslash\{h\}) \in D_l$ $\forall h \in \mathbf{I}(K)$. По выбору (i, P) имеем также, что $(i, P) \in D_{l+1}$. Тогда (см. [15], предложение 2) $v_{l+1}(i, P) = \min\limits_{h \in \mathbf{I}(P)} [\mathbf{c}(i, h, P) + v_l(h, P\backslash\{h\})]$. С учетом (47) получаем требуемое равенство (48). □

С учетом выражений (44) и (46) можно считать, что функции $\mathcal{W}_1[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, известны. Поэтому при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ предложение 6.3 определяет рекуррентную процедуру

$$\mathcal{W}_1[K] \to \mathcal{W}_2[K] \to \ldots \to \mathcal{W}_{N-1}[K], \quad (49)$$

отвечающую работе одного вычислителя. С учетом (15) это означает, что при $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ мы можем явным образом (см. (46)) определить $\mathcal{W}_1[\overline{1, N}\backslash\{j\}]$, после чего с учетом предложения 6.3 реализуем рекуррентную процедуру

$$\mathcal{W}_1[\overline{1, N}\backslash\{j\}] \to \mathcal{W}_2[\overline{1, N}\backslash\{j\}] \to \ldots \to \\ \to \mathcal{W}_{N-1}[\overline{1, N}\backslash\{j\}]. \quad (50)$$

Теперь, учитывая (31) и (49) (или (50)), мы определяем посредством склеивания все функции v_1, ..., v_{N-1}: если $s \in \overline{1, N-1}$ и $(j, Q) \in D_s$, то, используя (30), выбираем $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ такое, что $(j, Q) \in \mathfrak{D}_s[K]$, после чего полагаем, учитывая (31),

$$v_s(j, Q) = \mathcal{W}_s[K](j, Q). \quad (51)$$

Располагая, в частности, функцией v_{N-1}, по формуле (18) определяем V.

7. Алгоритм на функциональном уровне

В настоящем разделе обсуждается гипотетический вариант построения процедур (49), (50). Речь идет о совместной их реализации при введении определенной иерархии для вычислителей, каждый из которых обеспечивает построение соответствующей цепочки вида (49) или (50). Дело в том, что множества $\mathfrak{D}_s[K_1]$ и $\mathfrak{D}_s[K_2]$, где $s \in \overline{1, N-1}$, могут пересекаться при $K_1 \in \mathbf{G}_{N-1}$, $K_2 \in \mathbf{G}_{N-1}$, $K_1 \neq K_2$. Непосредственное использование процедур (49), (50) может приводить к многократному выполнению одних и тех же вычислений, что, в частности, порождает дефицит памяти, выделяемой вычислителям. Ниже предлагается поход к организации "совместных" вычислений. Учитывается, что семейство $\mathbf{G}_{N-1}$ непусто и конечно (см. (15)). Полагаем, $\mathbf{n} \triangleq |\mathbf{G}_{N-1}| \in \mathbb{N}$, определяя мощность семейства $\mathbf{G}_{N-1}$. Введем биекцию

$$(L_j)_{j \in \overline{1, \mathbf{n}}} : \overline{1, \mathbf{n}} \overset{\text{на}}{\to} \mathbf{G}_{N-1} \quad (52)$$

"отрезка" $\overline{1, \mathbf{n}}$ на $\mathbf{G}_{N-1}$. Пусть иерархия списков определяется биекцией (52): список L_1 объявляется "самым главным", список L_2 следует за L_1, L_3 следует за L_2 и т. д. В последующих построениях предполагается, что $N > 6$ и $\mathbf{n} \geqslant 3$. Кроме того, полагаем, что $\mathbf{n} < N$. В соответствии с этим вычислитель Π_1, ответственный за реализацию (49) при $K = L_1$, получает для работы множества $\mathfrak{D}_s[L_1]$, $s \in \overline{1, N-1}$. Вычислитель Π_2, ответственный за реализацию цепочки (49) при $K = L_2$, получает множества $\mathfrak{D}_s[L_2]\backslash\mathfrak{D}_s[L_1]$, $s \in \overline{1, N-1}$, и возможность обращения к Π_1 за недостающей информацией (в силу предложения 6.3 для непосредственного применения (49) при $K = L_2$ требуются позиции из $\mathfrak{D}_s[L_1] \cap \mathfrak{D}_s[L_2]$, которые мы уже "отдали" вычислителю Π_1). Вычислитель Π_3, ответственный за реализацию (49) при $K = L_3$, получает множества $\mathfrak{D}_s[L_3]\backslash(\mathfrak{D}_s[L_1] \cup \mathfrak{D}_s[L_2])$, $s \in \overline{1, N-1}$, и возможность обращаться к вычислителям Π_1 и Π_2. Дальнейшее построение аналогично: вычислителю Π_m, где $m \in \overline{3, \mathbf{n}}$, выделяются множества

$$\mathfrak{D}_s[L_m]\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathfrak{D}_s[L_j]\right), \; s \in \overline{1, N-1},$$

и возможность обращаться к Π_1, ..., Π_{m-1} за недостающей информацией.

После этого вычислитель Π_1 самостоятельно реализует цепочку (49) при $K = L_1$. Вычислитель Π_2 реализует (49) при $L = L_2$, используя результаты счета от Π_1. Дальнейшее распределение вычислений аналогично: вычислитель Π_m, где $m \in \overline{2, \mathbf{n}}$, реализует (49) при $K = L_m$, используя результаты счета от Π_1, ..., Π_{m-1}. После реализации всех цепочек (49), отвечающих случаям $K = L_1$, ..., $K = L_{\mathbf{n}}$, на основе (30), (31) и (51) осуществляется построение функций v_1, ..., v_{N-1}.

Случай $\mathbf{n} = 3$, $N > 6$. Итак, пусть на этапе $I_1^{(1)}$ вычислитель Π_1 осуществляет построение функции $\mathcal{W}_1[L_1]: \mathfrak{D}_1[L_1] \to [0, \infty[$, используя (46). После этапа $I_1^{(1)}$ вычислитель Π_1 располагает (дискретной) функцией $\mathcal{W}_1[L_1]$. На этапе $I_2^{(1)}$, непосредственно следующим за $I_1^{(1)}$, вычислитель Π_1 осуществляет построение функции

$$\mathcal{W}_2[L_1]: \mathfrak{D}_2[L_1] \to [0, \infty[, \quad (53)$$

а вычислитель Π_2 осуществляет насчитывание значений $\mathcal{W}_1[L_2](j, K)$, $(j, K) \in \mathfrak{D}_1[L_2]\backslash\mathfrak{D}_1[L_1]$, используя (46). В результате будет сформирована функция

$$\mathcal{W}_1[L_2]: \mathfrak{D}_1[L_2] \to [0, \infty[. \quad (54)$$

Построением функции (54) завершается этап $I_2^{(1)}$.

На следующем этапе $I_3^{(1)}$ вычислитель Π_1 реализует построение функции

$$\mathcal{W}_3[L_1]: \mathfrak{D}_3[L_1] \to [0, \infty[. \quad (55)$$

На этом же этапе Π_2 насчитывает значения $\mathcal{W}_2[L_2](j, K)$, $(j, K) \in \mathfrak{D}_2[L_2]\backslash\mathfrak{D}_2[L_1]$. С учетом (53) вычислитель Π_2 располагает к концу этапа $I_3^{(1)}$ функцией

$$\mathcal{W}_2[L_2]: \mathfrak{D}_2[L_2] \to [0, \infty[. \quad (56)$$

Действительно, на множестве $\mathfrak{D}_2[L_1] \cap \mathfrak{D}_2[L_2]$ значения функций $\mathcal{W}_2[L_1]$ и $\mathcal{W}_2[L_2]$ совпадают, поскольку согласно (51) для $(j, Q) \in \mathfrak{D}_2[L_1] \cap \mathfrak{D}_2[L_2]$

$$\mathcal{W}_2[L_1](j, Q) = v_2(j, Q) = \mathcal{W}_2[L_2](j, Q).$$

Далее, в начале этапа $I_3^{(1)}$ "включается" Π_3, который насчитывает значения

$$\mathcal{W}_1[L_3](j, K), (j, K) \in \mathfrak{D}_1[L_3]\backslash(\mathfrak{D}_1[L_1] \cup \mathfrak{D}_1[L_2]); \quad (57)$$

это достаточно для того, чтобы у Π_3 сформировалась функция

$$\mathcal{W}_1[L_3]: \mathfrak{D}_1[L_3] \to [0, \infty[. \quad (58)$$

В самом деле, при $(j, Q) \in \mathfrak{D}_1[L_1] \cap \mathfrak{D}_1[L_3]$ согласно (51)

$$\mathcal{W}_1[L_1](j, Q) = v_1(j, Q) = \mathcal{W}_1[L_3](j, Q). \quad (59)$$

Кроме того, при $(j, Q) \in \mathfrak{D}_1[L_2] \cap \mathfrak{D}_1[L_3]$ имеем в силу (51), что

$$\mathcal{W}_1[L_2](j, Q) = \mathcal{W}_1[L_3](j, Q). \quad (60)$$

В силу (59) и (60) получаем, что на множестве $\mathfrak{D}_1[L_3] \cap (\mathfrak{D}_1[L_1] \cup \mathfrak{D}_1[L_2])$ значения $\mathcal{W}_1[L_3](j, Q)$ уже насчитаны вычислителями Π_1, Π_2. Таким образом (см. (57), (59), (60)), все значения $\mathcal{W}_1[L_3](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_1[L_3]$, определены, а это и означает завершение построения функции (58).

Теперь после трех этапов $I_1^{(1)}$, $I_2^{(1)}$, $I_3^{(1)}$ "коалиция" (Π_1, Π_2, Π_3) располагает функциями: 1) $\mathcal{W}_1[L_1]$, $\mathcal{W}_1[L_2]$, $\mathcal{W}_1[L_3]$; 2) $\mathcal{W}_2[L_1]$, $\mathcal{W}_2[L_2]$; 3) $\mathcal{W}_3[L_1]$.

Если $\mathbf{n} = 3$, то после этапов $I_1^{(1)}$, $I_2^{(1)}$, и $I_3^{(1)}$ будет построена вся функция v_1 (см. (51) при $s = 1$). Дальнейшие построения при $\mathbf{n} = 3$ подобны примеру, приводимому ниже. Если $\mathbf{n} > 3$, то наше построение, приводящее к v_1, следует продолжать. При этом будут конструироваться также фрагменты $v_2, ..., v_{N-1}$.

Итак, пусть $\mathbf{k} \in \overline{3, \mathbf{n} - 1}$, и реализованы этапы $I_1^{(1)}, ..., I_{\mathbf{k}}^{(1)}$, после которых построены функции

$$(1)\ \mathcal{W}_1[L_1], ..., \mathcal{W}_1[L_{\mathbf{k}}],$$
$$(2)\ \mathcal{W}_2[L_1], ..., \mathcal{W}_2[L_{\mathbf{k}-1}]; ...; (\mathbf{k})\ \mathcal{W}_{\mathbf{k}}[L_1].$$

Приступаем к реализации этапа $I_{\mathbf{k}+1}^{(1)}$. Вычислитель Π_1 независимо от остальных насчитывает значения функции $\mathcal{W}_{\mathbf{k}+1}[L_1]: \mathfrak{D}_{\mathbf{k}+1}[L_1] \to [0, \infty[$. Вычислитель Π_2 достраивает с возможным учетом данных вычислителя Π_1 функцию

$$\mathcal{W}_{\mathbf{k}}[L_2]: \mathfrak{D}_{\mathbf{k}}[L_2] \to [0, \infty[. \quad (61)$$

Для этого Π_2 насчитывает значения $\mathcal{W}_{\mathbf{k}}[L_2](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{k}}[L_2]\backslash\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}[L_1]$. Кроме того, он получает от вычислителя Π_1 значения

$$\mathcal{W}_{\mathbf{k}}[L_2](j, Q) =$$
$$= \mathcal{W}_{\mathbf{k}}[L_1](j, Q),\ (j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{k}}[L_1] \cap \mathfrak{D}_{\mathbf{k}}[L_2],$$

которые насчитаны Π_1 на этапе $I_{\mathbf{k}}^{(1)}$. В результате определена вся функция (61).

Пусть теперь $m \in \overline{2, \mathbf{k}}$ и рассматривается работа вычислителя Π_m на этапе $I_{\mathbf{k}+1}^{(1)}$. В процессе этой работы он реализует насчитывание значений

$$\mathcal{W}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m]:\mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m] \to [0, \infty[. \quad (62)$$

Для этого построения он независимо насчитывает значения

$$\mathcal{W}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m](j, Q),$$
$$(j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m]\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_i]\right). \quad (63)$$

Кроме того, Π_m обращается к $\Pi_1, ..., \Pi_{m-1}$ за получением числовых значений

$$(\mathcal{W}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m](j, Q) = \mathcal{W}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_1](j, Q),$$
$$(j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m] \bigcap \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_1]), ..., \quad (64)$$
$$(\mathcal{W}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m](j, Q) = \mathcal{W}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_{m-1}](j, Q),$$
$$(j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m] \bigcap \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_{m-1}]).$$

Массивы значений (63), (64) определяют функцию (62), поскольку

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m] = \left(\mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m]\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_i]\right)\right) \bigcup$$
$$\bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} (\mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_m] \bigcap \mathfrak{D}_{\mathbf{k}-(m-2)}[L_i])\right). \quad (65)$$

Процедуру построения функций, подобных (62) и реализуемых на основе (63), (64), следует продолжать (учитывая (65)) вплоть до $m = \mathbf{k}$. Завершающий фрагмент построения, отвечающий переходу $\mathbf{k} \to \mathbf{k} + 1$, осуществляется следующим образом: вычислитель $\Pi_{\mathbf{k}+1}$ реализует построение функции $\mathcal{W}_1[L_{\mathbf{k}+1}]: \mathfrak{D}_1[L_{\mathbf{k}+1}] \to [0, \infty[$ (учитываем, что $\mathbf{k} - (m - 2) = 1$ при $m = \mathbf{k} + 1$).

Таким образом, действуя подобно (1)—(**k**), вычислители после этапа $I^{(1)}_{\mathbf{k}+1}$ завершают построение функций

$$(1') \ \mathcal{W}_1[L_1], ..., \mathcal{W}_1[L_{\mathbf{k}+1}];$$
$$(2') \ \mathcal{W}_2[L_1], ..., \mathcal{W}_2[L_{\mathbf{k}}]; ...; ((\mathbf{k}+1)') \ \mathcal{W}_{\mathbf{k}+1}[L_1].$$

Продолжая данное построение, мы получим, в частности, ситуацию, когда можно полагать $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 1$ (напомним, что $\mathbf{n} < N$), а тогда после очередного этапа $I^{(1)}_{\mathbf{n}}$ мы будем располагать следующими функциями

$$(1'') \ \mathcal{W}_1[L_1], ..., \mathcal{W}_1[L_{\mathbf{n}}];$$
$$(2'') \ \mathcal{W}_2[L_1], ..., \mathcal{W}_2[L_{\mathbf{n}-1}]; ...; (\mathbf{n}'') \ \mathcal{W}_{\mathbf{n}}[L_1]. \quad (66)$$

Набор (66) является результатом вычислений на этапах $I^{(1)}_1$, ..., $I^{(1)}_{\mathbf{n}}$. Располагая функциями (66), мы с учетом (30), (31) и (51) осуществляем (посредством склеивания) построение функции v_1; при этом используется (1″) в (66).

Теперь "строку" (2″) мы достраиваем на этапе $I^{(1)}_{\mathbf{n}+1}$ до массива значений функции v_2. Для этого на этапе $I^{(1)}_{\mathbf{n}+1}$ вычислитель Π_1 независимо от остальных насчитывает значения функции $\mathcal{W}_{\mathbf{n}+1}[L_1]$: $\mathfrak{D}_{\mathbf{n}+1}[L_1] \to [0, \infty[$; для этого определяется массив значений $\mathcal{W}_{\mathbf{n}+1}[L_1](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{n}+1}[L_1]$. Далее, вычислитель Π_2 на этапе $I^{(1)}_{\mathbf{n}+1}$ самостоятельно насчитывает значения $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}[L_2](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{n}}[L_2]\backslash\mathfrak{D}_{\mathbf{n}}[L_1]$. Кроме того, он использует значения $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}[L_1](j, Q) = \mathcal{W}_{\mathbf{n}}[L_2](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{n}}[L_1] \cap \mathfrak{D}_{\mathbf{n}}[L_2]$.

Таким образом, получается вся функция $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}[L_2]$: $\mathfrak{D}_{\mathbf{n}}[L_2] \to [0, \infty[$, которая "завершает" строку (2″) и позволяет с учетом (30), (31) и (51) построить v_2.

Далее на этапе $I^{(1)}_{\mathbf{n}+2}$ по аналогичной схеме будет построена функция v_3. Здесь, конечно, мы должны предполагать, что $3 \leqslant N - 1$, т. е. $4 \leqslant N$, что, собственно говоря, и представляет практический интерес. Более того, с практической точки зрения естественно полагать, что $\mathbf{n} \leqslant N - 1$ (имеется в виду тот факт, что решается задача достаточно большой размерности в смысле N).

При повторении в основных чертах вышеупомянутой процедуры (связанной с построением v_2) после этапа $I^{(1)}_{2\mathbf{n}-1}$ будут построены все функции v_1, ..., $v_{\mathbf{n}}$. Кроме того, лидер — вычислитель Π_1 — может (при $\mathbf{n} < N$) уйти вперед: при $2\mathbf{n} \leqslant N - 1$ этот вычислитель построит новые функции $\mathcal{W}_{\mathbf{n}+1}[L_1]$, ..., $\mathcal{W}_{2\mathbf{n}-1}[L_1]$. В противном случае, т. е. при $N < 2\mathbf{n}$, вычислитель Π_1 должен остановить вычисления по достижении массива значений функции $\mathcal{W}_{N-1}[L_1]$. Аналогичным образом вычислитель Π_2 при $2\mathbf{n} \leqslant N$ после серии построений упомянутого (в связи с построением v_2) типа определит новые функции $\mathcal{W}_{\mathbf{n}+1}[L_2]$, ..., $\mathcal{W}_{2\mathbf{n}-2}[L_2]$. Если же, напротив, $N < 2\mathbf{n}$, то вычислитель Π_2 прекращает вычисления по достижении массива значений функции $\mathcal{W}_{N-1}[L_2]$. Аналогичные построения осуществляют вычислители Π_3, ..., $\Pi_{\mathbf{n}}$ при условии, что завершающим этапом является $I^{(1)}_{2\mathbf{n}-1}$. При этом вычислитель $\Pi_{\mathbf{n}}$ после этого этапа должен иметь функцию $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}[L_{\mathbf{n}}]$ (с учетом этого и оказывается возможным построение всей функции $v_{\mathbf{n}}$).

Дальнейшее построение функций $v_{\mathbf{n}+1}$, ..., v_{N-1} требует осуществления новых циклов, подобных $(I^{(1)}_1$, ..., $I^{(1)}_{2\mathbf{n}-1})$. Число и состав этих циклов зависят от конкретных соотношений **n** и N. Один из новых циклов будет "неполным" и, по сути, завершающим в том смысле, что вычислители Π_1, ..., Π_l, где $l < \mathbf{n}$, закончат свою работу, а вычислители Π_{l+1}, ..., $\Pi_{\mathbf{n}}$ будут продолжать свои вычисления. Между первым и последним (неполным) циклами при больших значениях $(N - 1)/\mathbf{n}$ возникают промежуточные "полные" циклы, когда работают все вычислители. При этом последовательно строятся функции $v_{\mathbf{n}+1}$, ..., v_p, где $p < N - 1$, после чего в пределах вышеупомянутого "неполного" цикла вычислители Π_{l+1}, ..., $\Pi_{\mathbf{n}}$ достраивают функции v_{p+1}, ..., v_{N-1}.

По соображениям объема ограничиваемся упомянутыми соображениями и приведем конкретизацию для модельного примера при $\mathbf{n} = 3$.

8. Модельный пример

Рассматриваем схему независимых вычислений слоев функции Беллмана на примере при числе заданий $N = 5$ и используем для вычисления три вычислителя: $\mathbf{n} = 3$. На выполнение заданий накладываются условия предшествования посредством множества $\mathbf{K} = \{(1, 3); (2, 4)\}$.

Для реализации экономичного варианта метода динамического программирования (см. раздел 3) построим существенные списки заданий. Для этого, применяя оператор **I** [9, (2.2.27), (2.2.28)] к множеству $\overline{1, 5}$, получаем $\mathbf{I}(\overline{1, 5}) = \overline{1, 5}\backslash\{\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \Sigma[\overline{1, 5}]\}$, где $\Sigma[\overline{1, 5}] = \{z \in \overline{1, 5} | (\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1, 5})\&(\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1, 5})\}$; среди всех пар индексов только две, (1,3) и (2,4), являются адресными (см. Введение). Итак, $\mathbf{I}(\overline{1, 5}) = \overline{1, 5}\backslash\{3; 4\} = \overline{1, 2} \cup \{5\}$. По формуле (15) имеем списки заданий мощности 4: $\mathbf{G}_4 = \{\overline{2, 5}; \{1\} \cup \overline{3, 5}; \overline{1, 4}\}$. Далее по формуле (4) строим существенные списки заданий мощности 3, при этом $\mathbf{I}(\overline{2, 5}) = \overline{2, 3} \cup \{5\}$; $\mathbf{I}(\{1\} \cup \overline{3, 5}) = \{1\} \cup \overline{4, 5}$; $\mathbf{I}(\overline{1, 4}) = \overline{1, 2}$. Легко видеть, что семейство $\mathbf{G}_3$ состоит (см. (4)) из пяти списков заданий: $\mathbf{G}_3 = \{\overline{3, 5}; \{2\} \cup \overline{4, 5}; \overline{2, 4}; \{1; 3; 5\}; \{1\} \cup \overline{3, 4}\}$.

Вновь используя (4), получаем семейство $\mathbf{G}_2$: $\mathbf{G}_2 = \{\overline{4, 5}; \overline{3, 4}; \{2; 4\}; \{3; 5\}; \{1; 3\}\}$. Для получения

$\widetilde{\mathbb{T}}[L_1;\,0] = \{\overline{2,5}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_2;\,0] = \{\{1\} \cup \overline{3,5}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_3;\,0] = \{\overline{1,4}\}$
$\widetilde{\mathbb{T}}[L_1;\,1] = \{\overline{3,5};\ \{2\} \cup \overline{4,5};\ \overline{2,4}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_2;\,1] = \{\overline{3,5};\ \{1;\,3;\,5\};\ \{1\} \cup \overline{3,4}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_3;\,1] = \{\overline{2,4};\ \{1\} \cup \overline{3,4}\}$
$\widetilde{\mathbb{T}}[L_1;\,2] = \{\overline{4,5};\ \overline{3,4};\ \{2;\,4\}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_2;\,2] = \{\overline{4,5};\ \overline{3,4};\ \{3;\,5\};\ \{1;\,3\}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_3;\,2] = \{\overline{3,4};\ \{2;\,4\};\ \{1;\,3\}\}$
$\widetilde{\mathbb{T}}[L_1;\,3] = \{\{5\};\ \{4\};\ \{3\}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_2;\,3] = \{\{5\};\ \{4\};\ \{3\}\}$	$\widetilde{\mathbb{T}}[L_3;\,3] = \{\{3\};\ \{4\}\}$

семейства $\mathbf{G}_1$ используем следующее представление $\mathbf{G}_1 = \{\{t\}\colon t \in \mathbf{M}\} = \{\{t\}\colon t \in \overline{1,5} \setminus \mathbb{K}_1\}$, где $\mathbb{K}_1 = \{1;\,2\}$, т. е.

$$\mathbf{G}_1 = \{\{3\};\ \{4\};\ \{5\}\}.$$

Нумеруем множества из семейства $\mathbf{G}_4$ (см. (52)):

$$L_1 = \overline{2,5}\,;\ L_2 = \{1\} \cup \overline{3,5}\,;\ L_3 = \overline{1,4}\,.$$

Для каждого списка L_1, L_2 и L_3, используя (23), строим ОД (см. таблицу).

Теперь, выбирая последовательно каждый из списков L_1, L_2, L_3, мы конструируем поток пространства позиций, используя (28):

$\mathfrak{D}_4[L_1] = \{(1,\ \overline{2,5}\,)\}$;

$\mathfrak{D}_3[L_1] = \{(2,\ \overline{3,5}\,);\ (3,\ \{2\} \cup \overline{4,5}\,);\ (5,\ \overline{2,4}\,)\}$;

$\mathfrak{D}_2[L_1] = \{(2,\ \overline{4,5}\,);\ (5,\ \{2;\,4\});\ (3,\ \{2;\,4\});\ (2,\ \overline{3,5}\,);$ $(5,\ \overline{3,4}\,);\ (2,\ \overline{3,4}\,)\}$;

$\mathfrak{D}_1[L_1] = \{(4,\ \{5\});\ (5,\ \{4\});\ (4,\ \{3\});\ (3,\ \{4\})\}$.

$\mathfrak{D}_4[L_2] = \{(2,\ \{1\} \cup \overline{3,5}\,)\}$;

$\mathfrak{D}_3[L_2] = \{(1,\ \overline{3,5}\,);\ (4,\ \{1;\,3;\,5\});\ (5,\ \{1\} \cup \overline{3,4}\,)\}$;

$\mathfrak{D}_2[L_2] = \{(3,\ \overline{4,5}\,);\ (5,\ \overline{3,4}\,);\ (1,\ \{3;\,5\});\ (5,\ \{1;\,3\});$ $(1,\ \overline{3,4}\,);\ (4,\ \{1;\,3\})\}$;

$\mathfrak{D}_1[L_2] = \{(4,\ \{5\});\ (5,\ \{4\});\ (4,\ \{3\});\ (3,\ \{4\});\ (5,\ \{3\});$ $(3,\ \{5\});\ (1,\ \{3\})\}$.

$\mathfrak{D}_4[L_3] = \{(5,\ \overline{1,4}\,)\}$;

$\mathfrak{D}_3[L_3] = \{(1,\ \overline{2,4}\,);\ (2,\ \{1\} \cup \overline{3,4}\,)\}$;

$\mathfrak{D}_2[L_3] = \{(2,\ \overline{3,4}\,);\ (3,\ \{2;\,4\});\ (1,\ \overline{3,4}\,);\ (4,\ \{1;\,3\})\}$;

$\mathfrak{D}_1[L_3] = \{(4,\ \{3\});\ (3,\ \{4\});\ (2,\ \{4\});\ (1,\ \{3\})\}$.

Для получения потоков значений вида (50) на построенных выше слоях нам потребуется матрица затрат $\mathbf{c}(i, j, K)$, где $i \in \overline{0,5}\,, j \in \overline{1,5}\,, K \subset \overline{1,5}\,$. В своей существенной части матрица $\mathbf{c}$ определяется следующими значениями:

$\mathbf{c}(0{,}1,\ \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(0{,}1,\ \{2\}) = 1$	$\mathbf{c}(0{,}1,\ \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(0{,}1,\ \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(0{,}1,\ \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(0{,}2,\ \{1\}) = 0{,}5$	$\mathbf{c}(0{,}2,\ \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(0{,}2,\ \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(0{,}2,\ \{4\}) = 4$	$\mathbf{c}(0{,}2,\ \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(0{,}3\ \{1\}) = 0{,}5$	$\mathbf{c}(0{,}3,\ \{2\}) = 1$	$\mathbf{c}(0{,}3,\ \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(0{,}3,\ \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(0{,}3,\ \{5\}) = 4$
$\mathbf{c}(0{,}4,\ \{1\}) = 0{,}4$	$\mathbf{c}(0{,}4,\ \{2\}) = 0{,}5$	$\mathbf{c}(0{,}4,\ \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(0{,}4,\ \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(0{,}4,\ \{5\}) = 2$
$\mathbf{c}(0{,}5,\ \{1\}) = 0{,}3$	$\mathbf{c}(0{,}5,\ \{2\}) = 0{,}5$	$\mathbf{c}(0{,}5,\ \{3\}) = 2$	$\mathbf{c}(0{,}5,\ \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(0{,}5,\ \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(1{,}2,\ \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1{,}2,\ \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(1{,}2,\ \{3\}) = 3{,}5$	$\mathbf{c}(1{,}2,\ \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(1{,}2,\ \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(1{,}3,\ \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1{,}3,\ \{2\}) = 1{,}5$	$\mathbf{c}(1{,}3,\ \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(1{,}3,\{4\}) = 6$	$\mathbf{c}(1{,}3,\ \{5\}) = 3{,}5$
$\mathbf{c}(1{,}4,\ \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1{,}4,\ \{2\}) = 1$	$\mathbf{c}(1{,}4,\ \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(1{,}4,\ \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(1{,}4,\ \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(1{,}5,\ \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1{,}5,\ \{2\}) = 0{,}5$	$\mathbf{c}(1{,}5,\ \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(1{,}5,\ \{4\}) = 8$	$\mathbf{c}(1{,}5,\ \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(2{,}1,\ \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(2{,}1,\ \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2{,}1,\ \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(2{,}1,\ \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(2{,}1,\ \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(2{,}3,\ \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(2{,}3,\ \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2{,}3,\ \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(2{,}3,\ \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(2{,}3,\ \{5\}) = 4$
$\mathbf{c}(2{,}4,\ \{1\}) = 6$	$\mathbf{c}(2{,}4,\ \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2{,}4,\ \{3\}) = 9$	$\mathbf{c}(2{,}4,\ \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(2{,}4,\ \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(2{,}5,\ \{1\}) = 5$	$\mathbf{c}(2{,}5,\ \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2{,}5,\ \{3\}) = 8$	$\mathbf{c}(2{,}5,\ \{4\}) = 6$	$\mathbf{c}(2{,}5,\ \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(3{,}1,\ \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(3{,}1,\ \{2\}) = 2$	$\mathbf{c}(3{,}1,\ \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3{,}1,\ \{4\}) = 4$	$\mathbf{c}(3{,}1,\ \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(3{,}2,\ \{1\}) = 3$	$\mathbf{c}(3{,}2,\ \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(3{,}2,\ \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3{,}2,\ \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(3{,}2,\ \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(3{,}4,\ \{1\}) = 6$	$\mathbf{c}(3{,}4,\ \{2\}) = 5$	$\mathbf{c}(3{,}4,\ \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3{,}4,\ \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(3{,}4,\ \{5\}) = 8$
$\mathbf{c}(3{,}5,\ \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(3{,}5,\ \{2\}) = 4$	$\mathbf{c}(3{,}5,\ \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3{,}5,\ \{4\}) = 8$	$\mathbf{c}(3{,}5,\ \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(4{,}1,\ \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(4{,}1,\ \{2\}) = 2$	$\mathbf{c}(4{,}1,\ \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(4{,}1,\ \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4{,}1,\ \{5\}) = 4$
$\mathbf{c}(4{,}2,\ \{1\}) = 3$	$\mathbf{c}(4{,}2,\ \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(4{,}2,\ \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(4{,}2,\ \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4{,}2,\ \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(4{,}3,\ \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(4{,}3,\ \{2\}) = 1{,}5$	$\mathbf{c}(4{,}3,\ \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(4{,}3,\ \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4{,}3,\ \{5\}) = 3{,}5$
$\mathbf{c}(4{,}5,\ \{1\}) = 5$	$\mathbf{c}(4{,}5,\ \{2\}) = 0{,}5$	$\mathbf{c}(4{,}5,\ \{3\}) = 8$	$\mathbf{c}(4{,}5,\ \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4{,}5,\ \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(5{,}1,\ \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(5{,}1,\ \{2\}) = 2$	$\mathbf{c}(5{,}1,\ \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(5{,}1,\ \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(5{,}1,\ \{5\}) = 0$
$\mathbf{c}(5{,}2,\ \{1\}) = 3$	$\mathbf{c}(5{,}2,\ \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(5{,}2,\ \{3\}) = 3{,}5$	$\mathbf{c}(5{,}2,\ \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(5{,}2,\ \{5\}) = 0$
$\mathbf{c}(5{,}3,\ \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(5{,}3,\ \{2\}) = 2{,}5$	$\mathbf{c}(5{,}3,\ \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(5{,}3,\ \{4\}) = 6$	$\mathbf{c}(5{,}3,\ \{5\}) = 0$
$\mathbf{c}(5{,}4,\ \{1\}) = 6$	$\mathbf{c}(5{,}4,\ \{2\}) = 4$	$\mathbf{c}(5{,}4,\ \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(5{,}4,\ \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(5{,}4,\ \{5\}) = 0$

Для получения всевозможных значений $\mathbf{c}(i, j, K)$ используем естественное "аддитивное" правило: $\mathbf{c}(i, j, K) = \sum\limits_{s \in K} \mathbf{c}(i, j, \{s\})$, при $K \in \mathfrak{N}$, $i \in \overline{0, 5} \setminus K, j \in K$.

Итак, вычислитель Π_1 начинает свою работу на первом этапе $I_1^{(1)}$, при $L_1 = \overline{2, 5}$ формирует следующие значения функции (54), используя (48):

$$\mathcal{W}_1[2,5](4, \{5\}) = \mathbf{c}(4,5, \{5\}) + \mathbf{f}(5) = 6;$$

$$\mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](5, \{4\}) = \mathbf{c}(5,4, \{4\}) + \mathbf{f}(4) = 7;$$

$$\mathcal{W}_1[\overline{2, 5}(4, \{3\}) = \mathbf{c}(4,3, \{3\}) + \mathbf{f}(3) = 5;$$

$$\mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{4\}) = \mathbf{c}(2,4, \{4\}) + \mathbf{f}(4) = 7.$$

Начинается этап $I_2^{(1)}$, на котором Π_1 по предложению 6.3 насчитывает массив значений функции (53):

$$\mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{4, 5}) = \min_{h \in \mathbf{I}(\overline{4,5})} [\mathbf{c}(2, h, \overline{4, 5}) + $$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \overline{4, 5} \setminus \{h\})] =$$
$$= \min[\mathbf{c}(2, 4, \overline{4, 5}) + \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{5\});$$

$$\mathbf{c}(2, 5, \overline{4, 5}) + \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](5, \{4\})] =$$
$$= \min[12 + 6; 12 + 7] = 18;$$

$$\mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \{2; 4\}) =$$
$$= \mathbf{c}(5, 2, \{2; 4\}) + \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{4\}) = 8 + 7 = 15;$$

$$\mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \{2; 4\}) = \mathbf{c}(3, 2, \{2; 4\}) +$$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{4\}) = 8 + 7 = 15;$$

$$\mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \overline{4, 5}) = \min[\mathbf{c}(3, 4, \overline{4, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{5\}); \mathbf{c}(3, 5, \overline{4, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](5, \{4\})] = \min[15 + 6; 14 + 7] = 21;$$

$$\mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \overline{3, 4}) = \min[\mathbf{c}(5, 3, \overline{3, 4}) +$$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](3, \{4\}); \mathbf{c}(5, 4, \overline{3, 4}) +$$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{3\})] = \min[11 + 7; 11 + 5] = 16;$$

$$\mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 4}) = \min[\mathbf{c}(2, 3, \overline{3, 4}) +$$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](3, \{4\}); \mathbf{c}(2, 4, \overline{3, 4}) +$$
$$+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{3\})] = \min[10 + 7;16 + 5] = 17.$$

На этом же этапе начинает свою работу вычислитель Π_2 и при $L_2 = \{1\} \cup \overline{3, 5}$ формирует значения функции (54):

$\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](5, \{3\}) = 5$; $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](3, \{5\}) = 6$; $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](1, \{3\}) = 5$; $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](3, \{4\}) = 7$.

Значения $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](4, \{5\})$, $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](5, \{4\})$, $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](4, \{3\})$, $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}]$ $(2, \{4\})$, вычислитель Π_2 получает от Π_1 (на самом деле, эти значения фактически считываются в виде коэффициентов матрицы затрат (см. (46))). Начинается этап $I_3^{(1)}$, на котором Π_1 насчитывает массив значений функции (55):

$$\mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 5}) = \min[\mathbf{c}(2, 3, \overline{3, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \overline{4, 5}); \mathbf{c}(2,5, \overline{3, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \overline{3, 4})] = \min[14 + 21; 20 + 16] =$$
$$= \min[35; 36] = 35;$$

$$\mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](3, \{2\} \cup \overline{4, 5}) = \min[\mathbf{c}(3, 2, \{2\} \cup \overline{4, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{4, 5}); \mathbf{c}(3,5, \{2\} \cup \overline{4, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \{2; 4\})] = \min[13 + 17; 18 + 15] =$$
$$= \min[30; 33] = 30;$$

$$\mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](5, \overline{2, 4}) = \min[\mathbf{c}(5, 2, \overline{2, 4}) +$$
$$+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 4}); \mathbf{c}(5, 3, \overline{2, 4}) +$$
$$+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \{2; 4\})] = \min[11{,}5 + 17; 13{,}5 + 15] =$$
$$= \min[28{,}5; 28{,}5] = 28{,}5.$$

На этом же этапе вычислитель Π_2 насчитывает значения функции (56):

$$\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](1, \{3; 5\}) = 14;$$
$$\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](5, \{1; 3\}) = 10;$$
$$\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](1, \overline{3, 4}) = 16;$$
$$\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](4, \{1; 3\}) = 10.$$

Остальные значения, а именно $\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}]$ $(5, \overline{3, 4})$ и $\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}]$ $(3, \overline{4, 5})$, Π_2 получает от Π_1. В свою очередь, "включившийся" в работу вычислитель Π_3 к концу этапа $I_3^{(1)}$ располагает функциями (57), значения которых уже были получены ранее Π_1 и Π_2. Таким образом, к концу этапа $I_3^{(1)}$ мы располагаем значениями всей функции v_1 и частично насчитанными значениями функций v_2 и v_3.

На этапе $I_4^{(1)}$ вычислитель Π_1 завершает работу подсчетом значения:

$$\mathcal{W}_4[\overline{2, 5}](1, \overline{2, 5}) = \min[\mathbf{c}(1, 2, \overline{2, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 5}); \mathbf{c}(1, 3, \overline{2, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](3, \{2\} \cup \overline{4, 5}); \mathbf{c}(1, 5, \overline{2, 5}) +$$
$$+ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](5, \overline{2, 4})] =$$
$$= \min[16{,}5 + 35; 16 + 30; 17{,}5 + 28{,}5] =$$
$$= \min[51{,}5; 46; 46] = 46.$$

Вычислитель Π_2 к концу этапа $I_4^{(1)}$ располагает значениями:

$$\mathcal{W}_3[\{1\} \cup \overline{3,5}\,](1,\ \overline{3,5}\,) = 33;$$

$$\mathcal{W}_3[\{1\} \cup \overline{3,5}\,](4,\ \{1;\ 3;\ 5\}) = 23;$$

$$\mathcal{W}_3[\{1\} \cup \overline{3,5}\,](5,\ \{1\} \cup \overline{3,4}\,) = 24.$$

В свою очередь, Π_3 располагает значениями функций $\mathcal{W}_2[\,\overline{1,4}\,](3,\ \{2;\ 4\})$, $\mathcal{W}_2[\,\overline{1,4}\,](2,\ \overline{3,4}\,)$, которые были насчитаны ранее Π_1, и значениями $\mathcal{W}_2[\,\overline{1,4}\,](1,\ \overline{3,4}\,)$, $\mathcal{W}_2[\,\overline{1,4}\,](4,\ \{1;\ 3\})$, насчитанными ранее Π_2. Таким образом, к концу этапа $I_4^{(1)}$ построена функция v_2.

На этапе $I_5^{(1)}$ вычислитель Π_2 завершает работу расчетом значения $\mathcal{W}_4[\{1\} \cup \overline{3,5}\,](2,\ \{1\} \cup \overline{3,5}\,) = 41$. В свою очередь, Π_3 к концу этапа располагает значениями $\mathcal{W}_3[\,\overline{1,4}\,](1,\ \overline{2,4}\,) = 27{,}5$; $\mathcal{W}_3[\,\overline{1,4}\,](2,\ \{1\} \cup \cup\ \overline{3,4}\,) = 24$.

Таким образом, к концу этапа $I_5^{(1)}$ построена функция v_3.

На последнем, завершающем этапе $I_6^{(1)}$ завершает работу вычислитель Π_3, реализуя $\mathcal{W}_4[\,\overline{1,4}\,](5,\ \overline{1,4}\,) = 37{,}5$. К концу данного этапа получаем функцию v_4.

Теперь можно приступить к вычислению глобального экстремума V:

$$V(0,\ \overline{1,5}\,) = \min[\mathbf{c}(0,\ 1,\ \overline{1,5}\,) + v_4(1,\ \overline{2,5}\,);$$
$$\mathbf{c}(0,\ 2,\ \overline{1,5}\,) + v_4(2,\ \{1\} \cup \overline{3,5}\,);$$
$$\mathbf{c}(0,\ 5,\ \overline{1,5}\,) + v_4(5,\ \overline{1,4}\,)] = \min[12 + 46;\ 15{,}5 + 41;$$
$$11{,}8 + 37{,}5\ ] = \min[58;\ 56{,}5;\ 49{,}3] = 49{,}3.$$

Соответствующий данному экстремуму маршрут (построение оптимального маршрута приводится в разделе 4) имеет вид: $0 \to 5 \to 1 \to 3 \to 2 \to 4$.

Для иллюстрации вышеупомянутой процедуры с элементами распараллеливания были проведены вычисления (использовался программный комплекс, разработанный на платформе .Net с использованием языка C#) на основе ДП без распараллеливания [15]. Упомянутый вариант ДП был реализован в виде программного комплекса на компьютере Notebook Lenovo с процессором Core i5-2410M с частотой 2,3 GHz, объемом оперативной памяти 3,0 ГБ с установленной 32-разрядной операционной системой Windows 7 Professional, что позволило найти оптимальное решение основной задачи при $N = 30$ с 27 адресными парами. В данном случае (при $N = 5$) вариант без распараллеливания использован для подтверждения правильности модельного примера: в обоих случаях результаты расчета ($V = 49{,}3$, маршрут $0 \to 5 \to 1 \to 3 \to 2 \to 4$) совпадают.

Заключение

Для решения задачи маршрутизации с ограничениями и функциями стоимости, зависящими от списка заданий, построена гипотетическая схема независимых вычислений для реализации параллельной процедуры построения функции Беллмана. Излагаемая схема может применяться при решении инженерной задачи о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации.

Список литературы

1. **Ташлыков О. Л.** Методы оценки и снижения дозовых нагрузок при ремонте АЭС: учеб. пособие. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 118 с.
2. **Коробкин В. В., Сесекин А. Н., Ташлыков О. Л., Ченцов А. Г.** Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / Под общ. ред. член-корр. РАН И. А. Каляева. М.: Новые технологии, 2012. 234 с.
3. **Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х.** Задача коммивояжера. I. Вопросы теории; II. Точные алгоритмы; III. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3—34; № 10. С. 3—29; № 11. С. 3—26.
4. **Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.** Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1 (Вып. 1). С. 94—107.
5. **Gutin G., Punnen A.P.** The Traveling Salesman Problem and Its Variations. Kluwer, 2002. 830 p.
6. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сборник. Т. 9. М.: Мир, 1964. С. 219—228.
7. **Хелд М., Карп Р. М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернет. сборник. Т. 9. М.: Мир, 1964. С. 202—218.
8. **Ченцов А. Г.** К вопросу о маршрутизации комплекса работ // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2013. № 1. С. 59—82.
9. **Ченцов А. Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 240 с.
10. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
11. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
12. **Сесекин А. Н., Ченцов А. А., Ченцов А. Г.** Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. — № 2. С. 68—77.
13. **Ченцов А. Г.** Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестник ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. № 18, вып. 12. С. 53—76.
14. **Ченцов А. Г.** Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // АиТ. 2012. № 3. С. 134—149.
15. **Кошелева М. С., Ченцов А. Г.** Одна задача маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. XV Междунар. конф. Самара: Самар. НЦ РАН. 2013. С. 523—532.

Dynamic Programming in the Precedence Constrained TSP with the Costs Depending on a List of Tasks

A. G. Chentsov, chentsov@imm.uran.ru, **M. S. Kosheleva,** kosheleva.ms@gmail.com,
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, RAS,
Ural Federal University, Yekaterinburg, 620990, Russian Federation

Received on September 04, 2014

A scheme of independent calculations of the Bellman function for the Precedence Constrained TSP, in which the cost depends on the list of pending jobs was constructed. The authors use a version of the dynamic programming method to solve a routing problem with the precedence constraints; this method makes use of an extension for the initial problem, which is based on a transformation of the precedence constraints into a special "deletion" rule (for tasks from the "current" list). At the stage of construction of the Bellman function, the whole array of its values is not used.In order to parallelize the computation procedure of the above mentioned function, they propose to distribute the task lists,which are realized at the penultimate stage of the procedure between different cores.In the construction of individual threads of the computational scheme, the authors use discrete dynamical systems,which build the sets,which may look similar to the reachability sets in the optimal control theory; the latter sets are employed in construction of the layers of space of position.The layers of the Bellman function, which are constructed in threads, are defined as restrictions of the latter onto the respective layers of the space of position. The statement of the problem and the solution methods are focused on a real-life problem of dismantling of a decommissioned nuclear power unit.

Keywords: *Dynamic programming, route, precedence constraints, essential list (of tasks), layers of space of position, independent computations, Bellman function*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects no. 13-08-00-643-a, no. 14-08-00419.

For citation:

Chentsov A. G., Kosheleva M. S. Dynamic Programming in the Precedence Constrained TSP with the Costs Depending on a List of Tasks, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 232—244.*

DOI: 10.17587/mau.16.232-244

References

1. **Tashlykov O. L.** *Metody otsenki i snizheniya dozovykh nagruzok pri remonte AES* (Methods for Estimating and Reducing Dosimetric Costs during the NPP Repair), Ekaterinburg: Tutorial, USTU, 2009. 118 p. (in Russian).
2. **Korobkin V. V., Sesekin A. N., Tashlykov O. L., Chentsov A. G.** *Metody marshrutizacii i ih prilozhenija v zadachah povyshenija bezopasnosti i jeffektivnosti jekspluatacii atomnyh stancij* (Methods of Routing and Their Applications to Problems of Increasing Safety and Efficiency of Nuclear Power Plants). M.: Novye tehnologii, 2012. 234 p. (in Russian).
3. **Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh.** *Zadacha kommivojazhera: I. Voprosy teorii; II. Tochnye metody; III. Priblizhennye algoritmy* (The traveling salesman problem: I. Problems of the theory; II. Exact algorithms; III. Approximation algorithms). Avtomatika i Telemehanika (Automation and Remote Control), 1989, I: no. 9, pp. 3—34 (in Russian) (50:9, 1147—1173); II: no. 10, pp. 3—29 (in Russian) (50:10, 1303—1324); III: no. 11, pp. 3—26 (in Russian) (50:11, 1459—1479).
4. **Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C.** *Algoritm dlya resheniya zadachi o kommivoyazhere* (An algorithm for the traveling salesman problem), Operations Research, 1963, vol. 11, pp. 972—989. (Ekonomika i Matem. Metody, 1965, vol. 1 (1), pp. 90—107 (in Russian)).
5. **Gutin G., Punnen A. P.** *Zadacha kommivoyazhora i ee varianty* (The Traveling Salesman Problem and Its Variations), Kluwer, 2002. 830 p.
6. **Bellman R.** *Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya к zadache o kommivoyazhere* (Dynamic Programming Treatment of the Traveling Salesman Problem), J. ACM, 1962, vol. 9, pp. 61—63 (Kibern. Sborn., 1964, vol. 9, pp. 219—228 (in Russian)).
7. **Held M., Karp R. M.** *Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya к zadacham uporyadocheniya* (A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems), J. Soc. Indust. Appl. Math., 1962, vol. 10, pp. 196—210 {Kibern. Shorn., 1964, vol. 9, pp. 202—218 (in Russian)).
8. **Chentsov A. G.** K *voprosu o marshrutizacii kompleksov rabot* (To question of routing of works complexes), Vestn. Udm. Univ., Ser. Matematika. Mehanika. Komp. Nauki., 2013, no 1, pp. 59—82 (in Russian).
9. **Chentsov A. G.** *Ekstremal"nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Izhevsk, Institute of Computer Science, 2008, 240 p. (in Russian).
10. **Warga J.** *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow, Nauka, 1977, 624 p. (in Russian).
11. **Dieudonne J.** *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow, Mir, 1964,. 430 p. (in Russian).
12. **Sesekin A. N., Chentsov A. A., Chentsov A. G.** *Obobshhennaja zadacha kur'era s funkciej zatrat, zavisjashhej ot spiska zadanij* (Generalized problem with the courier cost function that depends on the job list), *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2010, no 2, pp. 68—77 (in Russian).
13. **Chentsov A. G.** *Odna parallel'naja procedure, postroenija funkcii Bellmana v obobshhennoj zadache kur'era s vnutrennimi rabotami* (One parallel procedure for the construction of the Bellman function in the generalized problem of the courier with the inner workings), Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., 2012, no 18 (12), pp. 53—76 (in Russian).
14. **Chentsov A. G.** *Odna parallel'naja procedura postroenija funkcii Bellmana v obobshhennoj zadache kur'era s vnutrennimi rabotami* (One parallel procedure for the construction of the Bellman function in the generalized problem of the courier with the inner workings), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2012, no 3, pp. 134—149 (in Russian).
15. **Kosheleva M. S., Chentsov A. G.** *Odna zadacha marshrutizacii s ogranichenijami v vide uslovij predshestvovanija* (A Route Problem Of Displacement Under Constraints In The Form Of Preceding Conditions), *Problemy Upravlenija i Modelirovanija v Slozhnyh Sistemah:* Tr. XV Mezhdunar. Konf, Samara, Samar. NC RAN, 2013, P. 523—532 (in Russian).

Corresponding author:

Chentsov Alexandr G., D.Sc., Corresponding Member of RAS, Professor, Senior Researcher Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620990, Russian Federation, e-mail: chentsov@imm.uran.ru, +7 (343) 375-34-57