

А. Р. Гайдук, д-р техн. наук, проф., gaiduk\_2003@mail.ru,  
ФГАОУ ВО Южный федеральный университет, г. Таганрог

## Синтез дискретных и гибридных нелинейных систем управления\*

*Предлагается новый метод синтеза дискретных и гибридных систем управления нелинейными объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Повышающиеся требования к качеству процессов управления и широкое распространение средств вычислительной техники обуславливают широкие возможности синтеза и реализации цифровых систем управления. Однако для решения этой задачи необходимы дискретные модели объектов управления. В случае линейных объектов такие модели создаются на основе z-преобразования, формул Эйлера или Тастина. В случае нелинейных объектов эти преобразования неприменимы, поэтому к настоящему времени разработано большое число приближенных методов дискретизации. Наибольшее распространение имеют преобразования Эйлера и Рунге—Кутты, но они приводят к удовлетворительным результатам лишь при очень малых периодах дискретизации. В случае систем автоматического управления это требует применения цифровых средств автоматизации с очень высоким быстродействием, что часто экономически нецелесообразно. Методы дискретизации с большим периодом чаще всего разрабатывались на базе разложения в ряды правых частей дифференциальных уравнений, преобразованных по Эйлера. Здесь возникает, во-первых, проблема выбора необходимого числа членов ряда, подлежащих удержанию, а во-вторых, уже при третьем—четвертом порядке объекта расчетные соотношения оказываются чрезвычайно сложными.*

*Предлагаемый ниже метод отличается тем, что дискретизируются не уравнения нелинейных объектов в форме Коши, а соответствующие квазилинейные модели. При этом используется модифицированный метод трапеций, причем целью дискретизации является не наиболее точная аппроксимация исходных непрерывных уравнений объекта, а устойчивость замкнутой нелинейной системы управления при достаточно большом периоде дискретизации. Эта система синтезируется с применением алгебраического полиномиально-матричного метода синтеза нелинейных систем управления. В результате образуется гибридная нелинейная система с достаточно простыми алгебраическими расчетными выражениями. Предложенный подход позволяет создавать системы управления нелинейными непрерывными объектами с применением обычных вычислительных средств автоматизации.*

**Ключевые слова:** нелинейный объект, дифференцируемая нелинейность, дискретизация, модифицированный метод трапеций, квазилинейная модель, дискретная квазилинейная модель, алгебраический полиномиально-матричный метод, невырожденность по управлению, гибридная система управления

### Введение

Повышающиеся требования к качеству процессов управления и широкое распространение вычислительных средств автоматизации обуславливают разработку методов синтеза дискретных систем управления нелинейными объектами. Математическими моделями нелинейных объектов чаще всего являются непрерывные нелинейные дифференциальные уравнения в форме Коши. В случае синтеза линейных дискретных систем управления применяется классический метод линеаризации. С этой целью линеаризованные уравнения объекта подвергаются z-преобразованию, что приводит к получению

дискретной линейной модели [1—3]. Однако этот подход не позволяет учесть все особенности нелинейных объектов и обеспечить повышенные требования к процессам управления. Поэтому чаще всего дискретные нелинейные системы управления являются гибридными, т. е. они синтезируются как непрерывные, а полученное непрерывное управление реализуется с применением цифровых процессоров как дискретное [3—5]. Но этот подход требует применения цифровых элементов с очень высоким быстродействием из-за малого периода дискретизации.

С целью получить цифровые системы управления нелинейными объектами с большим периодом дискретизации осуществляется дискретизация непосредственно нелинейных уравнений объектов [6—13]. Для этого обычно используется метод Эйлера, позволяющий перейти от дифференциальных уравнений к раз-

\*Исследование выполнено при поддержке передовой инженерной школы Южного федерального университета "Инженерия киберплатформ".

ностным [2, 5, 6]. Однако допустимый период дискретизации в этом случае также оказывается очень малым. Несколько больший период позволяет получить схема Рунге—Кутты [7, 8]. Более эффективным является совместное применение метода Эйлера и рядов Тейлора, Пеано—Бэкера (Peano—Baker) и др. [9—13]. В работах [9—11] приращение решения нелинейной системы на периоде  $T$  разлагается в ряд Тейлора, и сохраняются два его члена, переходная матрица, соответствующая второму члену ряда Тейлора, разлагается в ряд Пеано—Бэкера. Число удерживаемых членов этого ряда определяется требуемой точностью соответствия между решениями дискретной и непрерывной систем. На примере перевернутого маятника [11], точка опоры которого подвергается гармоническому воздействию вдоль вертикальной оси, показано, что этот прием позволяет увеличить период дискретизации с  $T = 0,001$  до  $T = 0,005$  при удержании трех членов ряда Пеано—Бэкера.

Более существенные результаты достигаются применением к дискретной системе, полученной методом Эйлера, разложения в ряд Тейлора по степеням периода дискретизации, при этом коэффициенты ряда определяются с применением скобки Ли [12, 13]. В случае нелинейной системы первого порядка графики изменения ее переменной состояния при пяти членах ряда Тейлора практически совпадают с графиком непрерывной системы как при  $T = 0,1$  с, так и при  $T = 0,3$  с [12]. Особенно эффективным этот подход оказывается в случае нелинейных систем с запаздыванием как по управлению, так и по состоянию [13]. Однако подходы, использующие ряды Тейлора, приводят к очень сложным расчетным соотношениям. Например, вывод выражений для четвертого и пятого членов ряда авторы работы [12] из-за большого объема вынуждены были перенести в приложение. При высоком порядке объектов управления это приводит к сложным расчетным соотношениям и необходимости применения быстродействующих, многопроцессорных контроллеров, более дорогих, с большим энергопотреблением и габаритными размерами.

В данной работе предлагается подвергать дискретизации не уравнения нелинейного объекта управления, а уравнения его квазилинейной модели (КЛМ) [14, 15] с применением модифицированного метода трапеций. Преимущество этого подхода заключается в более простых аналитических соотношениях для определения параметров дискретной модели

непрерывного объекта при достаточно большом периоде дискретизации. Наиболее существенным ограничением предлагаемого метода дискретизации является требование дифференцируемости нелинейностей объектов управления.

### Квазилинейная дискретизация нелинейных объектов

Как показано в работах [14, 15], если нелинейности объектов, аффинных по управлению и возмущениям, являются дифференцируемыми, то их дифференциальные уравнения в отклонениях, записанные в форме Коши, можно совершенно точно представить квазилинейной моделью

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u + h(x)f, \quad y = c^T(x)x, \quad (1)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор переменных состояния  $x_i$ ;  $u$ ,  $f$  и  $y$  — управление, возмущение и выходная управляемая переменная;  $A(x)$  и  $b(x)$ ,  $h(x)$ ,  $c(x)$  — функциональные ( $n \times n$ )-мерная матрица и  $n$ -мерные векторы, элементы которых — известные нелинейные скалярные функции или числа. Будем предполагать, что переменные состояния объекта и выходная переменная измеряются.

Методы построения квазилинейной модели (1) по уравнениям объектов в форме Коши с дифференцируемыми нелинейностями можно найти в работах [15, 16]. В соответствии с этими методами элементы матрицы и векторов этой модели определяются путем интегрирования частных производных нелинейностей объекта по вспомогательной переменной в пределах от 0 до 1. Поэтому при ограниченном по норме векторе  $x$  все они, в частности элементы матрицы  $A(x) = [a_{ij}(x)]$ , являются ограниченными функциями переменных состояния  $x_i$ , т. е.

$$|a_{ij}(x)| \leq \zeta_A(x) < \infty, \quad \forall x \in \Omega_d, \quad \|x\| \leq M < \infty, \quad (2)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $|\cdot|$  и  $\|\cdot\|$  — модуль скалярной и норма векторной величин;  $\Omega_d$  — некоторая окрестность точки  $x = 0$  такая, что при всех  $x \in \Omega_d$  выполняются неравенства (2);  $\zeta_A(x)$  — положительно определенная, ограниченная функция;  $M$  — число.

В данной работе предлагается метод квазилинейной дискретизации уравнений нелинейных объектов управления, представленных квазилинейной моделью (1), (2). Этот метод заключается в дискретизации с некоторым

периодом  $T$  решения  $x(t, x_0, u, f)$  первого уравнения (1). Очевидно, каждому из дискретных моментов времени  $t_k = kT, k = 0, 1, 2, \dots$ , соответствует дискретное значение  $x_k = x(kT)$  решения  $x(t) = x(t, x_0, u, f)$  этого уравнения. Точное значение  $x_{k+1} = x((k+1)T)$  теоретически может быть найдено по формуле

$$x_{k+1} = x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} \dot{x}[x(t), u(t), f(t)] dt, \quad (3)$$

где производная  $\dot{x}[x(t), u(t), f(t)]$  определяется правой частью первого уравнения (1). Однако точное интегрирование произвольных нелинейных функций практически невозможно, даже с применением современных ЭВМ. Поэтому на практике обычно применяются различные формулы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений [17].

Метод квазилинейной дискретизации предусматривает применение модифицированного метода трапеций, который естественно приводит к приближенным значениям  $\tilde{x}_{k+1}$ , которые несколько отличаются от  $x_{k+1}$ . Поэтому, имея в виду применение указанного метода, формулу (3) запишем в следующем виде:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} \bar{\dot{x}}[\tilde{x}(t), u(t), f(t)] dt, \quad (4)$$

где  $\bar{\dot{x}}[\tilde{x}(t), u(t), f(t)]$  — среднее значение скорости изменения вектора  $\tilde{x}(t)$  на интервале  $[kT, (k+1)T]$ , определяемое выражением

$$\bar{\dot{x}}(t) = 0,5[\dot{\tilde{x}}(\tilde{x}_k, u_k, f_k) + \dot{\tilde{x}}(\tilde{x}_{k+1}, u_{k+1}, f_{k+1})]$$

или

$$\begin{aligned} \bar{\dot{x}}(t) = 0,5[ & A_k \tilde{x}_k + b_k u_k + h_k f_k + A_k \tilde{x}_{k+1} - \\ & - A_k \tilde{x}_{k+1} + A_{k+1} \tilde{x}_{k+1} + b_{k+1} u_{k+1} + h_{k+1} f_{k+1} + \\ & + b_k u_k - b_k u_k + h_k f_k - h_k f_k]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь для краткости введены обозначения:

$$A_k = A(\tilde{x}_k), \quad b_k = b(\tilde{x}_k), \quad h_k = h(\tilde{x}_k), \quad f_k = f(kT).$$

Добавленные разности  $A_k \tilde{x}_{k+1} - A_k \tilde{x}_{k+1}, b_k u_k - b_k u_k, h_k f_k - h_k f_k$ , очевидно, не изменяют значения  $\bar{\dot{x}}(t)$ , но позволяют представить выражение (5) следующим образом:

$$\bar{\dot{x}}(t) = 0,5[A_k \tilde{x}_k + A_k \tilde{x}_{k+1} + 2b_k u_k + 2h_k f_k] + \varepsilon(\tilde{x}_k), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tilde{x}_k) = 0,5[ & (A_{k+1} - A_k) \tilde{x}_{k+1} + \\ & + b_{k+1} u_{k+1} - b_k u_k + h_{k+1} f_{k+1} - h_k f_k]. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (6) в равенство (4) и выполняя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + 0,5T[ & A(\tilde{x}_k) \tilde{x}_k + A(\tilde{x}_k) \tilde{x}_{k+1}] + \\ & + Tb(\tilde{x}_k) u_k + Th(\tilde{x}_k) f_k + T\varepsilon(\tilde{x}_k). \end{aligned} \quad (7)$$

Как видно из соотношения (6), величина  $T\varepsilon(\tilde{x}_k)$  зависит от разности значений  $\tilde{x}_{k+1}$  и  $\tilde{x}_k$  вектора дискретной модели (7), причем, если при  $f_k = 0$  вектор  $\tilde{x}_k \rightarrow 0$ , то и величина  $T\varepsilon(\tilde{x}_k) \rightarrow 0$ , поэтому далее она не учитывается. При этом из соотношения (7) следует нелинейное разностное уравнение

$$\begin{aligned} [E - 0,5TA(\tilde{x}_k)] \tilde{x}_{k+1} = \\ = [E + 0,5TA(\tilde{x}_k)] \tilde{x}_k + Tb(\tilde{x}_k) u_k + Th(\tilde{x}_k) f_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что в получении выражений (5)–(8) заключается предложенная здесь модификация метода трапеций.

Для краткости записей в выражении  $L(\tilde{x}_k, T) = [E - 0,5TA(\tilde{x}_k)]$  заменим  $\tilde{x}_k$  на  $x$  и покажем, что в условиях (2) существуют значения  $T$ , при которых матрица  $L(x, T) = [E - 0,5TA(x)]$  имеет обратную.

**Лемма 1.** Если матрица  $A(x)$ , являясь системной матрицей квазилинейной модели  $\dot{x} = A(x)x$ , удовлетворяет условию (2), то существует конечное  $T > 0$  такое, что матрица  $L(x) = [E - 0,5TA(x)]$  при всех  $x \in \Omega_d$  имеет обратную матрицу.

*Доказательство.* Прежде всего отметим, что если  $n = 1$ , т. е.  $A(x) = a(x)$ , то значение  $T$ , при котором выполняется условие теоремы, можно определить выражением  $T = 2\gamma / \max_x |a(x)|$ , где  $0 < \gamma < 1$ . Здесь  $x \in \Omega_{d+} \in \Omega_d$ , а  $\Omega_{d+}$  — подобласть  $\Omega_d$ , во всех точках которой, кроме точки  $x = 0$ , функция  $a(x) \neq 0$ ; поэтому далее будем считать, что  $n > 1$ .

В условиях леммы 1 ( $n \times n$ )-мерная матрица  $A(x) = [a_{ij}(x)]$  удовлетворяет условиям (2), поэтому при всех  $i = 1, 2, \dots, n$  существуют и являются ограниченными величины [18, с. 190–192]

$$R_A(x) = \max_{i=1, \dots, n} R_{A,i}(x), \quad \text{а также}$$

$$\begin{aligned} R_{A,i}(x) = \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x)| = \\ = |a_{ii}(x)| + K_{A,i}(x) \leq n\zeta_A(x) < \infty, \end{aligned} \quad (9)$$

$$K_{A,i}(x) = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}(x)|.$$

Элементы матрицы  $L(x, T) = [E - 0,5TA(x)] = [l_{ij}(x, T)]$  и соответствующие ей величины  $R_{L,i}(x)$  определяются выражениями

$$l_{ij}(x, T) = \begin{cases} 1 - 0,5T a_{ii}(x), & j = i, \\ -0,5T a_{ij}(x), & i \neq j; \end{cases} \quad (10)$$

$$R_{L,i}(x, T) = |1 - 0,5T a_{ii}(x)| + 0,5T K_{A,i}(x).$$

Для доказательства леммы используются выражения 2.2.3 из книги [18, с. 193], в которых фигурируют величины  $P_{L,i}(x, T)$  и  $k_L(x, T)$ , относящиеся к матрице  $L(x, T)$ . С учетом (9) и (10) эти величины определяются выражениями:

$$\begin{aligned} P_{L,i}(x, T) &= 0,5T K_{A,i}(x), \\ k_L(x, T) &= \min_{i=1, \dots, n} [|l_{ii}(x, T)| - P_{L,i}(x, T)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Положим  $T = 2\gamma/R_A(x)$  и найдем оценки величины  $k_L(x, T)$  в зависимости от значений  $a_{ij}(x)$  и  $K_{A,i}(x)$ . С учетом выражений (9)–(11) получим:

$$k_L(x, T) = \begin{cases} 1 - \gamma\beta_{i1} - \gamma\beta_{i3}, & a_{ii}(x) > 0, K_{A,i}(x) \neq 0, \\ 1 - \gamma\beta_{i1} - 0, & a_{ii}(x) > 0, K_{A,i}(x) = 0, \\ 1 - 0 - \gamma\beta_{i4}, & a_{ii}(x) = 0, K_{A,i}(x) \neq 0, \\ 1 + \gamma\beta_{i1} - \gamma\beta_{i3}, & a_{ii}(x) < 0, K_{A,i}(x) \neq 0, \\ 1 + \gamma\beta_{i2} - 0, & a_{ii}(x) < 0, K_{A,i}(x) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= \frac{|a_{ii}(x)|}{R_A(x)} \leq 1; \\ \beta_{i2} &= \frac{|a_{ii}(x)|}{\bar{a}(x)} = \begin{cases} 1, & |a_{ii}(x)| = \bar{a}(x), \\ < 1, & |a_{ii}(x)| \neq \bar{a}(x); \end{cases} \\ \beta_{i3} &= \frac{K_{A,i}(x)}{R_A(x)} \leq 1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta_{i4} = \frac{K_{A,i}(x)}{\bar{K}_A(x)} = \begin{cases} 1, & K_{A,i}(x) = \bar{K}_A(x), \\ < 1, & K_{A,i}(x) \neq \bar{K}_A(x); \end{cases} \quad (14)$$

$$\bar{a}(x) = \max_{i=1, \dots, n} |a_{ii}(x)|, \quad \bar{K}_A(x) = \max_{i=1, \dots, n} K_{A,i}(x).$$

Отметим, что случай одновременного выполнения условий  $a_{ii}(x) = 0$  и  $K_{A,i}(x) = 0$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$  здесь не рассматривается, так как в этом случае элементы системы не будут взаимосвязаны. Однако в отдельных  $i$ -х строках матрицы  $A(x)$  эти условия могут выполняться. В соотношении (12) эти случаи опущены, так как при этом  $|l_{ii}(x, T)| = 1$ , а  $P_{L,i}(x, T) = 0$ , т. е.  $k_L(x, T) = 1$ .

Величины  $\beta_{iv}$ ,  $v = 1, 2, 3, 4$ , в соответствии с выражениями (13), (14) не больше 1, поэтому согласно соотношению (12) наиболее вероятно выполнение условия  $k_L(x, T) = 0$  при  $a_{ii}(x) < 0$ ,  $K_{A,i}(x) \neq 0$ . Однако из выражений (13) и (14) следует, что в этом случае

$$\beta_{i1} - \beta_{i3} = \frac{|a_{ii}(x)| - K_{A,i}(x)}{\max_{v \in [1, \dots, n]} (|a_{vv}(x)| + K_{A,v}(x))}, \quad i \in [1, n]. \quad (15)$$

Отсюда следует, что  $|\beta_{i1} - \beta_{i3}| \leq 1$  при всех  $i \in [1, n]$ . Таким образом, если  $\gamma < 1$  и  $T = 2\gamma/R_A(x)$ , то матрица  $L(x, T) = [E - 0,5TA(x)]$  удовлетворяет условию  $k_L(x, T) \neq 0$ . Следовательно, в соответствии с неравенством 2.2.3 [18, с. 193]  $\det L(x, T) \neq 0$ , что соответствует утверждению леммы 1. *Лемма доказана.*

Значение периода дискретизации  $T = 2\gamma/R_A(x)$  принято лишь для доказательства его существования в общем случае. На практике допустимое значение  $T$ , определяемое КЛМ конкретного объекта, как правило оказывается достаточно большим. Например, КЛМ парогенератора [19] при некоторых условиях может быть представлена в виде

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0,007 \\ 0 & 0 & -0,0067 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (16)$$

где  $a_{11} = 0,87\psi_1 - 0,09$ ,  $a_{12} = 0,87\psi_2$ ,  $a_{21} = -0,087\psi_1$ ,  $a_{22} = 0,087\psi_2$ ,  $\gamma_{\text{п}} = 3,4673$ ,

$$\psi_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = 0, \text{ иначе,} \\ x_1^{-1}(\gamma_{\text{п}} - x_1)^{0,5}, & \end{cases}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 = 0, \text{ иначе,} \\ x_2^{-1}(\gamma_{\text{п}} + x_2 - x_1)^{0,5}. & \end{cases}$$

В этом случае допустимые значения  $T$  ограничены значением 2,28, т. е. можно принять значения  $T$  значительно большие тех  $\Delta t$ , что используются при решении дифференциальных уравнений на ЦВМ с использованием соотношений Рунге—Кутты и др. [17].

Пусть  $T$  выбрано таким, что

$$\det[E - 0,5TA(\tilde{x}_k)] \neq 0,$$

тогда из выражения (8) и второго уравнения (1) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= A_d(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k + b_d(\tilde{x}_k)u_k + h_d(\tilde{x}_k)f_k; \\ \tilde{y}_k &= c^T(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$A_d(\tilde{x}_k) = [E - 0,5TA(\tilde{x}_k)]^{-1}[E + 0,5TA(\tilde{x}_k)]; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} b_d(\tilde{x}_k) &= [E - 0,5TA(\tilde{x}_k)]^{-1}Tb(\tilde{x}_k); \\ h_d(\tilde{x}_k) &= [E - 0,5TA(\tilde{x}_k)]^{-1}Th(\tilde{x}_k). \end{aligned} \quad (19)$$

Разностное уравнение (17) является результатом квазилинейной дискретизации уравнений непрерывного объекта с дифференцируемыми нелинейностями. Фактически, метод квазилинейной дискретизации дает дискретную квазилинейную модель (ДКЛМ) нелинейных объектов, которую можно рассматривать как приближенную модель нелинейных объектов с дифференцируемыми нелинейностями. Решения этой модели отличаются от решений точной модели (1) на величину  $T\varepsilon(\tilde{x}_k)$ , стремящуюся к нулю при  $f_k \equiv 0$  и  $\tilde{x}_k \rightarrow 0$ .

По форме модель (17) аналогична непрерывной квазилинейной модели [15], что позволяет алгебраическим полиномиально-матричным (АПМ) методом [20] синтезировать дискретную систему управления с устойчивым положением равновесия, в которой  $\tilde{x}_k \rightarrow 0$  при  $g_k = g(kT) \equiv 0$  и  $f_k \equiv 0$ . Очевидно, в такой системе с ростом  $k$  ДКЛМ будет становиться все более точным приближением нелинейного непрерывного объекта. Следовательно, можно предположить, что дискретное управление, стабилизирующее положение равновесия ДКЛМ, будет стабилизировать и положение равновесия гибридной системы управления непрерывным нелинейным объектом, аналогично тому, как классическое управление, синтезированное по линейным уравнениям первого приближения, стабилизирует и соответствующую нелинейную систему. Покажем эту возможность.

### Система управления для дискретной квазилинейной модели

Следуя [20], определим дискретное управление для модели (17) выражением

$$u_k = k_g(\tilde{x}_k)g_k - k^T(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k, \quad (20)$$

где  $k^T(\tilde{x}_k) = [k_1(\tilde{x}_k) \ k_2(\tilde{x}_k) \ \dots \ k_n(\tilde{x}_k)]$ ;  $k_g(\tilde{x}_k)$  и  $k_i(\tilde{x}_k)$  — функциональные коэффициенты, подлежащие определению;  $g_k = g(kT)$ ,  $g(t)$  — задающее воздействие. Для вывода расчетных соотношений подставим выражение (20) в первое соотношение (17). В результате получим

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= D(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k + b_d(\tilde{x}_k)k_g(\tilde{x}_k)g_k + h_d(\tilde{x}_k)f_k, \\ y_k &= c^T(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$D(\tilde{x}_k) = A_d(\tilde{x}_k) - b_d(\tilde{x}_k)k^T(\tilde{x}_k). \quad (22)$$

Воспользовавшись формулой (П.25) [21, с. 233], характеристический полином

$$D(z, \tilde{x}_k) = \det[zE - D(\tilde{x}_k)]$$

матрицы  $D(\tilde{x}_k)$  представим в виде

$$D(z, \tilde{x}_k) = A_d(z, \tilde{x}_k) + k^T(\tilde{x}_k)\text{adj}[zE - A_d(\tilde{x}_k)]b_d(\tilde{x}_k)$$

или

$$D(z, \tilde{x}_k) = A_d(z, \tilde{x}_k) + \sum_{i=1}^n k_i(\tilde{x}_k)V_i(z, \tilde{x}_k); \quad (23)$$

$$A_d(z, \tilde{x}_k) = \det[zE - A_d(\tilde{x}_k)] = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(\tilde{x}_k)z^j; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} V_i(z, \tilde{x}_k) &= e_i^T \text{adj}[zE - A_d(\tilde{x}_k)]b_d(\tilde{x}_k) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} v_{i,j}(\tilde{x}_k)z^j, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $e_i$  —  $i$ -й столбец единичной  $(n \times n)$ -мерной матрицы  $E$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Как и в непрерывном случае [20], полином  $D(z, \tilde{x}_k)$  в выражении (23) заменяется полиномом  $D^*(z)$ , корни которого вещественные, неотрицательные, различные и меньше единицы, т. е.

$$D^*(z) = \prod_{i=1}^n (z - \sigma_i^*) = z^n + \delta_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \delta_1^* z + \delta_0^*. \quad (26)$$

Здесь

$$0 \leq \sigma_i^* < 1 - \eta_d^*, \quad |\sigma_i^* - \sigma_\zeta^*| > \nu_1, \quad i \neq \zeta, \quad i, \zeta = [1, n], \quad (27)$$

$\nu_1, \eta_d^*$  — положительные числа,  $\eta_d^* < 1$ . Численные значения корней  $z_i^* = \sigma_i^*$  выбираются исходя из требуемого быстродействия синтезируемой системы управления. Заменяя в соотношении (23) полином  $D(z, \tilde{x}_k)$  полиномом  $D^*(z)$  и перенеся полином  $A_d(z, \tilde{x}_k)$  в левую часть равенства (23), получим выражения

$$R(z, \tilde{x}_k) = \sum_{i=1}^n k_i(\tilde{x}_k)V_i(z, \tilde{x}_k); \quad (28)$$

$$\begin{aligned} R(z, \tilde{x}_k) &= D^*(z) - A_d(z, \tilde{x}_k) = \\ &= \rho_{n-1}(\tilde{x}_k)z^{n-1} + \rho_{n-2}(\tilde{x}_k)z^{n-2} + \dots + \rho_0(\tilde{x}_k), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\rho_i(\tilde{x}_k) = \delta_i^* - \alpha_i(\tilde{x}_k)$ . Выражение (28) является полиномиальным уравнением относительно неизвестных функциональных коэффициентов  $k_i(\tilde{x}_k)$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в левой и правой части этого равенства с учетом соотношений (25) и (29), получим систему алгебраических уравне-

ний [15, 21]. В векторно-матричной форме эта система имеет вид

$$G(\tilde{x}_k)k(\tilde{x}_k) = d(\tilde{x}_k), \quad (30)$$

где

$$G = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{20} & \dots & v_{n,0} \\ v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & \dots & v_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}.$$

В выражениях (31) аргумент  $\tilde{x}_k$  матрицы и всех функций опущен для краткости записи.

Отметим, что решение системы (30), (31) существует при тех же условиях, что и в случае постоянных коэффициентов, т. е. матрица  $G(\tilde{x}_k)$  должна быть квадратной, а ее определитель  $\det G(\tilde{x}_k) \neq 0$ . Первое условие выполняется по построению этой матрицы, а второе выполняется, если модель (17) удовлетворяет условию управляемости

$$\begin{aligned} & |\det U(\tilde{x}_k)| = \\ & = |\det[b_d(\tilde{x}_k) A_d(\tilde{x}_k)b_d(\tilde{x}_k) \dots A_d^{n-1}(\tilde{x}_k)b_d(\tilde{x}_k)]| \geq \\ & \geq \zeta_U > 0, \quad \tilde{x}_k \in \Omega_U, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\zeta_U$  — некоторое не очень малое число;  $\Omega_U$  — окрестность точки  $\tilde{x}_k = 0$ , в которой выполняется неравенство (32).

Будем предполагать, что период дискретизации  $T$  выбран таким, что непустой является замкнутая область  $\Omega_{Ud} = (\Omega_U \cap \Omega_d) \in R^n$ , в которой выполняются условия (2) и (32). В этом случае решение системы (30) дает вектор  $k(\tilde{x}_k)$  из управления (20), при котором матрица  $D(\tilde{x}_k)$  (22) замкнутой системы (21) имеет собственные числа, равные корням полинома  $D^*(z)$  (26), т. е. постоянные при всех  $\tilde{x}_k \in \Omega_U$ . Рассмотрим соответствующую (21) при  $g_k \equiv 0$  и  $f_k \equiv 0$  свободную дискретную систему

$$\tilde{x}_{k+1} = D(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k, \quad \tilde{x}_k \in \Omega_{Ud}, \quad (33)$$

где  $\tilde{x}_k = \tilde{x}(kT, \tilde{x}_0)$  — некоторое решение системы (33), начинающееся в точке  $\tilde{x}_0 \in \Omega_{Ud}$ .

**Теорема 1.** Если собственные числа матрицы  $D(\tilde{x}_k)$  при всех  $\tilde{x}_k \in \Omega_{Ud}$  удовлетворяют условиям (27), то положение равновесия  $\tilde{x}_k = 0$

системы (33) является асимптотически устойчивым в большом, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = 0, \quad \forall \tilde{x}_k \in \Omega_\Theta \in \Omega_{Ud}. \quad (34)$$

Здесь  $\Omega_\Theta$  — окрестность точки  $\tilde{x}_k = 0$  пространства  $R^n$ , внешняя граница которой определяется решением уравнения

$$C - \Theta(\tilde{x}_k) = 0, \quad (35)$$

где  $C$  и  $\Theta(\tilde{x}_k)$  —  $(n \times n)$ -мерные матрицы из выражений (37) и (39), приведенных ниже.

*Доказательство теоремы 1.* Представим систему (33) следующим образом:

$$\tilde{x}_{k+1} = [D(0) + \Upsilon(\tilde{x}_k)]\tilde{x}_k, \quad (36)$$

где  $\Upsilon(\tilde{x}_k)$  — матрица, определяемая выражением  $\Upsilon(\tilde{x}_k) = D(\tilde{x}_k) - D(0)$ . Очевидно, при  $\tilde{x}_k \rightarrow 0$  матрица  $\Upsilon(\tilde{x}_k) \rightarrow 0$ . По построению матрицы  $D(\tilde{x}_k)$  ее собственные числа являются постоянными при всех  $\tilde{x}_k \in \Omega_\Theta \in \Omega_{Ud}$  и по модулю меньше единицы, поэтому собственные числа матрицы  $D(0)$  по модулю также меньше единицы.

Рассмотрим функцию  $V(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k^T \Lambda \tilde{x}_k$ , где  $\Lambda$  — симметричная матрица, являющаяся решением уравнения

$$D^T(0)\Lambda D(0) - \Lambda = -C. \quad (37)$$

Здесь  $C$  — симметричная положительно определенная матрица. Выражение (37) является дискретным уравнением Ляпунова, поэтому в силу известной теоремы Ляпунова матрица  $\Lambda$  является положительно определенной [22, р. 131].

На траекториях системы (36) или, что то же самое, (33) разность  $\Delta V(\tilde{x}_k) = V(\tilde{x}_{k+1}) - V(\tilde{x}_k)$  с учетом (37) определяется выражением

$$\Delta V(\tilde{x}_k) = -\tilde{x}_k^T C \tilde{x}_k + \tilde{x}_k^T \Theta(\tilde{x}_k) \tilde{x}_k, \quad (38)$$

где

$$\Theta(\tilde{x}_k) = [2\Upsilon^T(\tilde{x}_k)\Lambda D(0) + \Upsilon^T(\tilde{x}_k)\Lambda \Upsilon(\tilde{x}_k)]. \quad (39)$$

При  $\tilde{x}_k \rightarrow 0$  матрицы  $\Upsilon(\tilde{x}_k) \rightarrow 0$  и  $\Theta(\tilde{x}_k) \rightarrow 0$ , а матрица  $[C - \Theta(\tilde{x}_k)] \rightarrow C$ . Так как  $C$  является положительно определенной матрицей, то при всех  $\tilde{x}_k$ , таких что  $\tilde{x}_k^T C \tilde{x}_k > |\tilde{x}_k^T \Theta(\tilde{x}_k) \tilde{x}_k|$ , согласно (38), (39) разность  $\Delta V(\tilde{x}_k)$  функции Ляпунова  $V(\tilde{x}_k)$  на траекториях системы (33) является отрицательно определенной. Следовательно, положение равновесия этой системы в условиях теоремы 1 является асимптотически

устойчивым в большом, т. е. выполняется условие (34). *Доказательство окончено.*

Для оценки точности функционирования многих устойчивых систем управления большое значение имеет разность между задающим воздействием и выходной управляемой переменной в установившемся режиме. В случае дискретных систем, в частности типа (21), характер изменения этой разности определяется матрицей  $D^\circ(\tilde{x}_k) = [E - D(\tilde{x}_k)]$ . Следующей леммой устанавливаются условия невырожденности этой матрицы.

**Лемма 2.** Если собственные числа некоторой матрицы  $D(\tilde{x}_k)$  при всех  $\tilde{x}_k \in \Omega_\ominus$  удовлетворяют условиям (27), то матрица  $D^\circ(\tilde{x}_k) = [E - D(\tilde{x}_k)]$  является невырожденной, т. е.  $\det D^\circ(\tilde{x}_k) \neq 0$  также при всех  $\tilde{x}_k \in \Omega_\ominus$ .

*Доказательство леммы 2.* По условиям леммы собственные числа  $z_i^* = \sigma_i^*$  матрицы  $D(\tilde{x}_k)$  при всех  $\tilde{x}_k \in \Omega_{Ud}$  являются различными, поэтому существуют невырожденные матрицы  $S(\tilde{x}_k)$ ,  $S^{-1}(\tilde{x}_k)$ , такие что  $S^{-1}(\tilde{x}_k)S(\tilde{x}_k) = E$  и  $S^{-1}(\tilde{x}_k)D(\tilde{x}_k)S(\tilde{x}_k) = \text{diag}\{\sigma_1^* \ \sigma_2^* \ \dots \ \sigma_n^*\}$  [18, с. 84]. Следовательно,

$$S^{-1}(\tilde{x}_k)[E - D(\tilde{x}_k)]S(\tilde{x}_k) = \text{diag}\{1 - \sigma_1^* \ 1 - \sigma_2^* \ \dots \ 1 - \sigma_n^*\}. \quad (40)$$

По условиям (27)  $\eta_c^* < 1$ ,  $0 \leq \sigma_i^* < 1 - \eta_c^*$ ,  $i = [1, n]$ , поэтому из (40) следует равенство  $\det D^\circ(\tilde{x}_k) \neq 0$ . *Лемма 2 доказана.*

Если свободная система (33) — устойчивая, то существуют воздействия  $g_k = g_0 1(k)$  и  $f_k = f_0 1(k)$ , с достаточно малыми значениями  $g_0, f_0$ , такие что в дискретной системе (21) при  $k_g = k_{d,g}$  возникает установившийся режим, в котором  $\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k$  с пренебрежимо малой ошибкой<sup>1</sup>. Обозначим  $\tilde{x}^\circ, \tilde{y}^\circ$  и  $\delta_g^\circ$  установившиеся значения переменных  $\tilde{x}_k, \tilde{y}_k$  и разности  $\delta_{g,k} = g_k - y_{g,k}$  при  $f_k \equiv 0$ . Если  $g_k = g_0 1(k)$  и  $f_k \equiv 0$ , то из (21) в установившемся режиме следует равенство

$$[E - D(\tilde{x}^\circ)]\tilde{x}^\circ = b_d(\tilde{x}^\circ)k_{d,g}(\tilde{x}^\circ)g_0. \quad (41)$$

В силу условий леммы 2 матрица  $D^\circ(\tilde{x}^\circ) = [E - D(\tilde{x}^\circ)]$  имеет обратную, поэтому из (41) с учетом второго равенства (21) и формулы для обратной матрицы [21, с. 41] выводим

$$\tilde{y}^\circ = \frac{c^T(\tilde{x}^\circ)[\text{adj} D^\circ(\tilde{x}^\circ)]b_d(\tilde{x}^\circ)k_{d,g}(\tilde{x}^\circ)}{\det D^\circ(\tilde{x}^\circ)} g_0. \quad (42)$$

<sup>1</sup>В этом режиме при  $f_k \equiv 0$  и  $k \rightarrow \infty$  величина  $\varepsilon(\tilde{x}_k)$  в выражении (7) стремится к нулю, т. е.  $\varepsilon(\tilde{x}_k) \rightarrow 0$ .

Поскольку  $\tilde{x}^\circ = \lim x_k$  при  $k \rightarrow \infty$ , то из равенства (42) вытекает условие обеспечения ненулевого значения управляемой величины  $\tilde{y}^\circ$  дискретной нелинейной системы (21), т. е. условие невырожденности по управлению ДКЛМ (17):

$$\gamma_d(\tilde{x}_k) = c^T(\tilde{x}_k)[\text{adj} D^\circ(\tilde{x}_k)]b_d(\tilde{x}_k) \neq 0, \quad (43)$$

$$\forall \tilde{x}_k \in \Omega_\ominus \in \Omega_{Ud}.$$

Если условие (43) выполняется, то из равенства (42) следует выражение для коэффициента  $k_{d,g}(\tilde{x}_k)$  из (20), при котором статическая ошибка  $\delta_g^\circ = g_0 - y_k^\circ$  дискретной нелинейной системы (21) по задающему воздействию  $g_k = g_0 1(k)$  будет равна нулю:

$$k_{d,g}(\tilde{x}_k) = \det D^\circ(\tilde{x}_k) / \gamma_d(\tilde{x}_k). \quad (44)$$

Соотношения (20), (24)—(31) и (44) при выполнении условий управляемости (32) и невырожденности по управлению (43) являются алгоритмической базой метода синтеза дискретных нелинейных систем управления (21), (22) объектами, заданными дискретными уравнениями типа (17). Это могут быть как уравнения естественных дискретных нелинейных объектов управления, так и уравнения, полученные в результате дискретизации нелинейных непрерывных объектов.

Далее рассмотрим применение полученного по приведенным выше соотношениям при  $\tilde{x}_k = x_k$  дискретного управления  $u_k = u_k(x_k)$  к КЛМ (1) некоторого нелинейного непрерывного объекта.

### Гибридная система

Если в равенстве (20) вектор  $\tilde{x}_k$  заменить на  $x_k = x(kT)$ , а  $k_g$  на  $k_{r,g}$  то получим дискретное управление непрерывным объектом, представленным КЛМ (1):

$$u_{r,k} = k_{r,g}(x_k)g_k - k^T(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (45)$$

где вектор  $k(x_k)$  по-прежнему определяется выражениями (18), (19) и (24)—(31), в которых вектор  $\tilde{x}_k$  заменен на  $x_k = x(kT)$ . Заменяя в (1) управление  $u$  на  $u_{r,g}$  из (45), приходим к замкнутой системе, которая описывается уравнениями

$$\dot{x} = A(x)x - b(x)k^T(x_k)x_k + b(x)k_{r,g}(x_k)g_k + h(x)f, \quad (46)$$

$$kT \leq t < (k+1)T, \quad y = c^T(x)x,$$

где при  $t = kT$

$$A(x_k) - b(x_k)k^T(x_k) = D_\Gamma(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (47)$$

и является, очевидно, гибридной [3–5]. При этом значение периода дискретизации  $T$  может быть значительно большим по сравнению со значениями, которые принимаются при моделировании нелинейных систем, синтезированных как непрерывные [1, 2, 22].

Применительно к системе (46) условие обеспечения ненулевого значения управляемой переменной  $y = y(t)$ , т. е. условие невырожденности по управлению непрерывного нелинейного объекта, представленного КЛМ (1), имеет вид

$$\gamma_\Gamma(x) = c^T(x)D_\Gamma^{-1}(x)b(x) \neq 0, \quad (48)$$

$$\forall x \in \Omega_\Theta \in \Omega_{Ud}.$$

При выполнении условия (48) коэффициент  $k_{\Gamma,g}(x_k)$  в (45) определяется выражением

$$k_{\Gamma,g}(x_k) = -1/\gamma_\Gamma(x_k). \quad (49)$$

Полученные результаты составляют теоретическую базу метода квазилинейной дискретизации нелинейных объектов и метода синтеза дискретных законов управления как дискретными нелинейными объектами, так и непрерывными нелинейными объектами, которые могут быть представлены квазилинейными моделями.

Отметим, что в случае линейных одномерных систем с постоянными параметрами условия невырожденности по управлению (43) и (48) обычно выполняются автоматически, так как в противном случае канал "задающее воздействие—выход" таких систем, фактически, будет разомкнутым (и очевидным). В случае же нелинейных систем эти условия зависят от переменных состояния КЛМ или ДКЛМ и могут как выполняться, так и не выполняться.

Например, в теории нелинейных систем очень часто рассматривается тестовый объект "перевернутый маятник на тележке", где управлением является перемещение тележки [22]. При этом заданное значение угла отклонения маятника от вертикали, как правило, принимается равным нулю. Обычно авторы не объясняют причину этого, но на самом деле это связано с тем, что математические модели этого объекта не удовлетворяют условию (48), т. е. нулевое значение угла отклонения маятника от вертикали — это не заданное положение

маятника, а установившееся значение этой величины, обусловленное устойчивостью положения равновесия системы; обеспечить же ненулевое значение угла отклонения маятника при моделях типа используемой в работе [22] невозможно по указанной выше причине.

### Методический пример

В качестве примера применения метода квазилинейной дискретизации синтезируем сначала дискретную нелинейную систему управления ДКЛМ, соответствующей простому нелинейному модельному объекту второго порядка, уравнения которого имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1 \arctg(2x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2 \sin x_2 + 2u, \quad y = 0,5x_1, \end{aligned} \quad (50)$$

а затем гибридную систему управления этим же объектом.

Переходя к решению, прежде всего запишем непрерывную КЛМ заданного объекта (50) в виде (1), где  $f = 0$ :

$$A(x) = \begin{bmatrix} -\arctg(2x_1) & 1 \\ 0 & \sin x_2 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ограниченность элементов  $a_{ij}(x)$  системной матрицы  $A(x)$  (51) является очевидной, т. е. существует ДКЛМ (17) при  $f = 0$  и некотором периоде  $T$ .

Заменяя в (51)  $x_i$  на  $\tilde{x}_{i,k}$ , легко установить, что значение периода дискретизации, допустимое по условию  $\det[E - 0,5TA(\tilde{x}_k)] \neq 0$ , в данном случае ограничено значением  $T_{\max} = 0,649$  с. Примем  $T = 0,4$  с и для краткости введем обозначения:  $\varphi = \arctg(2\tilde{x}_1)$ ,  $Si = \sin \tilde{x}_{2,k}$ . По формулам (18) и (19) с учетом (51) найдем матрицу и вектор дискретной ДКЛМ (17) объекта (50):

$$A_d(\tilde{x}_k) = \begin{bmatrix} a_{11}(\tilde{x}_k) & a_{12}(\tilde{x}_k) \\ 0 & a_{22}(\tilde{x}_k) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$b_d(\tilde{x}_k) = \begin{bmatrix} b_{d1}(\tilde{x}_k) \\ b_{d2}(\tilde{x}_k) \end{bmatrix},$$

где  $a_{11}(\tilde{x}_k) = (1 - 0,2Si)(1 - 0,2\varphi)/\Delta_L$ ;  
 $a_{12}(\tilde{x}_k) = 0,4/\Delta_L$ ;  
 $a_{22}(\tilde{x}_k) = (1 + 0,2\varphi)(1 + 0,2Si)/\Delta_L$   
и  $b_{d1}(\tilde{x}_k) = 0,4/\Delta_L$ ;  $b_{d2}(\tilde{x}_k) = (2 + 0,4\varphi)/\Delta_L$ ;  
 $\Delta_L = (1 + 0,2\varphi)(1 - 0,2Si)$ .

По формуле (32) при  $n = 2$  имеем

$$U(\tilde{x}_k) = \frac{1}{\Delta_L^2} \times \begin{bmatrix} 0,4\Delta_L & 0,4(3 + 0,2\varphi - 0,2\text{Si} - 0,04\varphi\text{Si}) \\ 2\Delta_L(1 + 0,2\varphi) & 2(1 + 0,2\text{Si})(1 + 0,2\varphi)^2 \end{bmatrix}.$$

Так как  $|\arctg(2\tilde{x}_1)| \leq \pi/2$ , а  $|\sin x_2| \leq 1$ , то  $|\det U(\tilde{x}_k)| = |-1,6/\Delta_L^2| > 0,643$ , т. е. при  $T = 0,4$  с условие (32) выполняется, и задача синтеза устойчивой дискретной системы управления для ДКЛМ (17), (52) имеет решение.

Из-за нелинейного характера элементов матрицы и вектора (52) решение данной задачи синтеза возможно только в численной форме. В связи с этим далее промежуточные выражения приводятся с использованием принятых обозначений элементов матрицы  $A_d(\tilde{x}_k)$  и вектора  $b_d(\tilde{x}_k)$ . Прежде всего по формулам (24), (25) находятся полиномы

$$A_d(z, \tilde{x}_k) = z^2 + \alpha_1(\tilde{x}_k)z + \alpha_0(\tilde{x}_k), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} V_1(z, \tilde{x}_k) &= v_{11}(\tilde{x}_k)z + v_{10}(\tilde{x}_k), \\ V_2(z, \tilde{x}_k) &= v_{21}(\tilde{x}_k)z + v_{20}(\tilde{x}_k), \end{aligned} \quad (54)$$

где  $\alpha_1(\tilde{x}_k) = -a_{11}(\tilde{x}_k) - a_{22}(\tilde{x}_k)$ ;

$\alpha_0(\tilde{x}_k) = a_{11}(\tilde{x}_k)a_{22}(\tilde{x}_k)$ ;

$v_{10}(\tilde{x}_k) = a_{12}(\tilde{x}_k)b_{d2}(\tilde{x}_k) - a_{22}(\tilde{x}_k)b_{d1}(\tilde{x}_k)$ ;

$v_{11}(\tilde{x}_k) = b_{d1}(\tilde{x}_k)$ ;  $v_{20}(\tilde{x}_k) = -a_{11}(\tilde{x}_k)b_{d2}(\tilde{x}_k)$ ;

$v_{21}(\tilde{x}_k) = b_{d2}(\tilde{x}_k)$ .

В данном случае  $n = 2$ , поэтому по (26) формируется полином  $D^*(z) = z^2 + \delta_1^*z + \delta_0^*$  с различными корнями  $z_1^* = \sigma_1^*$  и  $z_2^* = \sigma_2^*$ , удовлетворяющими условию (27), а затем по выражению (29) с учетом (53) находится разность

$$R(z, \tilde{x}_k) = \rho_1(\tilde{x}_k)z + \rho_0(\tilde{x}_k), \quad (55)$$

где  $\rho_1(\tilde{x}_k) = \delta_1^* - \alpha_1(\tilde{x}_k)$ ,  $\rho_0(\tilde{x}_k) = \delta_0^* - \alpha_0(\tilde{x}_k)$ . На основе коэффициентов полиномов (54) и (55) формируется система (30):

$$\begin{bmatrix} v_{10}(\tilde{x}_k) & v_{20}(\tilde{x}_k) \\ v_{11}(\tilde{x}_k) & v_{21}(\tilde{x}_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(\tilde{x}_k) \\ k_2(\tilde{x}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0(\tilde{x}_k) \\ \rho_1(\tilde{x}_k) \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Решение системы (56) дает значения коэффициентов  $k_1(\tilde{x}_k)$  и  $k_2(\tilde{x}_k)$ , подставив которые в формулу (22) с учетом (52), получим матрицу  $D(\tilde{x}_k)$ , а затем матрицу  $D^\circ(\tilde{x}_k) = E - D(\tilde{x}_k)$ . В данном случае условие (43) — невырожденности по управлению ДКЛМ — выполняется, поэтому по формуле (44) находится коэффициент

$$k_{d,g}(\tilde{x}_k) = \det D^\circ(\tilde{x}_k) / \gamma_d(\tilde{x}_k). \quad (57)$$

На этом завершается определение управления  $u_{d,k}$  по (20) для ДКЛМ (17), (52). С учетом введенных обозначений это управление имеет вид

$$u_{d,k} = k_{d,g}(\tilde{x}_k)g_k - k_1(\tilde{x}_k)\tilde{x}_{1k} - k_2(\tilde{x}_k)\tilde{x}_{2k}. \quad (58)$$

*Исследование дискретной системы.* Разностное уравнение замкнутой дискретной системы (17) при  $f_k = 0$ , (52), (57), (58) легко моделируется в MATLAB. При этом вычисления всех коэффициентов, а также матрицы  $U(\tilde{x}_k)$  (32) и величины  $\gamma_d(\tilde{x}_k)$  осуществляются на каждом периоде  $T = 0,4$  с. Расчеты выполнялись при различных значениях корней полинома  $D^*(z)$  и различных начальных условиях  $\tilde{x}_0$ . В табл. 1 для примера приведены значения вектора  $\tilde{x}_k^T = [\tilde{x}_{1k} \ \tilde{x}_{2k}]$ , управления  $u_{d,k}$  и выходной величины  $y_{d,k}$  при  $g_k = 0$  и корнях  $z_1^* = 0,2$  и  $z_2^* = 0,3$  полинома  $D^*(z)$  (26). При том же начальном условии, тех же корнях  $z_1^*$ ,  $z_2^*$  и  $g_k = 1(k)$  переменные состояния, управление и выходная величина дискретной нелинейной системы принимают значения, приведенные в табл. 2.

Таблица 1  
Table 1

Переменные системы при  $g_k = 0$   
System variables with  $g_k = 0$

$k$	$\tilde{x}_k^T$	$u_{d,k}$	$y_{d,k}$
0	[1,0000 0,8000]	-0,709	0,5000
1	[0,6721 -0,5883]	0,0395	0,3361
2	[0,2945 -0,3996]	0,0639	0,1473
3	[0,1252 -0,2232]	0,0508	0,0626
4	[0,0506 -0,1071]	0,0298	0,0253
5	[0,0189 -0,0442]	0,0137	0,0095
6	[0,0066 -0,0163]	0,0053	0,0033
7	[0,0022 -0,0056]	0,0019	0,0011

Таблица 2  
Table 2

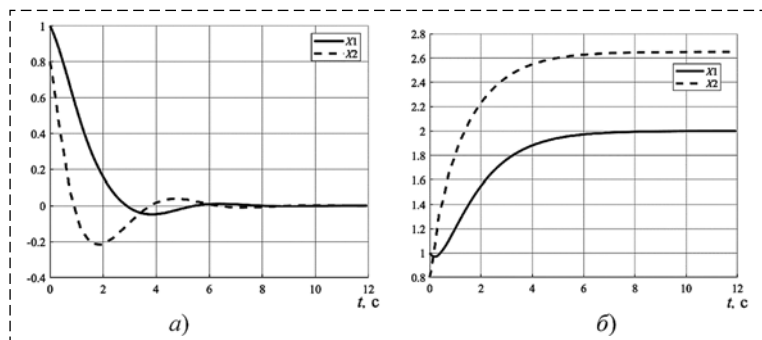
Переменные системы при  $g_k = 1$   
System variables with  $g_k = 1$

$k$	$\tilde{x}_k^T$	$u_{d,k}$	$y_{d,k}$
0	[1,0000 0,8000]	0,7553	0,5000
1	[1,2321 2,8317]	-0,2147	0,6161
2	[1,6610 2,7422]	-0,2297	0,8305
3	[1,8525 2,7066]	-0,2415	0,9263
4	[1,9383 2,6774]	-0,2464	0,9692
5	[1,9896 2,6563]	-0,2491	0,9948
6	[1,9958 2,6535]	-0,2494	0,9979
7	[1,9983 2,6524]	-0,2495	0,9992

На основе полученных данных можно заключить, что дискретное нелинейное управление (58) обеспечивает системе управления ДКЛМ (17), (52) устойчивое в большом положении равновесия. Ее статическая ошибка по задающему воздействию имеет практически нулевое значение.

*Исследование гибридной системы.* С этой целью, выполняя указанные выше замены, придем к управлению (45) в данном случае вида

$$u_{r,k} = k_{r,g}(x_k)g_k - k_1(x_k)x_{1k} - k_2(x_k)x_{2k}. \quad (59)$$

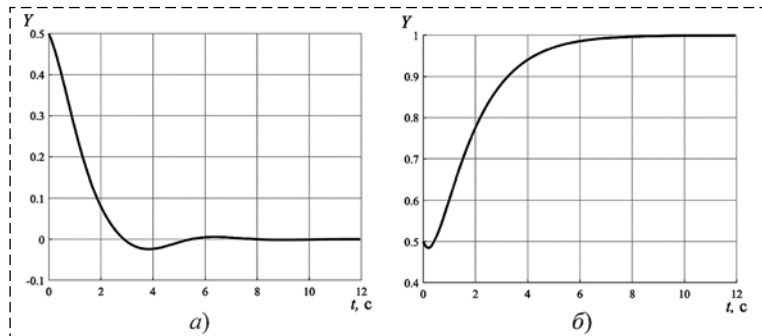


**Рис. 1. Графики переменных состояния:**

*a* — при  $g = 0$ ; *б* — при  $g = 1(t)$

**Fig. 1. Graphs of the state variables:**

*a* — with  $g = 0$ ; *б* — with  $g = 1(t)$

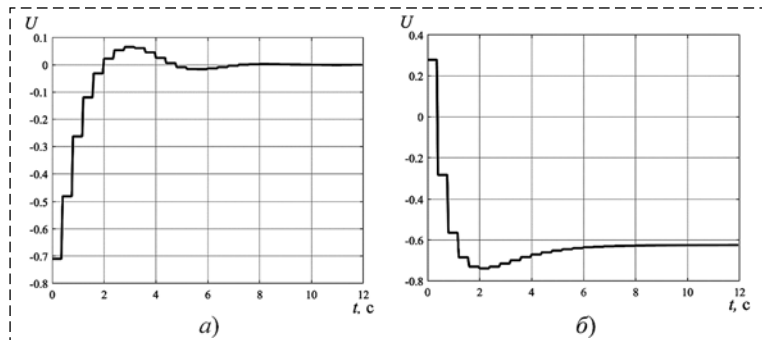


**Рис. 2. Графики выходной переменной:**

*a* — при  $g = 0$ ; *б* — при  $g = 1(t)$

**Fig. 2. Graphs of the output variable:**

*a* — with  $g = 0$ ; *б* — with  $g = 1(t)$



**Рис. 3. Графики управления гибридной системы:**

*a* — при  $g = 0$ ; *б* — при  $g = 1(t)$

**Fig. 3. Control graphs of the hybrid system:**

*a* — with  $g = 0$ ; *б* — with  $g = 1(t)$

В процессе моделирования уравнения (50) были проинтегрированы при  $u = u_{r,k}$  (59) функцией ode45 MATLAB. Коэффициент  $k_{r,g}(x_k)$  был вычислен по выражениям (48), (49), а коэффициенты  $k_1(x_k)$ ,  $k_2(x_k)$  — по соотношениям (52), (32), (54)—(56) с заменой  $\tilde{x}_k$  на  $x_k$ , начиная с  $t = 0$ , через каждые 0,4 с. Результаты моделирования гибридной системы (50), (59) при тех же корнях  $z_1^* = 0,2$ ,  $z_2^* = 0,3$  и начальных условиях представлены на рис. 1—3. На рис. 1, *a* и рис. 1, *б* приведены графики изменения переменных состояния при  $g = 0$  и  $g = 1(t)$ , соответственно.

Графики на рис. 1, *a*, рис. 2, *a* свидетельствуют об устойчивости положения равновесия гибридной системы при довольно большом периоде управления. Аналогично, из графиков на рис. 1, *б*, рис. 2, *б* следует, что несмотря на нелинейность системы можно обеспечить практически нулевое значение ошибки по задающему воздействию. Правда, и здесь ошибка не является робастной к параметрам системы.

На рис. 3 приведены графики изменения управления гибридной системы.

Сравнивая графики на рис. 1, рис. 2 и на рис. 3, легко убедиться в том, что синтезированная система является гибридной.

Как видно из табл. 1, 2 и приведенных графиков, поведение гибридной и соответствующей дискретной систем при одинаковых начальных условиях и внешних воздействиях совпадают лишь в установившихся режимах. Переходные процессы обеих систем затухающие, но их характер существенно различается. Например, в рассмотренном примере дискретная система имеет длительность переходного процесса около 1,6 с, а гибридная — порядка 4 с. По всей видимости, эти различия обусловлены тем, что обе системы являются нелинейными, свойства переходных процессов которых, как известно, существенно зависят от начальных условий, интенсивности внешних воздействий, а также от характера процессов, протекающих в самих системах.

## Заключение

Предложенный в работе метод квазилинейной дискретизации непрерывных

объектов с дифференцируемыми нелинейностями позволяет получить дискретную квазилинейную модель исходного нелинейного объекта. При этом период дискретизации может быть значительно больше того периода, который допускается при использовании формул Эйлера или Рунге—Кутты. Квазилинейные модели приводят к новому свойству нелинейных объектов: они могут быть невырожденными или вырожденными по управлению. Определяется это свойство непрерывного нелинейного объекта по его квазилинейной модели и отражает наличие связи выходной величины объекта с управлением, причем, если рассматривается синтез непрерывной нелинейной системы управления, то используется обычная квазилинейная модель. Если же ставится задача синтеза гибридной системы управления для непрерывного нелинейного объекта, то используется соответствующая дискретная квазилинейная модель. Если же дискретная система управления для заданного дискретного нелинейного объекта синтезируется АПМ методом, то оценка его невырожденности по управлению проводится непосредственно по заданным уравнениям объекта.

Если дискретная квазилинейная модель нелинейного объекта удовлетворяет условиям управляемости и невырожденности по управлению, то с применением АПМ метода можно синтезировать гибридную систему управления с нулевой ошибкой по задающему воздействию. Если же и возмущение имеет постоянную достаточно малую интенсивность, то гибридную систему можно синтезировать с некоторой ошибкой по возмущению. Область притяжения положения равновесия синтезированной предложенным методом гибридной системы определяется областью пространства состояния нелинейного объекта, в которой выполняются условия управляемости его дискретной квазилинейной модели.

Предложенный подход позволяет синтезировать астатические, инвариантные и оптимальные гибридные системы управления нелинейными объектами при разработке соответствующих методов.

#### Список литературы

1. **Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А.** Анализ и аналитический синтез цифровых систем управления: монография. СПб.: Лань, 2022. 272 с.

2. **Franklin G. F., Powell J. D., Workman M. L.** Digital Control of Dynamic Systems. 3<sup>rd</sup> ed. Addison-Wesley: New York, 1998. 580 p.

3. **Кван Н. В., Семичевская Н. П.** Гибридные системы робастного управления нелинейными объектами // Вестник АМГУ. 2018. № 51(22). С. 33—47.

4. **Kucuk S., Gungor B. D.** Inverse kinematics solution of a new hybrid robot manipulator proposed for medical purposes // 2016 Medical Technologies National Congress (TIPTEKNO). Antalya, Turkey. 2016. P. 1—4. DOI: 10.1109/TIPTEKNO.2016.78630765

5. **Шорников Ю. В., Бессонов А. В.** Унифицированный подход к компьютерному моделированию гибридных систем // Информационные технологии моделирования и управления. 2015. № 3(93). С. 286—298.

6. **Sorosh M., Kravaris C.** Discrete-time nonlinear controller synthesis by input/output linearization // AIChE Journal. 1992. Vol. 38, N. 12. P. 1923—1945.

7. **Chen B., Solis F.** Discretizations of nonlinear differential equations using explicit finite order method // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1998. Vol. 90, N. 2. P. 171—183. doi: 10.1016/S0377-0427(98)00017-X

8. **Zhang Yu., Gu J.** Control Relevant Discretization of Nonlinear Delayed Non-Affine Systems Using the Matrix Exponential Algorithm // Metallurgical and Mining Industry. 2015. N. 12. P. 48—54.

9. **Zong Y.** A discretization method for the nonlinear state delay system // Information technology journal. 2014. Vol. 13, N. 6. P. 1222—1227. doi: 10.3923/itj.2014.1222.1227

10. **Kazantzis N., Kravaris C.** Time-discretization of nonlinear control systems via Taylor method // Computers and Chemical Engineering. 1999. Vol. 23, N. 9. P. 764—784. doi: 10.1016/S0098-1354(99)00007-1

11. **Nguyen-Van T., Hori N., Nahon M.** A discrete-time model of nonlinear non-autonomous systems // 2014 American Control Conference (ACC). June 4—6, 2014. Portland, Oregon, USA. 2014. P. 5150—5155.

12. **Meena G. D., Janardhanan J.** Taylor\_Li formulation based discretization of nonlinear systems. International Journal of Dynamics and Control. 2018. Vol. 6. P. 459—467. DOI: 10.1007/s40435-017-0317-7

13. **H'mida B., Dhaou S.** Discretization of nonlinear continuous systems with time delay: State Space Approach // Proceedings of Engineering & Technology (PET). 2016. P.160—167.

14. **Гайдук А. Р.** Алгебраический синтез нелинейных стабилизирующих управлений // Синтез алгоритмов сложных систем. 1989. Вып. 7. С. 15—19.

15. **Гайдук А. Р.** Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 6. С. 283—290. DOI: 10.17587/mau.22.283—290

16. **Барбашин Е. А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 290 с.

17. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.

18. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.

19. **Гулюкина С. И., Уткин В. А.** Задача управления парогенератором в условиях неопределенности при ограничениях на фазовые переменные и управления // Известия РАН, 2023. № 2. С. 123—139.

20. **Гайдук А. Р., Плаксиенко В. С., Кабалан А. Е. А.** Алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза нелинейных астатических систем // Математические методы в технологиях и технике, 2022. № 1. С. 41—45. doi: 10.52348/2712-8873\_MMTT\_2022\_1\_41.

21. **Гайдук А. Р.** Непрерывные и дискретные динамические системы. М.: УМ и ИЦ "Учебная литература", 2004. 252 с.

22. **Chen C. T.** Linear System Theory and Design. 3<sup>rd</sup> ed. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p.

# Design of Discrete and Hybrid Nonlinear Control Systems

A. R. Gaiduk, gaiduk\_2003@mail.ru,  
Southern Federal University, Taganrog, 347922, Russian Federation

Corresponding author: **Gaiduk Anatoly R.**, Dr. of Sci., Professor, Southern Federal University,  
Taganrog, 347922, Russian Federation, e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru

Accepted on June 26, 2023

## Abstract

In this article the new method of discrete control systems design for nonlinear plants with differentiable nonlinearities is suggested. The increasing demands on the quality of control processes and the widespread use of computer technology provide ample opportunities for the design and implementation of digital control systems. However, discrete models of control plants are needed to solve this problem. In the case of linear plants, such models are created on the basis of z-transformation, Euler or Tustin formulas. In the case of nonlinear plants, these transformations are not applicable, so a large number of approximate discretization methods have been developed to date. Euler and Runge-Kutt transformations are used for these purposes most often, but they lead to satisfactory results only with very small period of discretization. In the case of automatic control systems, this requires the use of digital automation tools with very high speed, which is often economically impractical. Methods of discretization with a long period were most often developed on the basis of decomposition into series of the right-hand sides of the differential equations, transformed on Euler. Here, firstly, the problem of selecting the number of the series members, which to be retained arises, and secondly, already in the third or fourth order of the plant, the calculating ratios turn out to be extremely complex. The discretization method suggested below differs in that it is not the equations of nonlinear plants in the Cauchy form that are discretized, but the corresponding quasilinear model. In this case, a modified trapezoid method is used, and the discretization purpose is not the most accurate approximation of the original equations of the plant, but the stability of a closed nonlinear control system with rather big period. This system is designed using the algebraic polynomial-matrix method for designing of the nonlinear control systems. As a result, a hybrid nonlinear system with fairly simple algebraic calculation expressions is formed. The suggested approach makes it possible to create the control systems for nonlinear controlled plants using conventional computational automation tools.

**Keywords:** nonlinear plant, differentiable nonlinearity, discretization, modified trapezoid method, quasilinear model, discrete quasilinear model, algebraic polynomial-matrix method, nondegeneracy in control, hybrid control system

**Acknowledgements.** The research was carried out with the support of the advanced engineering school of the Southern Federal University "Cyberplatform Engineering".

For citation:

**Gaiduk A. R.** Design of Discrete and Hybrid Nonlinear Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 10, pp. 507–518 (in Russian).

DOI: 10.17587/mau.24.507-518

## References

1. **Gaiduk A. R., Plaksienko E. A.** Analysis and analytical design of digital control systems, St. Petersburg, Lan, 2022, 272 p. (in Russian).
2. **Franklin G. F., Powell J. D., Workman M. L.** Digital Control of Dynamic Systems, New York, Addison-Wesley, 1998, 580 p.
3. **Kvan N. V., Semichevskaya N. P.** Hybrid systems for robust control of nonlinear plants, *Bulletin of AmSU*, 2018, no. 51(22), pp. 33–47 (In Russian).
4. **Kucuk S., Gungor B. D.** Inverse kinematics solution of a new hybrid robot manipulator proposed for medical purposes, 2016 *Medical Technologies National Congress (TIPTEKNO)*, Antalya, Turkey, 2016, pp. 1–4, DOI 10.1109/TIPTEKNO.2016.78630765.
5. **Shornikov Yu. V., Bessonov A. V.** The unified approach to computer simulation of hybrid systems, *Information Technology of Modeling and Control*, 2015, vol. 3(93), pp. 286–298 (In Russian).
6. **Soroush M., Kravaris C.** Discrete-time nonlinear controller synthesis by input/output linearization, *AIChE Journal*, 1992, vol. 38, no. 12, pp. 1923–1945.
7. **Chen B., Solis F.** Discretizations of nonlinear differential equations using explicit finite order method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1998, vol. 90, no. 2, pp. 171–183, DOI 10.1016/S0377-0427(98)00017-X
8. **Zhang Yu., Gu J.** Control Relevant Discretization of Nonlinear Delayed Non-Affine Systems Using the Matrix Exponential Algorithm, *Metallurgical and Mining Industry*, 2015, no. 12, pp. 48–54.
9. **Zong Y.** A discretization method for the nonlinear state delay system, *Information technology journal*, 2014, vol. 13, no. 6, pp. 1222–1227, DOI 10.3923/ijtj.2014.1222.1227
10. **Kazantzis N., Kravaris C.** Time-discretization of nonlinear control systems via Taylor method, *Computers and Chemical Engineering*, 1999, vol. 23, no. 9, pp. 764–784, DOI 10.1016/S0098-1354(99)00007-1
11. **Nguyen-Van T., Hori N., Nahon M.** A Discrete-time model of nonlinear non-autonomous systems, 2014 *American Control Conference (ACC)*, June 4–6, Portland, Oregon, USA, 2014, pp. 5150–5155.
12. **Meena G. D., Janardhanan J.** Taylor\_Li formulation based discretization of nonlinear systems, *International Journal of Dynamics and Control*, 2018, vol. 6, pp. 459–467, DOI 10.1007/s40435-017-0317-7
13. **H'mida B., Dhaou S.** Discretization of nonlinear continuous systems with time delay: State Space Approach, *Proceedings of Engineering & Technology (PET)*, 2016, pp. 160–167.
14. **Gaiduk A. R.** Algebraic design of nonlinear stabilizing controls, *Synthesis of complex systems algorithms*, Taganrog, Publishing House of TRTI, 1989, no. 7, pp. 15–19 (In Russian).
15. **Gaiduk A. R.** Numerical Design Method of Quasilinear Models for Nonlinear Objects, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 283–290 (In Russian).
16. **Barbashin E. A.** Lyapunov functions, Moscow, Nauka, 1970, 290 p. (In Russian).
17. **Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z.** Numerical analysis methods, Moscow, Nauka, 1967, 368 p. (In Russian).
18. **Marcus M., Minc H.** A Survey of matrix theory and matrix inequalities, Moscow, Publishing house Nauka, 1972, 232 p. (in Russian).
19. **Gulyukina S. I., Utkin V. A.** The task of steam generator control in conditions of uncertainty under restrictions on phase variables and control, *Izvestiya RAS*, 2023, no. 2, pp. 123–139 (in Russian).
20. **Gaiduk A. R., Plaksienko V. S., Kabalan A. E. A.** Algebraic polynomial-matrix method for design of nonlinear astatic systems, *Mathematical methods in technology and technology*, 2022, no. 1, pp. 41–45, DOI 10.52348/2712-8873\_MM TT\_2022\_1\_41 (in Russian).
21. **Gaiduk A. R.** Continuous and discrete dynamic systems, Moscow, Educational and Methodological and Publishing Center "Educational Literature", 2004, 252 p. (in Russian).
22. **Chen C. T.** Linear System Theory and Design, New York, Oxford University Press, 1999, 334 p.