

for aircrafts), *Izvestija JuFU. Tehnicheskie Nauki*, 2010, no 3 (104), pp. 187—196 (in Russian).

13. Pshihopov V. H., Fedotov A. A., Mcdvedev M. Ju., Medvedeva T. N., Gurenko B. V. *Pozicionno-traektorijaja sistema prjamogo adaptivnogo upravlenija morskimi podvizhnymi ob'ektami* (Position-path system of the direct adaptive control for marine vehicles), *Inzhenernyj Vestnik Dona*, 2014, no 3 (in Russian).

14. Rutkovskij V. Ju., Glumov V. M., Suhanov V. M. *Fizicheski realizuemyj algoritm adaptivnogo upravlenija s jetalonnnoj model'ju* (Physically realizable algorithm of the adaptive control with reference model), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2011, no 8, pp. 96—108 (in Russian).

15. Zemljakov S. D., Rutkovskij V. Ju. *Algoritm funkcionirovanij a adaptivnoj sistemy s jetalonnnoj model'ju, garantirujushhij zadannuju dinamicheskiju tochnost' upravlenija nestacionarnym dinamicheskim ob'ektom v uslovijah neo-predelennosti* (Algorithm of the adaptive sys-

tem with reference model, ensuring given dynamic error for non-stationary dynamic object with uncertainty), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2009, no 10, pp. 35—44 (in Russian).

16. Glumov V. M., Zemljakov S. D., Rutkovskij V. Ju., Suhanov V. M. *Primenenie principa postroenija adaptivnyh sistem s jetalonnnoj model'ju k zadacham monitoringa tekushhego sostojanija transmissionnyh valov* (Application of the adaptive systems with reference model theory for monitoring of transmission shafts state), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2003, no 5, pp. 131—146 (in Russian).

Corresponding autor:

Pshihopov Vyatcheslav Kh., Head of Department, Professor, Dr. Sci. Tech., Southern Federal University, 347928, Taganrog, Russian Federation, e-mail: pshichop@rambler.ru

УДК 517.72

В. Г. Козырев, канд. техн. наук, доц., vldr.kzrv@yandex.ru,
Севастопольский государственный университет

Асимптотическое разложение закона терминального управления выходом разнотемповых систем

Получено рациональное по форме асимптотическое разложение закона терминального управления выходом разнотемповых систем в форме синтеза. Использование пограничных функций делает его равномерным на отрезке времени управления. Для разложения доказаны усиленные оценки точности.

Ключевые слова: терминальное управление, разнотемповая динамика, малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотическое приближение, метод пограничного слоя

Введение

Многие современные технологии связаны с необходимостью приведения движущихся объектов в заданное положение за конечный промежуток времени. Такая проблема возникает, например, в задачах автоматической посадки самолета, позиционирования исполнительного органа технологической установки, перемещения мобильного робота в заданную точку на местности и т. п. Последовательность физических воздействий, подаваемых на объект для достижения указанной цели, принято называть терминальным управлением.

Разработка законов терминального управления осуществляется в основном с помощью методов оптимального управления. Критерий оптимальности содержит в этом случае специальный, терминальный, член, выражающий штраф за промах, т. е. за отклонение конечного положения объекта от заданного, либо на правый конец траектории накладываются ограничения. При использовании квадратичного критерия и линейной математической модели объекта решение удается довести до получения замкнутого закона управления — в форме обратной связи. Данному подходу посвящено множество работ, представленных в обзоре [1].

Математическое решение терминальной задачи не означает, однако, успешного завершения разработки закона управления. Одной из причин возможных затруднений может послужить особый характер

динамики, встречающийся у многих движущихся объектов. Он состоит в наличии у них медленных поступательных и быстрых вращательных собственных движений. Такая разнотемповость, разномасштабность процессов по времени усложняет численное решение задачи. Когда постоянные времени движений разнесены, приходится вычислять с малым шагом интегрирования быстропеременные составляющие движений на больших временных интервалах и оперировать при этом плохо обусловленными матрицами. Указанная особенность известна под названием жесткости систем.

Несмотря на принципиальный характер возникающих затруднений, фактор разнотемповости может быть обращен, тем не менее, на пользу исследованиям. Это удастся сделать, если попытаться применить асимптотические методы. Они позволяют составлять приближенные уравнения, которыми описываются быстрые и медленные составляющие по отдельности. Эти уравнения можно считать на компьютере — каждое в своем масштабе времени [1, 2]. В результате не только устраняются трудности моделирования, связанные с жесткостью систем, но и упрощаются сами модели систем. Данное положение относится и к законам управления разнотемповыми объектами: законы становятся проще, если разделить их на быстрые и медленные компоненты.

Свойство разнотемповости математически моделируется путем введения малого множителя при части производных уравнений системы. Те перемен-

ные, при производных которых находится малый параметр, являются "быстрыми", остальные — "медленными". Такой подход носит название теории сингулярных возмущений [2]. Он позволяет строить асимптотические приближения решений при стремлении малого параметра к нулю, являющиеся упрощением точных решений, и осуществлять разбиение (декомпозицию) решения на быстрые и медленные компоненты. В данной работе с помощью рассматриваемого подхода строятся асимптотические приближения процессов терминального управления для линейно-квадратичной задачи.

Постановка задачи

Задача асимптотической декомпозиции решается здесь для управляемой системы с быстрыми и медленными движениями, описываемой с помощью линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A_1 y + A_2 z + B_1 u, y|_{t=0} = y^0; \\ \lambda \frac{dz}{dt} &= A_3 y + A_4 z + B_2 u, z|_{t=0} = z^0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda > 0$ — малый параметр. В этих уравнениях y — "медленная" переменная, z — "быстрая". В самом деле, при $\lambda \rightarrow 0$ производная функции z будет большой: $dz/dt = (1/\lambda)F(y, z, u, t) = O(1/\lambda)$ (вне λ -окрестности тех точек фазового пространства, в которых $A_3 y + A_4 z + B_2 u = 0$). Значит, переменная z изменяется быстро.

Уравнения (1) заданы на фиксированном отрезке времени $0 \leq t \leq t_f$; $y \in E^n$, $z \in E^m$, $x = \text{col}[y, z] \in E^{n+m}$ — вектор состояния; $u \in E^r$ — вектор управления. Матрицы $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{1, 4}$) и $B_j = B_j(t)$ ($j = \overline{1, 2}$) предполагаются непрерывными на $[0, t_f]$.

Параметр λ в уравнениях вида (1) принято называть сингулярным, а содержащий его член $\lambda dz/dt$ — сингулярным возмущением [2]. Данное определение связано с тем, что, хотя этот член и является малым в определенном смысле, он вызывает существенное изменение решения.

Для сингулярно возмущенной системы (1) рассматривается задача нахождения оптимального управления $u = u(t)$, сводящего к минимуму квадратичный функционал

$$\begin{aligned} I[u(t)] &= (X^T F X)|_{t=t_f} + \\ &+ \int_0^{t_f} x^T \begin{bmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^T(t) & Q_3(t) \end{bmatrix} x + u^T R(t) u \, dt, \end{aligned} \quad (2)$$

где $X = Hx$ — выход системы; $H = [H_y \ H_z]$ — постоянная матрица с блоками размером $H_y - q \times n$, $H_z - q \times m$; F — постоянная положительно определенная матрица $q \times q$ ($F > 0$); $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$ — не-

отрицательно ($Q(t) \geq 0$), R — положительно ($R(t) > 0$) определенные на $[0, t_f]$ матрицы; $Q_1 - (n \times n)$ -мерный, $Q_3 - (m \times m)$ -мерный блоки.

Оптимальное управление $u = u(t)$ для задачи (1), (2) существует и имеет известный вид [3]:

$$u = -R^{-1} B^T K x, \quad (3)$$

где $K = K(t) - (n + m) \times (n + m)$ — матрица, являющаяся решением матричного дифференциального уравнения Риккати с условием на правом конце:

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A^T K + KSK - Q, K|_{t=t_f} = \Phi. \quad (4)$$

Здесь $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \lambda^{-1} A_3 & \lambda^{-1} A_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \lambda^{-1} B_2 \end{bmatrix}$, $S = BR^{-1}B^T =$

$$= \begin{bmatrix} S_1 & \lambda^{-1} S_2 \\ \lambda^{-1} S_2^T & \lambda^{-2} S_3 \end{bmatrix}, S_1 = B_1 R^{-1} B_1^T, S_2 = B_1 R^{-1} B_2^T,$$

$$S_3 = B_2 R^{-1} B_2^T, \Phi = H^T F H.$$

При блочной записи

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & \lambda K_2 \\ \lambda K_2^T & \lambda K_3 \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^T & \Phi_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

уравнение (4) преобразуется к трем уравнениям с условиями на правом конце:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= -K_1 A_1 - A_1^T K_1 - K_2 A_3 - A_3^T K_2^T + \\ &+ K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2^T + K_2 S_2^T K_1 + K_2 S_3 K_2^T - Q_1; \\ \lambda \frac{dK_2}{dt} &= -K_1 A_2 - K_2 A_4 - \lambda A_1^T K_2 - A_3^T K_3 + \\ &+ \lambda K_1 S_1 K_2 + K_1 S_2 K_3 + \lambda K_2 S_2^T K_2 + K_2 S_3 K_3 - Q_2; \\ \lambda \frac{dK_3}{dt} &= -\lambda K_2^T A_2 - \lambda A_2^T K_2 - K_3 A_4 - A_4^T K_3 + \\ &+ \lambda^2 K_2^T S_1 K_2 + \lambda K_2^T S_2 K_3 + \lambda K_3 S_2^T K_2 + K_3 S_3 K_3 - Q_3; \end{aligned} \quad (6)$$

$$K_1|_{t=t_f} = \Phi_1, K_2|_{t=t_f} = \frac{1}{\lambda} \Phi_2, K_3|_{t=t_f} = \frac{1}{\lambda} \Phi_3. \quad (7)$$

Система матричных дифференциальных уравнений (6) с условиями (7) является сингулярно возмущенной при малом λ . Ее решение определяет матрицу обратной связи в формуле оптимального регулятора (3). Мы видим, что регулятор обладает тем же свойством разнотемповости, что и объект управления (1). В случае регулятора, однако, разнотемповость становится наиболее проблемным свойством:

1) матричные уравнения (6) имеют порядок, многократно превосходящий порядок исходных векторных уравнений объекта (1);

2) цифровая реализация матричного регулятора с быстро и медленно изменяющимися коэффициентами в реальном времени требует значительных затрат времени и ресурсов бортового компьютера ввиду необходимости частой дискретизации многокомпонентных процессов по времени из-за наличия быстрых составляющих в законе управления;

3) конечные (при $t = t_f$) условия (7) системы (6) неограниченно возрастают при $\lambda \rightarrow 0$. Это создает дополнительные трудности численного интегрирования системы (6).

Особенности задачи (6), (7) затрудняют построение терминального регулятора в форме (3). Поэтому целесообразна его декомпозиция и асимптотическое упрощение. В данной статье строится асимптотическое разложение матрицы Риккати K (5) по степеням малого параметра λ , которое после подстановки в формулу (3) дает асимптотическое приближение всего регулятора и устраняет перечисленные трудности.

Аналогичная задача впервые была рассмотрена в работах [4, 5], но для частного случая матрицы Φ , при котором конечные условия (7) были ограниченными по параметру λ . Мы рассматриваем задачу при произвольных, в том числе неограниченных условиях (7) при $\lambda \rightarrow 0$. Асимптотика решения уравнений (6) с неограниченно большими условиями (7) получена в работе [6]. Однако в этой работе рассмотрен регулятор состояния, соответствующий единичной матрице $H = I$ и, значит, положительно определенной терминальной матрице $\Phi = H^T F H$. Нами рассматривается общий случай регулятора выхода, при котором матрица Φ может быть неотрицательно определенной, а H , соответственно, прямоугольной. Для этого случая выражения из работы [6] для представления регулятора непригодны.

Композиционное представление матрицы Риккати

Как и в работе [6], матрица K не может быть разложена в асимптотический ряд по степеням λ . Для построения ее асимптотики нами используется специальная мультипликативная декомпозиция этой матрицы на три более простые матрицы. Это представление K служит обобщением соответствующего представления из работы [6] на случай регулятора выхода, и оно имеет вид [7]

$$K = P + W^T(M + F^{-1})^{-1}W, \quad (8)$$

где матрицы $P - (n + m) \times (n + m)$, $W - q \times (n + m)$ и $M - q \times q$ определяются из уравнений

$$\frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PSP - Q, \quad P|_{t=t_f} = 0;$$

$$\frac{dW}{dt} = -W(A - SP), \quad W|_{t=t_f} = H;$$

$$\frac{dM}{dt} = -WS(t)W^T, \quad M|_{t=t_f} = 0.$$

$$\text{Блоки матрицы } P: P = \begin{bmatrix} P_1 & \lambda P_2 \\ \lambda P_2^T & \lambda P_3 \end{bmatrix}, \quad P_1 - n \times n,$$

$P_3 - m \times m$, удовлетворяют уравнениям вида (6), но с нулевыми конечными условиями

$$P_1|_{t=t_f} = 0, \quad P_2|_{t=t_f} = 0, \quad P_3|_{t=t_f} = 0,$$

а для блоков $W = [W_y \quad \lambda W_z]$, $W_y - q \times n$, $W_z - q \times m$, и матрицы M имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dW_y}{dt} &= -W_y(A_1 - S_1 P_1 - S_2 P_2^T) - \\ &- W_z(A_3 - S_2^T P_1 - S_3 P_2^T), \quad W_y|_{t=t_f} = H_y; \\ \lambda \frac{dW_z}{dt} &= -W_y(A_2 - \lambda S_1 P_2 - S_2 P_3) - \\ &- W_z(A_4 - \lambda S_2^T P_2 - S_3 P_3), \quad W_z|_{t=t_f} = \lambda^{-1} H_z; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= -W_y S_1 W_y^T - W_y S_2 W_z^T - \\ &- W_z S_2^T W_y^T - W_z S_3 W_z^T, \quad M|_{t=t_f} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Асимптотика компонент матрицы Риккати

Пусть теперь:

I. Все матрицы $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{1, 4}$), $B_j = B_j(t)$ ($j = 1, 2$), $Q = Q(t)$, $R = R(t)$ $p + 2$ раза непрерывно дифференцируемы на $[0, t_f]$ (p — некоторое натуральное число: $p = 0, 1, 2, \dots$);

II. Пара матриц (A_4, B_2) по терминологии работ [4, 5] управляема в пограничном слое, т. е. $\text{rank}[B_2, A_4 B_2, \dots, A_4^{m-1} B_2] = m$ на $[0, t_f]$;

III. Пара матриц (A_4, C) наблюдаема в пограничном слое [4, 5], т. е. $\text{rank}[C^T, A_4^T C^T, \dots, (A_4^T)^{m-1} C^T] = m$ на $[0, t_f]$, где $C_* = C_*(t)$ — решение уравнения $C_*^T C_* = Q_3$.

Если $Q_3 = Q_3(t) \equiv 0$ или $B_2 = B_2(t) \equiv 0$, то вместо условий II и III нужно потребовать, чтобы матрица $A_4(t)$ была гурвицевой на $[0, t_f]$, т. е. имела собственные числа с отрицательными действительными частями при всех $t \in [0, t_f]$.

Опираясь на условия I—III и результаты работы [7], запишем асимптотику решений уравнений (6) для случая P_i и уравнений (9), (10) для $W_{y,z}$, M . Она имеет вид следующих разложений по степеням λ :

$$\tilde{P}_i(t, \lambda) = \sum_{k=0}^p \lambda^k [P_{ik}(t) + \Pi_k P_i(\tau)] \quad (i = \overline{1, 3}); \quad (11)$$

$$\tilde{W}_y(t, \lambda) = \sum_{k=0}^p \lambda^k [W_{yk}(t) + \Pi_k W_y(\tau)]; \quad (12)$$

$$\tilde{W}_z(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \Pi_{-1} W_z(\tau) + \sum_{k=0}^p \lambda^k [W_{zk}(t) + \Pi_k W_z(\tau)];$$

$$\tilde{M}(t, \lambda) = \sum_{k=-1}^p \lambda^k [M_k(t) + \Pi_k M(\tau)], \quad (13)$$

где $\tau = (t - t_f)/\lambda$ — так называемое растянутое, или "быстрое", время, а функции от t и τ — коэффициенты разложений $P_{ik}(t)$, $\Pi_k P_i(\tau)$, $W_{y,zk}(t)$, $\Pi_k W_{y,z}(\tau)$, $\Pi_{-1} W_z(\tau)$, $M_k(t)$, $\Pi_k M(\tau)$ — определяются ниже как решения соответствующих уравнений.

Выражения (11)—(13) являются асимптотически приближениями матриц P_i , $W_{y,z}$, M . Ошибки приближений составляют величину порядка $\lambda^{p+1} O(1)$, где $\|O(1)\| \leq c$ для всех достаточно малых λ и всех $t \in [0, t_f]$, $c > 0$ — некоторая постоянная [7]. Пограничные функции вида $\Pi_k f(\tau)$ ($i = \overline{1, 3}$; $k = 0, 1, \dots, p$) мажорируются убывающими экспонентами [7]:

$$\|\Pi_k f(\tau)\| \leq c \exp(\kappa \tau), \quad \tau \leq 0,$$

где $\kappa > 0$ — некоторая константа.

Для получения коэффициентов разложений (11)—(13) используется известный алгоритм [2]. Он заключается в подстановке (11) в уравнения (6), записанные для P_i , а (12), (13) — в (9), (10) вместо P_i , $W_{y,z}$, M и в приравнении коэффициентов при одинаковых степенях λ в обеих частях уравнений. При этом отдельно приравниваются коэффициенты, зависящие от t , и отдельно — зависящие от τ . Это и дает уравнения для определения коэффициентов. В частности, в нулевом приближении эти уравнения имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{dP_{10}}{dt} &= -P_{10}A_1 - A_1^T P_{10} - P_{20}A_3 - \\ &- A_3^T P_{20}^T + P_{10}S_1 P_{10} + P_{10}S_2 P_{20}^T + P_{20}S_2^T P_{10} + \\ &+ P_{20}S_3 P_{20}^T - Q_1, \quad P_{10}(t_f) = 0, \\ 0 &= -P_{10}(A_2 - S_2 P_{30}) - P_{20}(A_4 - S_3 P_{30}) - A_3^T P_{30} - Q_2, \end{aligned}$$

$$0 = -P_{30}A_4 - A_4^T P_{30} + P_{30}S_3 P_{30} - Q_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0 P_2}{d\tau} &= -\Pi_0 P_2 \cdot \alpha_{40} - \alpha_{30}^T \cdot \Pi_0 P_3 + \\ &+ \Pi_0 P_2 \cdot s_{30} \cdot \Pi_0 P_3, \quad \Pi_0 P_2(0) = -P_{20}(t_f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0 P_3}{d\tau} &= -\Pi_0 P_3 \cdot \alpha_{40} - \alpha_{40}^T \cdot \Pi_0 P_3 + \\ &+ \Pi_0 P_3 \cdot s_{30} \cdot \Pi_0 P_3, \quad \Pi_0 P_3(0) = -P_{30}(t_f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_1 P_3}{d\tau} &= -\Pi_1 P_3(\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3) - \\ &- (\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3)^T \Pi_1 P_3 + \Pi_1 F_{P3}(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 F_{P3}(\tau) &= -\Pi_0 P_2^T \cdot \alpha_{20} - \alpha_{20}^T \cdot \Pi_0 P_2 - \Pi_0 P_3 \cdot \alpha_{41} - \\ &- \alpha_{41}^T \cdot \Pi_0 P_3 + \Pi_0 P_2^T \cdot s_{20} \cdot \Pi_0 P_3 + \Pi_0 P_3 \cdot s_{20}^T \cdot \Pi_0 P_2 + \\ &+ \Pi_0 P_3 \cdot s_{31} \cdot \Pi_0 P_3, \quad \Pi_1 P_3(0) = -P_{31}(t_f), \end{aligned}$$

при этом $P_{31}(t_f)$ определяется из алгебраического уравнения

$$P_{31}(A_4 - S_3 P_{30}) + (A_4^T - P_{30}S_3)P_{31} = F_{P31}(t) - \frac{dP_{30}}{dt},$$

где

$$F_{P31}(t) = -P_{20}^T A_2 - A_2^T P_{20} + P_{20}^T S_2 P_{30} + P_{30} S_2^T P_{20} - q_3;$$

$$\begin{aligned} \frac{dW_{y0}}{dt} &= -W_{y0}(A_1 - S_1 P_{10} - S_2 P_{20}^T) - \\ &- W_{z0}(A_3 - S_2^T P_{10} - S_3 P_{20}^T); \end{aligned}$$

$$W_{y0}(t_f) = H_y - \Pi_0 W_y(0);$$

$$0 = -W_{y0}(A_2 - S_2 P_{30}) - W_{z0}(A_4 - S_3 P_{30});$$

$$\frac{d\Pi_{-1} W_z}{d\tau} = -\Pi_{-1} W_z(\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3), \quad \Pi_{-1} W_z(0) = H_z;$$

$$\frac{d\Pi_0 W_y}{d\tau} = -\Pi_{-1} W_z(\alpha_{30} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_2^T) \equiv \Pi_0 f_{W_y}(\tau),$$

$$\Pi_0 W_y(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_0 f_{W_y}(\sigma) d\sigma;$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0 W_z}{d\tau} &= -\Pi_0 W_y(\alpha_{20} - s_{20} \cdot \Pi_0 P_3) - \\ &- \Pi_0 W_z(\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3) + \Pi_0 F_{W_z}(\tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 F_{W_z}(\tau) &= -\Pi_{-1} W_z \cdot [\alpha_{41} - (s_{20}^T \cdot \Pi_0 P_2 + s_{31} \cdot \Pi_0 P_3 + \\ &+ s_{30} \cdot \Pi_1 P_3)] + (\Omega_{y0} + \Omega_{z0}) \cdot \Pi_0 P_3; \end{aligned}$$

$$\Pi_0 W_z(0) = -W_{z0}(t_f);$$

$$M_{-1}(t) \equiv M_{-1}(t_f) = -\Pi_{-1} M(0);$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -W_{y0}S_1 W_{y0}^T - W_{y0}S_2 W_{z0}^T -$$

$$- W_{z0}S_2^T W_{y0}^T - W_{z0}S_3 W_{z0}^T,$$

$$M_0(t_f) = -\Pi_0 M(0);$$

$$\frac{d\Pi_{-1} M}{d\tau} = -\Pi_{-1} W_z \cdot s_{30} \cdot \Pi_{-1} W_z^T \equiv \Pi_{-1} f_M(\tau),$$

$$\Pi_{-1} M(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_{-1} f_M(\sigma) d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0 M}{d\tau} &= -\Pi_{-1} W_z \cdot f_W^T(\tau) - f_W(\tau) \cdot \Pi_{-1} W_z^T - \\ &- \Pi_{-1} W_z \cdot s_{31}(\tau) \cdot \Pi_{-1} W_z^T \equiv \Pi_0 f_M(\tau), \end{aligned}$$

$$f_W(\tau) = [W_{y0}(t_f) + \Pi_0 W_y]s_{20} + [W_{z0}(t_f) + \Pi_0 W_z]s_{30},$$

$$\Pi_0 M(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_0 f_M(\sigma) d\sigma.$$

Здесь

$$s_{i0} = S_i(t_f) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad s_{31} = s_{31}(\tau) = S_3^{(1)}(t_f) \cdot \tau,$$

$$\alpha_{10} = (A_1 - S_1 P_{10} - S_2 P_{20}^T)|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{20} = (A_2 - S_2 P_{30})|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{30} = (A_3 - S_2^T P_{10} - S_3 P_{20}^T)|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{40} = (A_4 - S_3 P_{30})|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{41} = \alpha_{41}(\tau) = (A_4^{(1)} - S_3 P_{30}^{(1)} - S_3^{(1)} P_{30})|_{t=t_f} \cdot \tau - \\ - (S_2^T P_{20} + S_3 P_{31})|_{t=t_f},$$

$$\Omega_{y0} = W_{y0}(t_f) \cdot S_2(t_f), \quad \Omega_{z0} = W_{z0}(t_f) \cdot S_3(t_f),$$

а выражения вида $\Theta^{(1)}$ обозначают первую производную функции $\Theta = \Theta(t)$ по времени: $\Theta^{(1)} = d\Theta/dt$.

Теорема об асимптотическом разложении

С помощью композиционной формулы (8) получим асимптотику всей матрицы K и затем асимптотику самого регулятора (3). Воспользуемся для этого блочным представлением (5), где в соответствии с (8)

$$\begin{aligned} K_1 &= P_1 + W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_y; \\ K_2 &= P_2 + W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_z; \\ K_3 &= P_3 + \lambda W_z^T (M + F^{-1})^{-1} W_z. \end{aligned} \quad (14)$$

Составим асимптотически приближенную матрицу Риккати по формуле (8):

$$\tilde{K} = \tilde{P} + \tilde{W}^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}, \quad (15)$$

и примем для нее аналогичную к (5) структуру

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \lambda \tilde{K}_2 \\ \lambda \tilde{K}_2^T & \lambda \tilde{K}_3 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \tilde{P}_1 + \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_y; \\ \tilde{K}_2 &= \tilde{P}_2 + \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z; \\ \tilde{K}_3 &= \tilde{P}_3 + \lambda \tilde{W}_z^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z. \end{aligned} \quad (17)$$

Привлекая оценки (11)–(13) и структуры (5) и (16), можно доказать следующую теорему, усиливающую соответствующую теорему из работы [6].

Теорема. При выполнении условий I–III компоненты матрицы $\tilde{K}(t, \lambda)$ являются p -ми асимптотическими приближениями для соответствующих

компонент $K(t, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$, равномерными на отрезке $0 \leq t \leq t_f$, а именно:

$$K_i(t, \lambda) = \tilde{K}_i(t, \lambda) + r_{Ki}(t, \lambda) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (18)$$

где остатки приближений $r_{Ki}(t, \lambda)$ подчиняются оценкам

$$\|r_{K1}(t, \lambda)\| = \lambda^{p+1} O(1),$$

$$\|r_{Ki}(t, \lambda)\| = \lambda^p e^{-\kappa t} O(1) + \lambda^{p+1} O(1) \quad (i = 2, 3) \quad (19)$$

при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно на $[0, t_f]$, т. е. $\|O(1)\| \leq c$ для $\forall t \in [0, t_f]$ и $\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$, где $c > 0$ и $\lambda_0 > 0$ — некоторые постоянные.

Доказательство теоремы

Оценим точность асимптотических приближений (18). Для этого воспользуемся представлениями

$$K = P + W^T (M + F^{-1})^{-1} W = P + V;$$

$$\tilde{K} = \tilde{P} + \tilde{W}^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W} = \tilde{P} + \tilde{V},$$

где $V = W^T (M + F^{-1})^{-1} W$; $\tilde{V} = \tilde{W}^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}$.

Для V и $\tilde{V}$ примем блочные разбиения

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & \lambda V_2 \\ \lambda V_2^T & \lambda V_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 & \lambda \tilde{V}_2 \\ \lambda \tilde{V}_2^T & \lambda \tilde{V}_3 \end{bmatrix},$$

где $V_1 = W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_y$; $V_2 = W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_z$;

$V_3 = \lambda W_z^T (M + F^{-1})^{-1} W_z$; $\tilde{V}_1 = \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_y$;

$\tilde{V}_2 = \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z$; $\tilde{V}_3 = \lambda \tilde{W}_z^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z$.

Введем остатки асимптотических разложений

$$r_P = P - \tilde{P}, \quad r_W = W - \tilde{W}, \quad r_M = M - \tilde{M}$$

и их блочные представления:

$$r_P = \begin{bmatrix} P_1 & \lambda P_2 \\ \lambda P_2^T & \lambda P_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \lambda \tilde{P}_2 \\ \lambda \tilde{P}_2^T & \lambda \tilde{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{P1} & \lambda r_{P2} \\ \lambda r_{P2}^T & \lambda r_{P3} \end{bmatrix},$$

$$r_W = [W_y \quad \lambda W_z] - [\tilde{W}_y \quad \lambda \tilde{W}_z] = [r_{Wy} \quad \lambda r_{Wz}],$$

$$r_M = M - \tilde{M},$$

где согласно (11)–(13)

$$r_{Pi} = \lambda^{p+1} O(1), \quad i = \overline{1, 3};$$

$$r_{Wy,z} = \lambda^{p+1} O(1);$$

$$r_M = \lambda^{p+1} O(1),$$

а $r_V = V - \tilde{V}$ предстоит оценить.

В работе [7] доказано, что матрица $[M(t, \lambda) + F^{-1}]^{-1}$ существует и равномерно ограничена при всех

$t \in [0, t_f]$ и $\lambda > 0$. В отношении матрицы $[\tilde{M}(t, \lambda) + F^{-1}]^{-1}$ то же самое верно при всех $t \in [0, t_f]$ и $\lambda \in (0, \lambda_0]$, где λ_0 достаточно мало.

Далее запишем при достаточно малых λ

$$\begin{aligned}(M + F^{-1})^{-1} &= (\tilde{M} + F^{-1} + r_M)^{-1} = \\ &= [(I + r_M(\tilde{M} + F^{-1})^{-1})(\tilde{M} + F^{-1})]^{-1} = \\ &= (\tilde{M} + F^{-1})^{-1}(I + r_M O(1)) = \\ &= (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} + O(1)r_M O(1)\end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned}(M + F^{-1})^{-1} - (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} &= \\ &= O(1)r_M O(1) = \lambda^{p+1} O(1).\end{aligned}$$

Обратимся к остатку r_V . Запишем его в виде

$$\begin{aligned}r_V &= V - \tilde{V} = W^T(M + F^{-1})^{-1}W - \\ &- \tilde{W}^T(\tilde{M} + F^{-1})^{-1}\tilde{W} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_2^T + \rho_3,\end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \tilde{W}^T[(M + F^{-1})^{-1} - (\tilde{M} + F^{-1})^{-1}]\tilde{W};$$

$$\rho_2 = r_W^T(M + F^{-1})^{-1}\tilde{W}; \quad \rho_3 = r_W^T(M + F^{-1})^{-1}r_W.$$

Найдем

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \tilde{W}^T[(M + F^{-1})^{-1} - (\tilde{M} + F^{-1})^{-1}]\tilde{W} = \\ &= \tilde{W}^T \lambda^{p+1} O(1) \tilde{W}.\end{aligned}$$

Здесь $O(1)$ — $q \times q$ симметричная матрица;

$\tilde{W} = [\tilde{W}_y \quad \lambda \tilde{W}_z]$ — $q \times (n + m)$ матрица. Поэтому с учетом (12)

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} \tilde{W}_y^T O(1) \tilde{W}_y & \lambda \tilde{W}_y^T O(1) \tilde{W}_z \\ \lambda \tilde{W}_z^T O(1) \tilde{W}_y & \lambda^2 \tilde{W}_z^T O(1) \tilde{W}_z \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) \\ \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^2 O(1) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

(где все матричные блоки симметричны).

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}\rho_2 &= r_W^T(M + F^{-1})^{-1}\tilde{W} = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) \\ \lambda O(1) \end{bmatrix} O(1) [\tilde{W}_y \quad \lambda \tilde{W}_z] = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) \tilde{W}_y & \lambda O(1) \tilde{W}_z \\ \lambda O(1) \tilde{W}_y & \lambda^2 O(1) \tilde{W}_z \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) \\ \lambda O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^2 O(1) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\rho_3 = r_W^T(M + F^{-1})^{-1}r_W =$$

$$\begin{aligned}&= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O^T(1) \\ \lambda O^T(1) \end{bmatrix} O(1) \lambda^{p+1} [O(1) \quad \lambda O(1)] = \\ &= \lambda^{2p+2} \begin{bmatrix} O(1) & \lambda O(1) \\ \lambda O(1) & \lambda^2 O(1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(Здесь также блоки матрицы ρ_3 симметричны.)

Отсюда находим

$$\begin{aligned}r_V &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_2^T + \rho_3 = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) \\ \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^2 O(1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}r_V &= V - \tilde{V} = \\ &= \begin{bmatrix} V_1 & \lambda V_2 \\ \lambda V_2^T & \lambda V_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 & \lambda \tilde{V}_2 \\ \lambda \tilde{V}_2^T & \lambda \tilde{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{V1} & \lambda r_{V2} \\ \lambda r_{V2}^T & \lambda r_{V3} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где

$$r_{V1} = \lambda^{p+1} O(1), \quad r_{V2} = \lambda^p \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^{p+1} O(1),$$

$$r_{V3} = \lambda^p \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^{p+2} O(1).$$

Ранее мы получили

$$r_P = P - \tilde{P} = \begin{bmatrix} r_{P1} & \lambda r_{P2} \\ \lambda r_{P2}^T & \lambda r_{P3} \end{bmatrix},$$

$$r_{Pi} = \lambda^{p+1} O(1), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Суммируя, приходим к заключению о равномерности на $[0, t_f]$ при достаточно малых λ остатка для всей матрицы K :

$$\begin{aligned}r_K &= K - \tilde{K} = P - \tilde{P} + V - \tilde{V} = \\ &= r_P + r_V = \begin{bmatrix} r_{K1} & \lambda r_{K2} \\ \lambda r_{K2}^T & \lambda r_{K3} \end{bmatrix};\end{aligned}$$

$$r_{K1} = \lambda^{p+1} O(1);$$

$$r_{K2, 3} = \lambda^p \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^{p+1} O(1),$$

что и требовалось доказать.

Равномерный асимптотический регулятор

С учетом (3) и (15) приходим к асимптотическому регулятору

$$\tilde{u} = -R^{-1} B^T \tilde{K} x. \quad (20)$$

Следствие. Из теоремы следует, что асимптотический регулятор (20) служит равномерным асимптотическим приближением точного регулятора (3), формируя управляемую траекторию с точностью до $O(\lambda^{p+1})$ для всех t на $[0, t_f]$.

Список литературы

1. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3—51.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

3. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. М.: "Мир", 1972. 544 с.
4. Kokotovic P. V., Yackel R. A. Singular perturbations of linear regulators: basic theorems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. 17, № 1, February. P. 29—37.
5. Yackel R. A., Kokotovic P. V. A boundary layer method for the matrix Riccati equation // IEEE Trans. on Automatic Control. 1973. V. 18, N. 1, February. P. 17—24.
6. Глизер В. Я., Дмитриев М. Г. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. XIV, № 4. С. 601—612.
7. Козырев В. Г. Оптимальный регулятор выхода сингулярно возмущенных систем // Радиоэлектроника, информатика, управление. Запорожье: изд. ЗГТУ, 2003. № 2 (10). С. 125—131.

Asymptotic Expansion of the Terminal Control Law of the Output of Two-Tame-Scale Systems

V. G. Kozyrev, vldr.kzrv@yandex.ru,

Sevastopol National Technical University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Received on December 01, 2014

Research objective. The research objective is development of asymptotic methods for synthesis of the terminal control laws for the two-tame-scale plants. A two-tame-scale property is typical for her moving objects — aircraft, ships, etc. All of them are characterized by fast rotational and slow translational motions. In power electric drives the mechanical motions of the armature are slow, and the electric transients in circuits are fast. This circumstance hinders formation of the control laws because of the necessity for a frequent time discretization of the transients and performance operations on the ill-conditioned matrices. It is also known under the name of a system rigidity. In case of a terminal control it manifests itself most dramatically due to the non-stationary nature of the process of bringing an object to a predetermined position within a finite period of time. The paper proposes an asymptotic approach to the development of the terminal control law for the two-tame-scale plants. It allows us to decompose the control process into the fast and slow components, which are calculated separately in two time scales, followed by their arrangement in a holistic solution. This simplifies a dynamic representation of the controller and accelerates the numerical procedure for initiation of the control actions. **Formulation of the problem.** In the article the problem of an asymptotic decomposition for a controlled system is solved with fast and slow motions described by means of the linear differential equations with a small parameter at some derivatives. Terminal control is achieved by minimizing the corresponding quadratic quality functional defined on a finite time interval. Such a statement leads to a singularly perturbed optimal control problem which can be solved in the form of synthesis, and an asymptotic behavior of the control by the method of a boundary layer can be achieved. **Research results.** As a result of the research, the asymptotic behavior of the terminal control law is built within small singular parameters, uniform on the interval of the control time. The problem is solved for the general case of the output control, which distinguishes the obtained results from the well-known works, devoted exclusively to the state control problems. For this purpose, a special multiplicative decomposition of the control feedback loop matrix into three more simple matrices is used. Improved estimates of the asymptotic expansion remainder, more accurate than the existing estimates, are proved. **Conclusion.** Application of the developed asymptotic behavior based on its precision estimates allows us to build effective laws for a terminal control of the two-tame-scale plants. The proposed approach solves the problem of the rigidity, simplifies the terminal control laws, and makes their accuracy close to the optimal laws of the terminal control.

Keywords: terminal control, dynamic object, two-tame scale dynamics, asymptotic approximation, small singular parameter

For citation:

Kozyrev V. G. Asymptotic Expansion of the Terminal Control Law of the Output of Two-Tame-Scale Systems, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 225—331.

DOI: 10.17587/mau.16.225-231

References

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singulyarnye vozmushcheniya v zadachakh upravleniya (Singular perturbations in control problems), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2006, no. 1, pp. 3—51 (in Russian).
2. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* (Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations), Moscow, Nauka, 1973, 272 p. (in Russian).
3. Bryson A., Yu-Chi Ho. *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* (Applied optimal control theory), Moscow, Mir, 1972, 272 p.
4. Kokotovic P. V., Yackel R. A. Singular perturbations of linear regulators: basic theorems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1972, vol. 17, no. 1, pp. 29—37.

5. Yackel R. A., Kokotovic P. V. A boundary layer method for the matrix Riccati equation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1973, vol. 18, no. 1, pp. 17—24.

6. Glizer V. Ja., Dmitriev M. G. Asimptotika resheniya odnoi singulyarno vozmushchennoi zadachi Koshi, vznikayushchei v teorii optimal'nogo upravleniya (Asymptotic behavior of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem arising in optimal control theory), *Differentsial'nye uravneniya*, 1978, vol. XIV, no. 4, pp. 601—612 (in Russian).

7. Kozyrev V. G. Optimal'nyi regulyator vykhoda singulyarno vozmushchennykh sistem (Optimal controller of the output of singularly perturbed systems), *Radioelektronika, informatika, upravlenie*, 2003, no. 2 (10). P. 125—131 (in Russian).

Corresponding author:

Kozyrev Vladimir G., PhD, Associate Professor of Department of Engineering Cybernetics, Sevastopol National Technical University, Sevastopol, 299053, University street, 33, Russian Federation, e-mail: vldr.kzrv@yandex.ru