

Е. А. Марчук<sup>1</sup>, аспирант, e.marchuk@innopolis.ru,

А. С. Михайлов<sup>1</sup>, инженер-электроник, a.mikhailov@innopolis.ru,

Я. В. Калинин<sup>1</sup>, канд. техн. наук, науч. сотр., claymor.vlg@gmail.com,

А. В. Малолетов<sup>1,2</sup>, д-р физ.-мат. наук, науч. руководитель, a.maloletov@innopolis.ru,

<sup>1</sup> Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис, г. Иннополис,

<sup>2</sup> Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград

## Управление силами натяжения в системе тросового параллельного робота\*

*Предлагается метод управления силами натяжения в статически неопределимых тросовых системах на основе неотрицательного метода наименьших квадратов с контролем сингулярных или близких к сингулярным решений и полным перебором всех возможных конфигураций тросов. Для тросовых параллельных роботов задача управления силами натяжения тросов является критически важной, поскольку при отсутствии контроля силы натяжения в тросах распределяются неравномерно, что ведет к снижению робастности системы, повышенным энергозатратам и повышенному износу. В особых случаях конфигурации системы тросов силы натяжения становятся велики настолько, что это приводит к обрывам тросов. Вместе с тем, коррекция распределения сил натяжения тросов не должна приводить к существенным отклонениям от заданного положения мобильной платформы или, если формулировать задачу в терминах сил, к нарушению уравнений кинестатики. Таким образом, задача управления силами натяжения в системе тросового параллельного робота представляет собой задачу оптимизации сил натяжения тросов по критериям минимизации нормы их вектора в конфигурационном пространстве и минимизации нормы невязки вектора сил и моментов в операционном пространстве робота. Разработанный алгоритм основывается на решении неопределенных систем линейных алгебраических уравнений с нахождением минимальных норм наименьших квадратов и последующим обнулением отрицательных компонентов вектора решения. В работе рассмотрены примеры решения поставленной задачи для группы нижних тросов строительного 3D-принтера на базе тросового робота и для двенадцатитросовой системы.*

**Ключевые слова:** параллельный робот, тросовый робот, трос, односторонняя связь, решение неотрицательных наименьших квадратов, управление силами, силы натяжения

### Введение

Тросовые роботы представляют собой механизмы с параллельной кинематикой и односторонними связями. На рис. 1 (см. вторую сторону обложки) показана схема строительного 3D-принтера на основе тросового робота. Структура аппарата включает в себя четыре опоры 1, в данном случае реализованные в виде башен, на которых размещаются лебедки 2 и блоковая система тросов. Тросы можно разделить на группу верхних тросов 3, блоки 4 которых неподвижно закреплены в верхних точках опор, и группу нижних тросов 5, блоки которых установлены на подвижных каретках 6, перемещающихся вверх и вниз по опоре. На тросах подвешена мобильная платформа 7 робота, в данном случае оборудованная экструдером. Для подачи строительного раствора к экструдеру служит насос 8 и шланг 9, размещенный на специальной опоре 10, в данном случае реализованной в виде отдельной башни.

Согласованно управляя приводами лебедок, можно обеспечить требуемое движение платформы. При этом верхние тросы берут на себя роль "несущих", воспринимая вес платформы и обеспечивая ее перемещение в рабочем пространстве робота, а нижние тросы играют роль "управляющих", обеспечивая управление ориентацией платформы. Особенностью рассматриваемой тросовой системы является наличие подвижных кареток, которые предназначены для перемещения блоков нижних тросов таким образом, чтобы нижние тросы во время печати перемещались вверх вместе с мобильной платформой. В противном случае нижние тросы будут мешать процессу печати, пересекая уже напечатанные части здания или сооружения. Вместе с тем, горизонтальное расположение нижних тросов ставит особые задачи управления ими, позволяя контролировать как ориентацию, так и усилия в них.

Применение тросового робота в качестве строительного принтера означает необходимость его размещения в условиях строительной площадки, при этом могут значительно отличаться требуемые размеры и форма рабочей зоны робо-

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 22-29-01618).

та, образованная четырьмя его опорами. Поэтому в отличие от лабораторных моделей тросовых роботов, где обычно используются жесткие рамные конструкции, в рассматриваемом случае опоры реализованы в виде отдельно стоящих башен. Это создает дополнительные сложности в управлении тросами, поскольку деформации башен приводят к значительным смещениям точек схода тросов и отклонениям мобильной платформы робота от заданного положения. При составлении математической модели системы автоматического управления тросовой системой возникает проблема адекватного отображения конструктивной и геометрической нелинейности тросов в модели. Наиболее распространенные в настоящее время математические модели тросовых параллельных роботов основываются на предположении об исключении условия геометрической нелинейности тросов, т. е. предполагается, что тросы провисают незначительно [1, 2]. В то же время условие конструктивной нелинейности тросов может задаваться следующими способами: а) через систему неравенств [3, 4]; б) через функции активации [5, 6]. Ранее авторами разработана модель динамики тросового робота, учитывающая все вышеперечисленные особенности [7, 8].

Целью настоящей работы является разработка алгоритма управления тросовой системой крупногабаритного тросового параллельного робота, направленного на оптимизацию сил натяжения тросов по критерию минимизации нормы вектора сил в конфигурационном пространстве, с потенциальной возможностью использования в задачах управления в реальном времени.

### Постановка задачи

Поскольку число тросов в системе, как правило, превышает число степеней свободы платформы, то такая система является статически неопределимой, что позволяет управлять силами натяжения тросов в соответствии с тем или иным критерием. Распределение нагрузки на систему тросов осуществляется путем подтягивания или ослабления соответствующих тросов.

Ставится задача управления нагрузками на систему тросов с удовлетворением критериев минимизации нормы вектора сил в конфигурационном пространстве и минимизации нормы невязки сил и моментов в операционном про-

странстве. Координатами конфигурационного пространства для тросовой системы являются длины тросов, соответственно силы натяжения тросов в конфигурационном пространстве задаются естественным образом. Операционное пространство задается декартовой прямоугольной правоориентированной системой координат, связанной с рабочей зоной робота.

Кинестатическое равновесие системы описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{F} + \mathbf{G} + \mathbf{P} + \mathbf{\Phi} &= 0; \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}} + \mathbf{M}^{\mathbf{\Phi}} + \mathbf{M}^{\mathbf{P}} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{F}$  — результирующий вектор сил натяжения тросов;  $\mathbf{G}$  — сила тяжести платформы;  $\mathbf{P}$  — результирующий вектор других внешних сил, действующих на платформу;  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{M}^{\mathbf{\Phi}}$  — результирующие векторы сил и моментов инерции платформы;  $\mathbf{M}^{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbf{M}^{\mathbf{P}}$  — моменты, создаваемые силами натяжения тросов и внешних сил относительно центра масс платформы. Под внешними силами  $\mathbf{P}$ , действующими на платформу, понимаются силы, вызванные ветровой нагрузкой, подающим шлангом и другими факторами.

Связь между компонентами  $f_i$  вектора сил натяжения тросов в конфигурационном пространстве робота и векторами  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{M}^{\mathbf{F}}$  в операционном пространстве, входящими в уравнения (1), описывается выражением

$$\mathbf{J}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

или в развернутом виде для пространственного случая:

$$\begin{bmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{61} & \cdots & j_{6n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{J}$  — геометрическая матрица Якоби;  $\mathbf{f}$  — вектор сил натяжения тросов в конфигурационном пространстве;  $n$  — число тросов.

В первом приближении система является линейной относительно компонентов вектора сил натяжения тросов, и каждый столбец матрицы Якоби определяет влияние определенного троса. Фактически управление силами натяжения приводит к небольшому изменению длин тро-

сов, что, в свою очередь, отражается на компонентах матрицы Якоби. Как правило, этим влиянием можно пренебречь. Однако существуют сингулярные конфигурации тросовой системы, в которых тросы не могут обеспечить равновесие платформы с заданной ориентацией. В рамках рассматриваемой модели такие конфигурации дают решения, в которых силы натяжения одного или нескольких тросов многократно возрастают, при этом невязка суммы сил в операционном пространстве не уменьшается.

При числе тросов, равном шести, система линейных уравнений (3) является определенной. Однако на практике такие системы не используются, поскольку шесть тросов не гарантируют силовое замыкание системы. Другими словами, решения системы (3) почти для любой заданной ориентации платформы будут содержать одно или несколько отрицательных значений, что соответствует недопустимой для тросов работе на сжатие. Поэтому целесообразна разработка методов, обеспечивающих решение уравнений (3) для числа тросов семь и более.

Независимо от того, является ли система линейных алгебраических уравнений определенной, неопределенной или переопределенной, она может быть решена с использованием метода поиска минимальной нормы наименьших квадратов. Обязательным условием является неоднородность системы уравнений, т. е. ненулевая правая часть. В противном случае решение будет тривиальным.

Условие односторонних связей накладывает ограничение на неотрицательные значения компонент вектора решения. В таком случае рекомендуется использовать метод неотрицательных наименьших квадратов.

Инструменты решения задач в неотрицательных наименьших квадратах являются стандартными для большинства популярных математических программных пакетов. Их алгоритмы основываются на поиске векторов сопряженного пространства, удовлетворяющих заданным критериям [9]. Несомненным преимуществом стандартных инструментов популярных математических программных пакетов является быстрое действие и возможность быстрого, хоть и не самого точного, нахождения решения для матриц относительно большой размерности. Однако для некоторых задач решение, полученное с использованием стандартных инструментов, демонстрирует недостаточную вычислительную устойчивость. Кроме того, качество решения по

критерию минимизации нормы вектора для неопределенных систем не является оптимальным при использовании стандартных инструментов.

### **Метод неотрицательных наименьших квадратов с исключением выбросов**

В настоящей работе предлагается искать решение задачи распределения сил натяжения тросов с использованием алгоритма полного перебора решений, полученных с использованием метода наименьших квадратов применительно к матрицам всех возможных комбинаций нагруженных тросов, отсеивая решения, близкие к сингулярным конфигурациям, и обнуляя отрицательные значения. Алгоритм решения состоит из следующих действий:

1. Поиск всех возможных комбинаций нагруженных тросов без повторов. Каждая комбинация представляется как строка длиной  $n$ , заполненная нулями и единицами. Нагруженные тросы обозначаются единицами, остальным ячейкам соответствуют нулевые значения. При этом используется алгоритм составления комбинаций, предложенный в работе [10].

2. Матрица коэффициентов для каждого случая формируется путем обнуления столбцов исходной матрицы, соответствующих нулевым элементам строк комбинаций.

3. Для каждого случая решается система линейных алгебраических уравнений (3) с нахождением минимальной нормы наименьших квадратов. Отрицательные компоненты вектора решения обнуляются.

4. Проводится проверка норм векторов решений полного перебора на аномально большие значения — выбросы. Выбросы могут соответствовать решениям для случаев особой (сингулярной) конфигурации тросовой системы или конфигурации, близкой к сингулярности. Решения, соответствующие выбросам, исключаются.

5. Для каждого случая решения находится норма невязки по уравнениям (1). Найденные значения норм невязки округляются с заданной точностью. Выполняется поиск наименьших значений среди полученных норм невязки.

6. Среди выбранных норм невязки с наименьшими значениями проводится отбор по критерию наименьшего значения евклидовой нормы соответствующего вектора решения. В случае неединственного вектора решения следует выбирать последний вектор из найденных, соот-

ветствующий наибольшему значению числа ненулевых столбцов матрицы коэффициентов, что обеспечивает распределение нагрузки на максимально возможное число несущих элементов конструкции.

Недостатком предложенного метода является вычислительная сложность, поскольку метод характеризуется экспоненциальной скоростью роста функции зависимости числа комбинаций от числа тросов. Однако он гарантированно обеспечивает нахождение решения с минимально возможным отклонением при условии его существования.

Зависимость числа комбинаций от числа тросов в системе оценивается следующим образом. Первому десятку тросов соответствует не более  $10^3$  комбинаций, каждый последующий десяток тросов повышает число комбинаций на три порядка:

$$N(x) \approx 10^{0,3x},$$

что соответствует сложности алгоритма  $O(n^x)$  и согласуется с теорией сложности вычислений для задач полного перебора [11].

Преимуществом данного метода также является возможность проверки решений полного перебора на наличие выбросов, соответствующих решениям для случаев особой конфигурации тросовой системы. Проверка решений для особых конфигураций тросовой системы выполняется через оценку выбросов имеющегося набора решений с использованием распределения решений по квартилям. Коэффициент межквартильного размаха следует выбирать с достаточно большим значением [12].

Далее приведены примеры применения описанного алгоритма с указанием времени выполнения расчетов. Программа выполнялась на персональном компьютере на базе процессора AMD Ryzen 7 5700x. Следует отметить, что авторы не ставили перед собой задачу разработать реализацию алгоритма с максимальным быстродействием. Разработанная программа предназначена для проверки потенциальной работоспособности предложенного метода, поэтому приведенные значения в первую очередь интересны для сравнения между собой. Однако даже такая реализация дает быстродействие, достаточное для применения в системе управления относительно медленных крупногабаритных тросовых роботов с небольшим числом тросов. Оптимизация программного кода, ве-

роятно, позволит многократно повысить скорость выполнения алгоритма, что сделает возможным его применение для управления более требовательными к быстродействию системами или системами с большим числом тросов.

В текущей тестовой реализации алгоритма время вычислений для нахождения векторов решения с числом компонентов не более 6 и числом комбинаций  $N < 10^3$  не превышает 100 мс. Это может быть приемлемым, например, для тросовой системы строительного 3D-принтера. Скорость движения мобильной платформы такого аппарата равна 0,15 м/с, что при габаритных размерах  $20 \times 20 \times 15$  м соответствует достаточно медленному изменению конфигурации робота.

Для числа компонентов вектора более 10 и числа комбинаций  $N > 10^3$  время расчета с использованием тестовой реализации алгоритма превышает 1 с. Для числа компонентов вектора, равного 20, число комбинаций возрастает до  $N > 10^6$ , время расчетов возрастает до 1 мин и более. В таких вариантах метод может быть актуальным для расчетов статических конструкций или для предварительного планирования движения робота.

#### Реализация метода для восьмитросового параллельного робота

В рассматриваемом тросовом роботе режимы работы верхних и нижних тросов существенно отличаются. Так, верхние тросы преимущественно обеспечивают противодействие силе тяжести платформы и обеспечивают перемещение платформы в пределах рабочего пространства робота. Нижние тросы противодействуют преимущественно внешним силам, направленным в горизонтальном направлении, и обеспечивают управление ориентацией платформы. Конечно, такое разделение является достаточно условным, тросы взаимодействуют между собой и, таким образом, каждый из них воспринимает часть общей нагрузки. Тем не менее, ранее проведенные исследования [7, 13] показывают обоснованность раздельного управления группами верхних и нижних тросов.

Схема основных компонентов системы автоматического управления группами верхних и нижних тросов крупногабаритного тросового параллельного робота приводится на рис. 2.

На рис. 2 использованы следующие обозначения:  $TV$  — запрограммированный закон движения рабочего инструмента робота (trajectory and

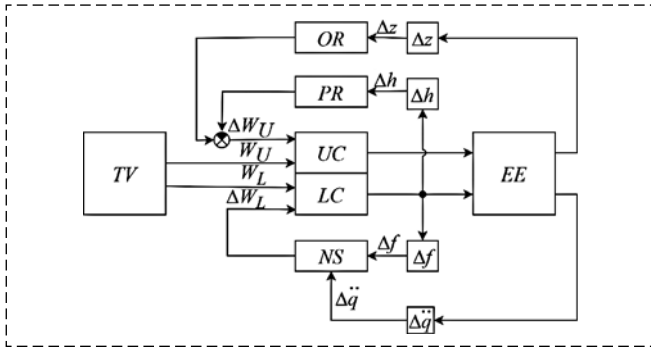


Рис. 2. Схема системы автоматического управления группами верхних и нижних тросов крупногабаритного тросового параллельного робота

Fig. 2. The scheme of control system of large-sized cable-driven parallel robot

velocity law); *EE* — рабочий инструмент робота (end-effector); *UC* — группа несущих верхних тросов (upper cables); *LC* — группа регулировочных нижних тросов (lower cables); *PR* — регулятор ошибок позиционирования рабочего инструмента робота (position regulator); *OR* — регулятор ошибок ориентации рабочего инструмента робота (orientation regulator); *NS* — регулятор сил натяжения тросов (null-space and counteraction regulator).

Для реализации предложенной концепции автоматического управления робот должен быть оснащен следующими типами датчиков:

- датчики сил натяжения нижних тросов;
- датчики угла наклона нижних тросов;
- инерциальный измерительный блок (гироскоп и акселерометр).

Силовые датчики непосредственно измеряют нагрузки на блоки нижних тросов. Электронные уровни измеряют углы наклона тросов нижней группы в точках их крепления к мобильной платформе. Гироскоп и акселерометр измеряют ориентацию и ускорение мобильной платформы.

В настоящем исследовании задача управления группой верхних тросов считается решенной в соответствии с работами [7, 13], и рассматривается задача управления силами натяжения группы нижних тросов крупногабаритного тросового параллельного робота.

Рассматривая отдельно группу нижних тросов, уравнение (2) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Перераспределение сил натяжений в группе нижних тросов осуществляется посредством минимизации невязки векторов расчетных значений и фактических измеренных значений сил натяжения. Расчетные значения вектора сил натяжения в конфигурационном пространстве находятся с использованием предложенного метода, в котором осуществляется полный перебор решений в неотрицательных наименьших квадратах и при этом исключаются выбросы, соответствующие особым конфигурациям тросовой системы.

Решение задачи оптимального распределения для группы нижних четырех тросов для заданных положения и ориентации мобильной платформы заключается в выполнении следующей последовательности действий.

1. Генерируется таблица всех возможных комбинаций нагруженных тросов без повторов.

2. Выполняется формирование матриц коэффициентов для каждого случая. В качестве примера здесь и далее рассматривается комбинация, в которой натянуты третий и четвертый тросы, а остальные не нагружены. Матрица коэффициентов для этого случая имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & j_{13} & j_{14} \\ 0 & 0 & j_{23} & j_{24} \\ 0 & 0 & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix}.$$

3. Вычисляется решение системы линейных алгебраических уравнений с нахождением минимальной нормы наименьших квадратов для каждого случая. Так, для рассматриваемой комбинации

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & j_{13} & j_{14} \\ 0 & 0 & j_{23} & j_{24} \\ 0 & 0 & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_\varphi \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что решением будет вектор, первые две компоненты которого — нулевые. При этом компоненты  $f_3$  и  $f_4$  могут получиться как положительными, так и отрицательными. Пусть, для определенности, четвертая компонента найденного вектора решения имеет отрицательное значение. Это означает, что фактически этот трос не работает, и полученное решение должно быть изменено:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +f_3 \\ -f_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Вычисляются нормы векторов полученных решений. Выполняется их проверка на выбросы. Решения, соответствующие выбросам, исключаются.

5. Находится норма невязки для каждого случая. Найденные значения норм невязки округляются с заданной точностью. Проводится поиск наименьших значений среди полученных норм невязки. Для рассматриваемого примера:

$$\Delta_{10} = \left\| \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_\phi \end{bmatrix} \right\|_2.$$

6. Среди выбранных норм невязки с наименьшими значениями выполняется отбор по критерию наименьшего значения евклидовой нормы соответствующего вектора решения.

Результат обеспечивает минимизацию нормы вектора сил натяжения в конфигурационном пространстве, что приводит к уменьшению нагрузок на отдельные тросы, а также к более равномерному распределению сил натяжения в группе нижних тросов.

### Апробация метода для группы нижних тросов

Численный эксперимент проводится с использованием ранее разработанной динамической модели крупногабаритного тросового параллельного робота, описанной авторами в работах [7, 8]. Целью численного эксперимента является проверка разработанного алгоритма управления силами натяжения тросов.

Схема эксперимента заключается в следующем.

1. Задается некоторый желаемый закон движения мобильной платформы.

2. В каждой точке траектории вычисляется оптимальное распределение сил натяжения в тросах.

3. На первом этапе моделируется динамика движения тросового робота. Управление, реализованное согласно модели [7], обеспечивает движение по желаемому закону движения с заданной точностью без контроля сил натяжения нижних тросов.

4. На втором этапе моделируется динамика движения тросового робота с управлением силами натяжения нижних тросов согласно предложенному алгоритму. При этом точность следования желаемому закону движения платформы не ухудшается.

5. Результаты двух этапов моделирования сравниваются между собой и с оптимальным распределением сил в тросах.

Типовые результаты моделирования представлены на рис. 3–5 (см. третью сторону обложки). Расчетные силы натяжения тросов (рис. 3, см. третью сторону обложки) фактически представлены кусочными функциями, каждый сегмент которых представляет собой оптимальное решение в наименьших квадратах в соответствии с заданными критериями — условиями минимальных норм и неотрицательных значений, а переход с одного сегмента на другой соответствует изменению направления движения мобильной платформы согласно заданному закону движения.

Расчетные значения сил натяжения тросов изменяются плавно, без резких переходов, что важно с учетом чувствительности тросовых систем к любым резким воздействиям, откликом на которые являются нежелательные колебательные процессы.

Фактические силы натяжения тросов, полученные на первом этапе моделирования (см. рис. 4, см. третью сторону обложки), далеки от рассчитанных оптимальных значений. Силы натяжения тросов изменяются резко, в результате чего возникают колебательные процессы. Низкочастотные колебания происходят с большой амплитудой: на графике хорошо заметно, что после пиковых значений сил следует падение, а затем еще один пик с меньшей амплитудой, после которого система переходит в установившееся движение. Высокочастотные колебания накладываются на низкочастотные и хорошо заметны на вершинах вторых пиков, после чего они быстро затухают.

Следует отметить, что пиковые значения сил натяжения тросов превышают расчетные оптимальные значения почти в два раза.

Фактические силы натяжения тросов после корректировки с использованием предложенного алгоритма автоматического управления, показанные на рис. 5 (см. третью сторону обложки), близки к рассчитанным оптимальным значениям.

Силы натяжения тросов изменяются в целом плавно, заметны переходы с незначительными

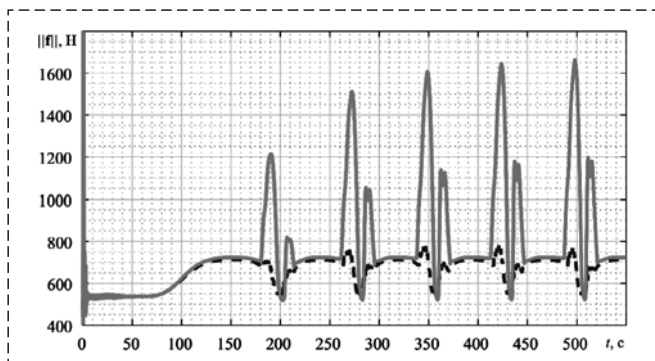


Рис. 6. Норма вектора сил натяжения нижней группы тросов, до коррекции (сплошная линия) и после коррекции (штриховая линия)

Fig. 6. Norm of vector of tension forces in the group of lower cables, before correction (solid line) and after correction (dashed line)

отклонениями, сопровождаемые быстро затухающими колебательными процессами с относительно небольшой амплитудой колебаний в процессе движения мобильной платформы.

Влияние отмеченных переходных процессов на устойчивость движения мобильной платформы и отклонения от заданного положения по результатам компьютерного моделирования можно полагать пренебрежимо малым.

На рис. 6 показано сравнение норм векторов сил в конфигурационном пространстве робота для случаев без управления распределением сил натяжения тросов и с управлением распределением сил натяжения тросов.

Для наихудших конфигураций норма вектора сил после корректировки уменьшается вдвое, что можно считать очень хорошим результатом. Иными словами, это означает, что нагрузка на тросы нижней группы значительно уменьшается.

Для рассматриваемого практического примера управления силами натяжения нижней группы тросов с представлением модели в виде матрицы размером  $3 \times 4$  время расчета с использованием тестовой реализации предложенного алгоритма не превышает 50 мс, что допускает решение задач автоматического управления крупногабаритным тросовым параллельным роботом в реальном времени.

## Апробация метода для системы 12 тросов

Предложенный метод может быть эффективным и в задачах большей размерности. На практике число тросов параллельных тросовых роботов, как правило, не более восьми. Однако статические системы, например, радиальные висячие конструкции [14], а также структуры тенсегрити [15], могут включать до нескольких десятков элементов с конструктивной нелинейностью — тросов. Расчет оптимального распределения нагрузок с учетом реакций односторонних связей и исключения особых конфигураций через проверку выбросов также может быть осуществлен с использованием предложенного метода. Целью этой части исследования является проверка работы предложенного метода и сравнение его со стандартным инструментом решения неотрицательной линейной задачи методом наименьших квадратов `lsqnonneg` [16], используемым в библиотеках популярных математических программных пакетов.

В таблице приведены четыре примера решений неопределенных систем линейных алгебраических уравнений для матриц случайных конфигураций тросовой системы с 12 тросами.

Каждая конфигурация тросовой системы решалась с помощью предложенного метода и с использованием стандартного инструмента библиотеки популярного математического программного пакета `lsqnonneg`.

Можно заметить, что в рабочих конфигурациях тросовой системы (примеры 1—3) стандартный метод дает решение, в котором только шесть тросов нагружены, в то время как остальные шесть тросов остаются прослабленными. Разработанный же метод обеспечивает распределение нагрузки на большее число тросов. В результате распределение нагрузки становится более равномерным, уменьшаются нагрузки на отдельные тросы, а норма вектора решения получается на 15...40 % меньше, чем при использовании стандартного метода. Норма не-

### Примеры численного эксперимента, $n = 12$

#### Examples of the numerical simulation, $n = 12$

Параметры эксперимента	1-й пример		2-й пример		3-й пример		4-й пример	
	Предл.	Станд.	Предл.	Станд.	Предл.	Станд.	Предл.	Станд.
Число нагруженных тросов	10	6	9	6	7	6	5	5
Норма вектора решения $\ x\ _2$	0,85	1,24	1,97	2,35	3,69	6,00	1,63	39,37
Относительная норма невязки	$<10^{-4}$	$<10^{-6}$	$<10^{-4}$	$<10^{-6}$	$<10^{-4}$	$<10^{-6}$	0,58	0,39

вязки при этом получается несколько хуже, но все равно остается пренебрежимо малой.

Пример 4 демонстрирует особый случай — близкую к сингулярной конфигурацию тросовой системы, когда значения компонент вектора решения, полученного с использованием как стандартного инструмента, так и разработанного метода, являются выбросами в отношении набора всех решений полного перебора. В таких случаях не удается найти решение, обеспечивающее равновесие системы. В расчетах это проявляется тем фактом, что нагружаются менее шести тросов, нагрузка распределяется неравномерно, а невязка остается большой.

Следует заметить, что во многих случаях решения, полученные с использованием стандартного инструмента и предлагаемого метода, для статических задач совпадают. Приведенные четыре примера даны в качестве иллюстрации, демонстрирующей преимущества предложенного метода.

Среднее время расчета на ЭВМ для произвольно выбранных матриц случайных значений размером  $6 \times 12$  с использованием тестовой реализации предложенного алгоритма не превышает 2,5 с.

### Заключение

Разработанный метод управления силами натяжения предназначен для статически неопределимых тросовых систем и позволяет найти оптимальное решение по критериям минимизации нормы вектора сил в конфигурационном пространстве и минимизации нормы невязки вектора сил и моментов в операционном пространстве робота. Метод основывается на неотрицательном методе наименьших квадратов и обеспечивает перебор всех возможных комбинаций тросов, что позволяет выбрать наилучшее решение по обоим критериям, за исключением случаев сингулярной или близкой к сингулярной конфигурации робота. Удовлетворение первого критерия означает, что силы натяжения тросов распределяются, насколько это возможно, равномерно между тросами, что обеспечивает снижение нагрузок на приводы. Удовлетворение второго критерия означает, что кинестатическое равновесие системы не изменяется, следовательно, и точность позиционирования и ориентации мобильной платформы тросового робота не ухудшается по сравнению с управлением без учета сил натяжения тросов.

Результаты численного моделирования показали заметное преимущество в точности предложенного метода в сравнении со стандартным инструментом библиотек популярных математических программных пакетов `lsqnonneg` при решении неопределенных систем уравнений.

В работе рассмотрены примеры решения поставленной задачи для группы нижних тросов строительного 3D-принтера на базе тросового робота и для двенадцатитросовой системы. Показано, что для рассмотренных практических примеров быстроедействие метода достаточно для использования предложенного метода в системе автоматического управления тросового параллельного робота.

### Список литературы

1. Pott A. Cable-Driven Parallel Robots. Springer International Publishing, 2018.
2. Zi B., Qian S. Design, Analysis and Control of Cable-Suspended Parallel Robots and Its Applications. Springer Singapore, 2017.
3. Pott A., Mütherich H., Kraus W., Schmidt V., Miermeister P., Verl A. IPAnema: A family of Cable-Driven Parallel Robots for Industrial Applications // Cable-Driven Parallel Robots. Mechanisms and Machine Science. 2013. Vol. 12. P. 19–34. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-31988-4\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-31988-4_8).
4. Tempel P., Herve P., Tempier O., Gouttefarde M., Pott A. Estimating inertial parameters of suspended cable-driven parallel robots — Use case on CoGiRo // 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2017. P. 6093–6098. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2017.7989723>.
5. Kalinin Ya.V., Marchuk E. A. Specificity of Including of Structural Nonlinearity in Model of Dynamics of Cable-Driven Robot // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2021. Vol. 22, N. 10. P. 547–552. <https://doi.org/10.17587/mau.22.547-552>.
6. Marchuk E., Kalinin Ya., Maloletov A. Mathematical Modeling of Eight-Cable-Driven Parallel Robot // 2021 International Conference "Nonlinearity, Information and Robotics" (NIR). 2021. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/NIR52917.2021.9665802>.
7. Marchuk E. A., Kalinin Ya. V., Sidorova A. V., Maloletov A. V. On the Problem of Position and Orientation Errors of a Large-Sized Cable-Driven Parallel Robot // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 18, N. 5. P. 755–770. <https://doi.org/10.20537/nd221209>.
8. Marchuk E., Kalinin Ya., Maloletov A. On Smooth Planar Curvilinear Motion of Cable-Driven Parallel Robot End-effector // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55, N. 10. P. 2475–2480. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.080>.
9. Lawson, C. L., Hanson R. J. Solving Least-Squares Problems. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1974.
10. Generate a matrix of combinations (permutation) without repetition (array exceeds maximum array size preference). URL: <https://stackoverflow.com/questions/69707949/generate-a-matrix-of-combinations-permutation-without-repetition-array-exceed>, 2021 (дата обращения: 15 августа 2023 г.).
11. Bhargava A. Grokking Algorithms: An Illustrated Guide for Programmers and Other Curious People. Manning, 2016.
12. Orloff J., Bloom J. Introduction To Probability And Statistics. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2014/>, 2014 (дата обращения: 07 августа 2023 г.).

13. **Marchuk E., Kalinin Ya., Maloletov A.** Error Compensation in Position and Orientation of Mobile Platform of Cable-Driven Robots via Tensile Forces Measurement // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2022. Vol. 23, N. 10. P. 515–522. <https://doi.org/10.17587/mau.23.515-522>.

14. **Seidel M.** Tensile Surface Structures. Ernst, Sohn, 2009.

15. **Lalvani H.** Origins Of Tensegrity: Views Of Emmerich, Fuller And Snelson // *International Journal of Space Structures*. 1996. Vol. 11, Iss. 1–2. <https://doi.org/10.1177/026635119601-204>.

16. **Solve** nonnegative linear least-squares problem. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/lsqlnonneg.html>, 2006 (дата обращения: 09 августа 2023 г.).

## On the Problem of Tension Forces Distribution in Cable System of Cable-Driven Parallel Robot

**E. A. Marchuk**<sup>1</sup>, [e.marchuk@innopolis.ru](mailto:e.marchuk@innopolis.ru), **A. S. Mikhailov**<sup>1</sup>, [a.mikhailov@innopolis.ru](mailto:a.mikhailov@innopolis.ru),  
**Ya. V. Kalinin**<sup>1</sup>, [claymor.vlg@gmail.com](mailto:claymor.vlg@gmail.com), **A. V. Maloletov**<sup>1,2</sup>, [a.maloletov@innopolis.ru](mailto:a.maloletov@innopolis.ru),

<sup>1</sup>Innopolis University, Innopolis, 420500, Russian Federation,

<sup>2</sup>Volgograd State Technical University, Volgograd, 400005, Russian Federation

Corresponding author: **Marchuk E. A.**, PhD student,

Innopolis University, Innopolis, 420500, Russian Federation, e-mail: [e.marchuk@innopolis.ru](mailto:e.marchuk@innopolis.ru)

Accepted on September 05, 2023

### Abstract

The paper proposes a method for controlling tension forces in statically indeterminable cable-driven systems based on the non-negative least squares method with control of singular or near-singular solutions and a complete search of all possible cable configurations. For cable-driven parallel robots the problem of controlling the cable tension forces is critical, because in the absence of control the cable tension forces are distributed unevenly, which leads to reduced robustness of the system, increased energy consumption and increased deterioration. And in special cases of cable system configuration the tension forces become so great that they lead to cable breaks. At the same time, correction of cable tension force distribution should not lead to significant deviations from the specified position of the mobile platform or, formulating the problem in terms of forces, to violation of kinetostatic equations. Thus, the problem of controlling the tension forces in the cable parallel robot system is solved as a problem of optimizing the tension forces of the cables according to the criteria of minimizing the norm of their vector in the configuration space and minimizing the norm of incoherence of the vector of forces and moments in the operational space of the robot. The developed algorithm is based on the solution of underdetermined systems of linear algebraic equations with finding the minimum least squares norms and subsequent zeroing of negative components of the solution vector. The paper considers examples of the solution of the set problem for the lower cable group of a construction 3D printer based on a cable-driven robot and for a 12-cable system.

**Keywords:** parallel robot, cable-driven robot, cable, least squares solution, force control, tension forces

**Acknowledgements:** The work was financially supported by RNF (grant 22-29-01618).

For citation:

**Marchuk E. A., Mikhailov A. S., Kalinin Ya. V., Maloletov A. V.** On the Problem of Tension Forces Distribution in Cable System of Cable-Driven Parallel Robot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 12, pp. 643–651 (in Russian).

DOI: 10.17587/mau.24.643-651

### References

1. **Pott A.** Cable-Driven Parallel Robots. Springer International Publishing, 2018.

2. **Zi B., Qian S.** Design, Analysis and Control of Cable-Suspended Parallel Robots and Its Applications. Springer Singapore, 2017.

3. **Pott A., Mütterich H., Kraus W., Schmidt V., Miermeister P., Verl A.** IPANema: A family of Cable-Driven Parallel Robots for Industrial Applications, *Cable-Driven Parallel Robots. Mechanisms and Machine Science*, 2013, vol. 12, pp. 19–34, [https://doi.org/10.1007/978-3-642-31988-4\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-31988-4_8).

4. **Tempel P., Herve P., Tempier O., Gouttefarde M, Pott A.** Estimating inertial parameters of suspended cable-driven parallel robots — Use case on CoGiRo, *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2017, pp. 6093–6098, <https://doi.org/10.1109/ICRA.2017.7989723>.

5. **Kalinin Ya. V., Marchuk E. A.** Specificity of Including of Structural Nonlinearity in Model of Dynamics of Cable-Driven Robot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 10, pp. 547–552. <https://doi.org/10.17587/mau.22.547-552>.

6. **Marchuk E. A., Kalinin Ya. V., Maloletov A.** Mathematical Modeling of Eight-Cable-Driven Parallel Robot, *2021 International Conference "Nonlinearity, Information and Robotics" (NIR)*, 2021, pp. 1–5, <https://doi.org/10.1109/NIR52917.2021.9665802>.

7. **Marchuk E. A., Kalinin Ya. V., Sidorova A. V., Maloletov A. V.** On the Problem of Position and Orientation Errors of a Large-Sized Cable-Driven Parallel Robot, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 18, no. 5, pp. 755–770, <https://doi.org/10.20537/nd221209>.

8. **Marchuk E., Kalinin Ya., Maloletov A.** On Smooth Planar Curvilinear Motion of Cable-Driven Parallel Robot End-effector, *IFAC-PapersOnLine*, 2022, vol. 55, no. 10, pp. 2475–2480, <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.080>.

9. **Lawson, C. L., Hanson R. J.** Solving Least-Squares Problems. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 1974.

10. **Bhargava A.** Grokking Algorithms: An Illustrated Guide for Programmers and Other Curious People, Manning, 2016.

11. **Generate** a matrix of combinations (permutation) without repetition (array exceeds maximum array size preference), available at: <https://stackoverflow.com/questions/69707949/generate-a-matrix-of-combinations-permutation-without-repetition-array-exceed>, 2021 (date of access: 15.08.23).

12. **Orloff J., Bloom J.** Introduction To Probability And Statistics, available at: <https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2014/>, 2014 (date of access: 07.08.23).

13. **Marchuk E., Kalinin Ya., Maloletov A.** Error Compensation in Position and Orientation of Mobile Platform of Cable-Driven Robots via Tensile Forces Measurement, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 10, pp. 515–522, <https://doi.org/10.17587/mau.23.515-522>.

14. **Seidel M.** Tensile Surface Structures, Ernst, Sohn, 2009.

15. **Lalvani H.** Origins Of Tensegrity: Views Of Emmerich, Fuller And Snelson, *International Journal of Space Structures*, 1996. vol. 11, iss. 1–2, <https://doi.org/10.1177/026635119601-204>.

16. **Solve** nonnegative linear least-squares problem, available at: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/lsqlnonneg.html>, 2006 (date of access: 09.08.23).