

Н. Е. Зубов, д-р техн. наук, проф., nezubov@bmstu.ru,
В. Н. Рябченко, д-р техн. наук, проф., ryabchenko.vn@yandex.ru,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Оптимальная стабилизация бокового движения летательного аппарата декомпозиционным методом модального синтеза

Для модели четвертого порядка бокового движения летательного аппарата с двумя органами управления получены аналитические выражения законов управления стабилизацией, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов. В основу синтеза положена двухуровневая декомпозиция объекта управления и разработанный ранее авторами метод модального управления многомерными многосвязными (ММО) объектами с оптимальным размещением полюсов замкнутой системы управления. Метод базируется на особенностях квадратического управления, получаемого путем решения нелинейного матричного уравнения Лурье—Риккати. В этом случае для оптимального регулятора необходимо, чтобы замкнутый объект управления был асимптотически устойчивым, а матрица, получаемая как произведение матрицы коэффициентов обратной связи и матрицы управления динамическим объектом, должна быть положительно определенной симметрической. С применением такого подхода получены конечные аналитические выражения для матрицы коэффициентов обратной связи, и они могут быть использованы для любого летательного аппарата, имеющего одинаковую структуру матриц собственной динамики и управления. Приведены результаты моделирования стабилизации бокового движения летательного аппарата с использованием полученных аналитических законов управления, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов и, соответственно, законов управления с применением декомпозиционного метода синтеза с теми же динамическими свойствами в виде значения полюсов замкнутой системы управления. Указанные свойства соответствуют, как и в первом случае, оптимальным значениям размещаемых полюсов. Сравнение переходных процессов по компонентам максимального отклонения органов управления показывает, что при оптимальном управлении максимальное отклонение руля направления в 1,5 раза меньше, чем при управлении с применением стандартного декомпозиционного метода. Все другие параметры переходного процесса по компонентам как вектора состояния, так и вектора управления приблизительно одинаковы.

Ключевые слова: линейная динамическая ММО-система, модальный синтез, многоуровневая декомпозиция, боковое движение летательного аппарата, оптимальное размещение полюсов

Введение

Подход к синтезу автоматического управления движением летательных аппаратов (ЛА), включая беспилотные, как правило, основано на разделении пространственного движения на продольное [1–3] и боковое [4–6]. Соответственно, и решение оптимизационных задач строится с использованием такого же подхода. Одно из направлений оптимального управления боковым движением ЛА [3] связано с методом линейно-квадратичной оптимизации в постановке задачи АКОР [4]. Этот метод обладает определенными недостатками, суть которых заключается в том, что найденное таким образом оптимальное управление является недостаточно робастным [7]. Также применяется подход, основанный на оптимизации бокового управления ЛА на основе компенсатора фазового опереже-

ния и контроллера ограничения сигнала, однако при таком подходе возникают трудности в достижении динамической стабильности. Можно отметить еще одно направление оптимизации бокового движения ЛА, основанное на применении ПИД регуляторов с минимизацией нормы матрицы коэффициентов обратной связи [8]. Однако такой подход с точки зрения оптимизации в реальном масштабе времени, как правило, легко реализуем для математических моделей с линейными стационарными матрицами состояния и управления. В данной статье рассматривается направление оптимизации бокового движения, основанное на использовании аналитических выражений, полученных декомпозиционным методом модального синтеза, что позволяет применять различные математические модели движения, включая нелинейные модели с линейно входящим управлением [9].

Постановка задачи исследования

При решении задачи стабилизации будем рассматривать боковое движение ЛА как объекта управления, заданного уравнениями в переменных состояния следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где x и u — соответственно векторы состояния и управления вида

$$x = \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \delta_H \\ \delta_\Theta \end{pmatrix}; \quad (2)$$

A и B — матрицы коэффициентов [6, 10]

$$A = \begin{pmatrix} a_z^\beta & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & a_z^\gamma \\ a_{m_x}^\beta & a_{m_x}^{\omega_x} & a_{m_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{m_y}^\beta & a_{m_y}^{\omega_x} & a_{m_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & -\text{tg} \vartheta_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{m_x}^{\delta_H} & a_{m_x}^{\delta_\Theta} \\ a_{m_y}^{\delta_H} & a_{m_y}^{\delta_\Theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

являющихся кусочно-постоянными величинами на ограниченном временном интервале движения при использовании линеаризации движения, а также постоянными в пределах одного такта работы бортовой вычислительной машины для нелинейного объекта.

Здесь β — угол скольжения; a_z^β — угловая скорость крена; ω_y — угловая скорость рыскания; γ — угол крена; α_0 — угол атаки; ϑ_0 — угол тангажа; δ_H — угол отклонения рулей направления; δ_Θ — угол отклонения элеронов; a_z^β , a_z^γ , $a_{m_x}^\beta$, $a_{m_x}^{\omega_x}$, $a_{m_x}^{\omega_y}$, $a_{m_y}^\beta$, $a_{m_y}^{\omega_x}$, $a_{m_y}^{\omega_y}$, $a_{m_x}^{\delta_H}$, $a_{m_x}^{\delta_\Theta}$, $a_{m_y}^{\delta_H}$, $a_{m_y}^{\delta_\Theta}$ — коэффициенты линеаризации [10].

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_z^\beta, & a_{12} &= \sin \alpha_0, & a_{13} &= \cos \alpha_0, & a_{14} &= a_z^\gamma, \\ a_{21} &= a_{m_x}^\beta, & a_{22} &= a_{m_x}^{\omega_x}, & a_{23} &= a_{m_x}^{\omega_y}, & a_{31} &= a_{m_y}^\beta, \\ a_{32} &= a_{m_y}^{\omega_x}, & a_{33} &= a_{m_y}^{\omega_y}, & a_{43} &= \text{tg} \vartheta_0, & b_{21} &= a_{m_x}^{\delta_H}, \\ b_{22} &= a_{m_x}^{\delta_\Theta}, & b_{31} &= a_{m_y}^{\delta_H}, & b_{32} &= a_{m_y}^{\delta_\Theta}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение объекта управления (1) в развернутом виде можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_H \\ \delta_\Theta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для синтеза управления динамическим объектом (4) воспользуемся предложенным в работе [10] подходом, который позволяет на основе применения декомпозиционного метода модального

синтеза [11] осуществить оптимальное размещение полюсов (optimal pole placement) [12]. При этом синтезируется закон оптимального управления в смысле минимума линейно-квадратического функционала [9], который имеет вид

$$K_{opt} = (K_1 B^\perp + B^+)A - \Phi_{opt}(K_1 B^\perp + B^+), \quad (5)$$

где матрица Φ_{opt} удовлетворяет следующему линейному матричному неравенству:

$$\Phi_{opt} - (K_1 B^\perp + B^+)AB < 0 \quad (6)$$

и условию

$$\text{eig}(F_{opt}) \subset C^{stab}. \quad (7)$$

Здесь B^\perp представляет собой левый делитель нуля матрицы B ; B^+ — псевдообратная матрица.

Матрица K_1 в соответствии с декомпозиционным методом [15] определяется выражением

$$K_1 = (B^\perp AB)^+ B^\perp AB^{\perp+} - \Phi_1(B^\perp AB), \quad (8)$$

где матрица Φ_1 представляет собственные значения замкнутой динамики первого уровня декомпозиции.

Линейное матричное неравенство (6) при стандартных требованиях выполнения условий управляемости

$$\forall l \in C : \text{rank}(A - lI_n | B)$$

разрешимо всегда [15], при этом можно указать подмножество решений с помощью *диагонального доминирования*:

$$\Phi_{opt} = (K_1 B^\perp + B^+)AB - \alpha I_r, \quad (9)$$

где

$$\alpha > \text{Re}(\lambda_{\max}((K_1 B^\perp + B^+)AB)). \quad (10)$$

Здесь

$$\text{Re}(\lambda_{\max}((K_1 B^\perp + B^+)AB))$$

— действительная часть максимально удаленного от мнимой оси C вправо собственного значения матрицы $(B^+ - K_1 B^\perp)AB \in R^{r \times r}$.

С использованием выражения (9) матрица коэффициентов обратной связи, обеспечивающей оптимальное размещение полюсов для модели бокового движения ЛА (2), может быть записана в виде

$$K_{opt} = (K_1 B^\perp + B^+)A - ((K_1 B^\perp + B^+)AB - \alpha I_r)(K_1 B^\perp + B^+), \quad (11)$$

а управление определяется выражением

$$u = \begin{pmatrix} \delta_H \\ \delta_\Theta \end{pmatrix} = -Kx. \quad (12)$$

Основной результат

Применим подход, основанный на использовании выражений (5)–(11) для управления ЛА как объектом управления, описываемым математической моделью (4). Для этого определим все необходимые матрицы, входящие в выражение (11):

$$B^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{32}}{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}} & \frac{-b_{22}}{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}} & 0 \\ 0 & \frac{-b_{31}}{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}} & \frac{b_{21}}{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, матрицы $B^\perp AB^{\perp+}$ и $B^\perp AB$ определены как

$$B^\perp AB^{\perp+} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B^\perp AB = \begin{pmatrix} a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ b_{21} + a_{43}b_{31} & b_{22} + a_{43}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя $(B^\perp AB)^+$, имеем

$$(B^\perp AB)^+ = \begin{pmatrix} \frac{b_{22} + a_{43}b_{32}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})} & \frac{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})} \\ \frac{b_{21} + a_{43}b_{31}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})} & \frac{a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})} \end{pmatrix}.$$

Используя далее выражение (8) и назначая матрицу

$$F_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

получим матрицу коэффициентов обратной связи первого уровня

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{pmatrix},$$

где

$$k_{11}^1 = -\frac{a_{11}b_{22} + b_{21}g_{12} - b_{22}g_{11} + a_{11}a_{43}b_{32} + a_{43}b_{31}g_{12} - a_{43}b_{32}g_{11}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})};$$

$$k_{12}^1 = -\frac{a_{14}b_{22} + a_{14}a_{43}b_{32} - a_{12}b_{21}g_{12} + a_{12}b_{22}g_{11} - a_{13}b_{31}g_{12} + a_{13}b_{32}g_{11}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})};$$

$$k_{21}^1 = -\frac{b_{21}g_{11} - a_{11}b_{21} + b_{22}g_{12} - a_{11}a_{43}b_{31} + a_{43}b_{31}g_{11} + a_{43}b_{32}g_{12}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})};$$

$$k_{22}^1 = \frac{a_{14}b_{21} + a_{14}a_{43}b_{31} + a_{12}b_{21}g_{11} + a_{12}b_{22}g_{12} + a_{13}b_{31}g_{11} + a_{13}b_{32}g_{12}}{(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})}.$$

Далее, вводя обозначение

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = (K_1 B^\perp + B^+)AB \quad (15)$$

и принимая во внимание равенства

$$d_{12} = -(a_{14}b_{22}^2 + a_{14}a_{43}^2b_{32}^2 + a_{11}a_{12}b_{22}^2 + a_{13}a_{32}b_{22}^2 - a_{13}a_{23}b_{32}^2 + a_{11}a_{13}a_{43}b_{32}^2 - a_{12}a_{32}a_{43}b_{22}^2 + a_{12}a_{23}a_{43}b_{32} + a_{11}a_{13}b_{22}b_{32} - a_{13}a_{22}b_{22}b_{32} + a_{13}a_{33}b_{22}b_{32} + 2a_{14}a_{43}b_{22}b_{32} + a_{13}b_{21}b_{32}g_{12} - a_{13}b_{22}b_{31}g_{12} + a_{11}a_{12}a_{43}b_{22}b_{32} + a_{12}a_{22}a_{43}b_{22}b_{32} - a_{12}a_{33}a_{43}b_{22}b_{32} - a_{12}a_{43}b_{21}b_{32}g_{12} + a_{12}a_{43}b_{22}b_{31}g_{12}) / ((b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})),$$

$$d_{21} = (a_{14}b_{21}^2 + a_{14}a_{43}^2b_{31}^2 + a_{11}a_{12}b_{21}^2 + a_{13}a_{32}b_{21}^2 - a_{13}a_{23}b_{31}^2 + a_{11}a_{13}a_{43}b_{31}^2 - a_{12}a_{32}a_{43}b_{21}^2 + a_{12}a_{23}a_{43}b_{31}^2 + a_{11}a_{13}b_{21}b_{31} - a_{13}a_{22}b_{21}b_{31} + a_{13}a_{33}b_{21}b_{31} + 2a_{14}a_{43}b_{21}b_{31} + a_{13}b_{21}b_{32}g_{12} - a_{13}b_{22}b_{31}g_{12} + a_{11}a_{12}a_{43}b_{21}b_{31} + a_{12}a_{22}a_{43}b_{21}b_{31} - a_{12}a_{33}a_{43}b_{21}b_{31} - a_{12}a_{43}b_{21}b_{32}g_{12} + a_{12}a_{43}b_{22}b_{31}g_{12}) / ((b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})),$$

$$d_{22} = ((b_{22} + a_{43}b_{32})(a_{14}b_{21} + a_{14}a_{43}b_{31} + a_{12}b_{21}g_{11} + a_{12}b_{22}g_{12} + a_{13}b_{31}g_{11} + a_{13}b_{32}g_{12}) / ((b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})) - b_{32}((a_{23}b_{31} / (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) - a_{33}b_{21} / (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})) - ((a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})(b_{21}g_{11} - a_{11}b_{21} + b_{22}g_{12} - a_{11}a_{43}b_{31} + a_{43}b_{31}g_{11} + a_{43}b_{32}g_{12}) / ((b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(a_{13} - a_{12}a_{43})) - b_{22}(a_{22}b_{31} / (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) - a_{32}b_{21} / (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}))),$$

получим выражение для матрицы (9), представляющей оптимальные значения полюсов:

$$F_{opt} = \begin{pmatrix} d_{11} - \alpha & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} - \alpha \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В результате на основании выражения (11) получим матрицу оптимальной обратной связи:

$$K_{opt} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \quad (17)$$

с элементами

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= a_{11}k_{11}^1 - d_{12}k_{21}^1 - k_{11}^1(d_{11} - \alpha) + \\
 &\quad + a_{21}b_{32}/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) - \\
 &\quad - a_{31}b_{22}/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\
 k_{12} &= (a_{22}b_{32} - a_{32}b_{22} + b_{31}d_{12} - b_{32}d_{11} + \\
 &\quad + b_{32}\alpha + b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}k_{12}^1 + \\
 &\quad + a_{12}b_{21}b_{32}k_{11}^1 - a_{12}b_{22}b_{31}k_{11}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\
 k_{13} &= -(a_{33}b_{22} - a_{23}b_{32} + b_{21}d_{12} - b_{22}d_{11} + \\
 &\quad + b_{22}\alpha - a_{13}b_{21}b_{32}k_{11}^1 + a_{13}b_{22}b_{31}k_{11}^1 - \\
 &\quad - a_{43}b_{21}b_{32}k_{12}^1 + a_{43}b_{22}b_{31}k_{12}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\
 k_{14} &= a_{14}d_{12}k_{22}^1 - k_{12}^1(d_{11} - \alpha); \\
 k_{21} &= a_{11}k_{21}^1 - d_{21}k_{11}^1 - k_{21}^1(d_{22} - \alpha) - \\
 &\quad - a_{21}b_{31}/(b_{21}b_{12} - b_{22}b_{31}) + \\
 &\quad + a_{31}b_{21}/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\
 k_{22} &= (a_{22}b_{31} - a_{32}b_{21} - b_{31}d_{22} + b_{32}d_{21} + \\
 &\quad + b_{11}\alpha - b_{21}b_{32}k_{22}^1 + b_{22}b_{31}k_{22}^1 - \\
 &\quad - a_{12}b_{21}b_{32}k_{21}^1 + a_{12}b_{22}b_{31}k_{21}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\
 k_{23} &= (a_{33}b_{21} - a_{23}b_{31} - b_{21}d_{22} + b_{22}d_{21} + \\
 &\quad + b_{21}\alpha + a_{13}b_{21}b_{32}k_{21}^1 - a_{13}b_{22}b_{31}k_{21}^1 + \\
 &\quad + a_{43}b_{21}b_{32}k_{22}^1 - a_{43}b_{22}b_{31}k_{22}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\
 k_{24} &= a_{14}k_{21}^1 - d_{21}k_{12}^1 - k_{22}^1(d_{22} - \alpha).
 \end{aligned}$$

Наконец, используя соотношения (1), (17) получаем следующий закон оптимального управления:

$$u = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (18)$$

Для элементов матрицы (17) закона управления (18) получены аналитические выражения, и, следовательно, коэффициенты усиления в каналах управления легко реализуемы в реальном масштабе времени.

Численное моделирование

Для проверки синтезированных законов управления воспользуемся числовыми значениями матриц коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} -0,1520 & 0,4226 & 0,9063 & 0,0960 \\ -18,6430 & -1,0600 & -1,6000 & 0 \\ -1,7570 & -0,1530 & -0,1360 & 0 \\ 0 & 1 & -0,4663 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1,8740 & -8,9660 \\ -1,4600 & 0,3040 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом зададим полюса для первого уровня декомпозиции с помощью следующей матрицы:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -1,9000 & 0,6000 \\ -0,6000 & -1,9000 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Используя формулу (15), имеем

$$D = \begin{pmatrix} 1,3602 & -1,4683 \\ 0,2210 & 1,0918 \end{pmatrix}.$$

Примем параметр $\alpha = 2,7651$ и в соответствии с (16) получим

$$F_{opt} = \begin{pmatrix} -1,4049 & -1,4683 \\ 0,2210 & -1,6733 \end{pmatrix}.$$

Используя соотношения (17), окончательно получим матрицу коэффициентов обратной связи следующего вида:

$$K_{opt} = \begin{pmatrix} -0,1440 & -0,0615 & -1,8149 & 0,3781 \\ 1,6544 & -0,2955 & 0,3793 & -0,3246 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

При этом матрица собственной динамики в замкнутом контуре "ЛА—система управления" принимает вид

$$\begin{aligned}
 A - BK_{opt} &= \\
 &= \begin{pmatrix} -0,1520 & 0,4226 & 0,9063 & 0,0960 \\ -4,0795 & -3,8251 & -1,6000 & -2,2017 \\ -2,4701 & -0,1530 & -2,9011 & 0,6507 \\ 0 & 1 & -0,4663 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Вычисляя полюса замкнутой оптимальной системы, получим

$$\begin{aligned}
 \text{eig}(A - BK_{opt}) &= \\
 &= \{-1,5391 + 0,5536i, -1,5391 - 0,5536i, \\
 &\quad -1,9000 + 0,6000i, -1,9000 - 0,6000i\}.
 \end{aligned}$$

На рис. 1 приведены переходные процессы изменения компонент вектора состояния и вектора управления при реализации закона управления (18) с матрицей обратной связи (20) при начальных значениях вектора состояния в системе единиц СИ $x = -[0,158 \ 0,094638 \ -0,0493 \ 0,2189]^T$.

Если использовать подход к синтезу закона стабилизации бокового движения, изложенный в работе [8], тогда на первом уровне декомпозиции можно использовать матрицу F_1 в виде (19), а F_{opt} , соответственно, в виде

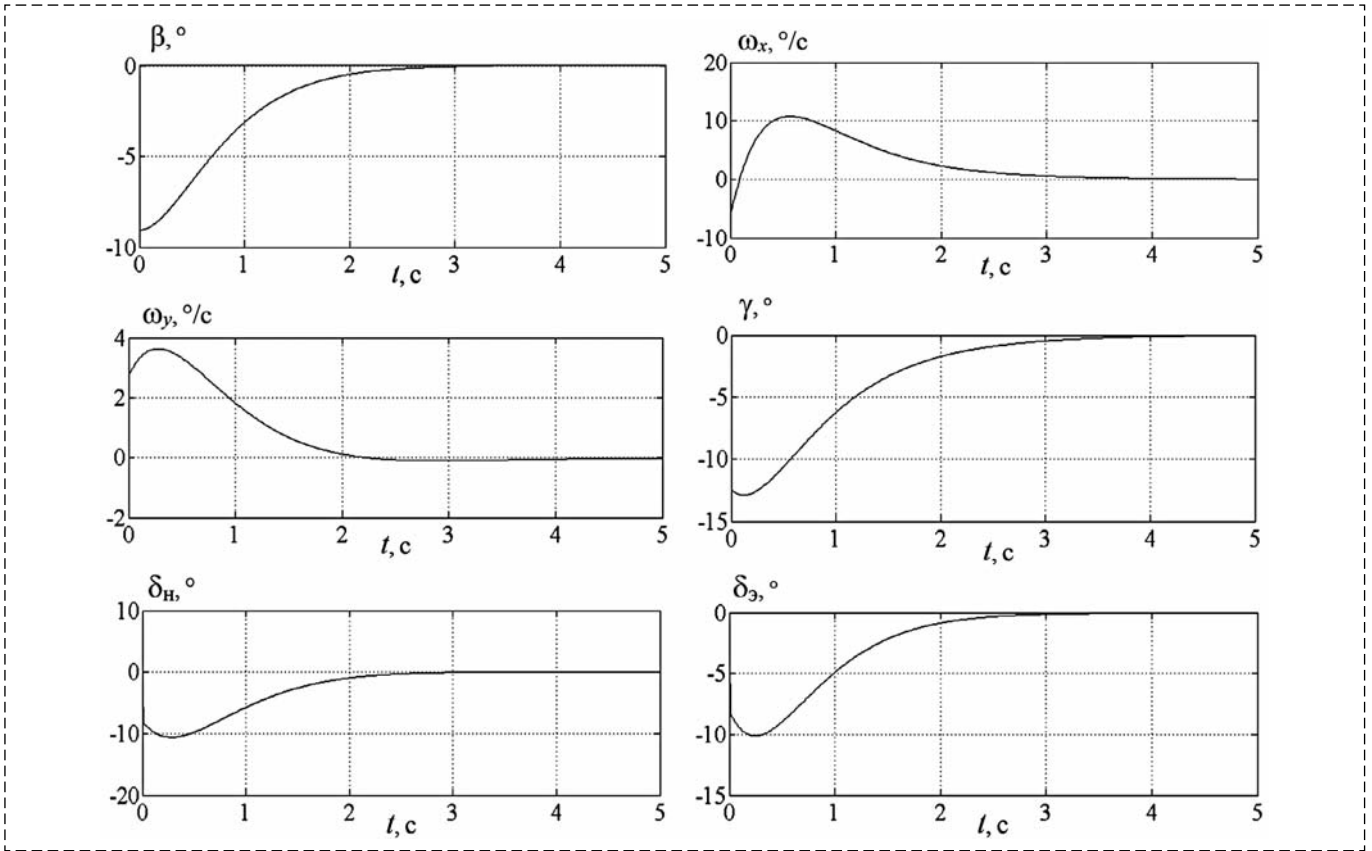


Рис. 1. Переходные процессы при оптимальном размещении полюсов
 Fig. 1. Transient processes with optimal pole placement

$$F_{opt} = \begin{pmatrix} g_{01} & g_{02} \\ -g_{02} & g_{01} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$g_{01} = \text{Re}(\text{eig}F_{opt}), \quad g_{02} = \text{Im}(\text{eig}F_{opt}).$$

Тогда аналитические выражения для коэффициентов матрицы обратной связи

$$K = \begin{pmatrix} k_{11}^d & k_{12}^d & k_{13}^d & k_{14}^d \\ k_{21}^d & k_{22}^d & k_{23}^d & k_{24}^d \end{pmatrix} \quad (22)$$

синтезированного закона управления с использованием методики, изложенной в работе [8], имеют вид

$$\begin{aligned} k_{11}^d &= a_{11}k_{11}^1 - k_{11}^1g_{01} - k_{21}^1g_{02} + \\ &+ a_{21}b_{32}/(b_{21}b_{12} - b_{22}b_{31}) - a_{31}b_{22}/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\ k_{12}^d &= (a_{22}b_{32} - a_{32}b_{22} + b_{31}g_{02} - b_{32}g_{01} + \\ &+ b_{21}b_{32}k_{12}^1 - b_{32}b_{31}k_{12}^1 + a_{12}b_{21}b_{32}k_{11}^1 - \\ &- a_{12}b_{22}b_{31}k_{11}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\ k_{13}^d &= (a_{23}b_{32} - a_{33}b_{22} + b_{21}g_{02} - b_{22}g_{01} + \\ &+ a_{13}b_{21}b_{32}k_{11}^1 - a_{13}b_{22}b_{31}k_{11}^1 + a_{43}b_{21}b_{32}k_{12}^1 - \\ &- a_{43}b_{22}b_{31}k_{12}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{14}^d &= a_{14}k_{11}^1 - k_{12}^1g_{01} - k_{22}^1g_{02}; \\ k_{21}^d &= a_{11}k_{21}^1 - k_{11}^1g_{02} - k_{21}^1g_{01} - \\ &- a_{21}b_{31}/(b_{21}b_{12} - b_{22}b_{31}) + a_{31}b_{21}/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\ k_{22}^d &= (a_{32}b_{21} - a_{32}b_{31} + b_{31}g_{01} + b_{32}g_{02} + \\ &+ b_{21}b_{32}k_{22}^1 - b_{22}b_{31}k_{22}^1 + a_{12}b_{21}b_{32}k_{21}^1 - \\ &- a_{12}b_{22}b_{31}k_{21}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\ k_{23}^d &= (a_{23}b_{31} - a_{33}b_{21} + b_{21}g_{01} + b_{22}g_{02} - \\ &- a_{13}b_{21}b_{32}k_{21}^1 + a_{13}b_{22}b_{31}k_{21}^1 - a_{43}b_{21}b_{32}k_{22}^1 + \\ &+ a_{43}b_{22}b_{31}k_{22}^1)/(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}); \\ k_{24}^d &= a_{14}k_{21}^1 + k_{12}^1g_{02} - k_{22}^1g_{01}. \end{aligned}$$

При этом собственно закон управления можно записать следующим образом:

$$u = \begin{pmatrix} k_{11}^d & k_{12}^d & k_{13}^d & k_{14}^d \\ k_{21}^d & k_{22}^d & k_{23}^d & k_{24}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (23)$$

На рис. 2 представлены переходные процессы, полученные при использовании закона управления (23).

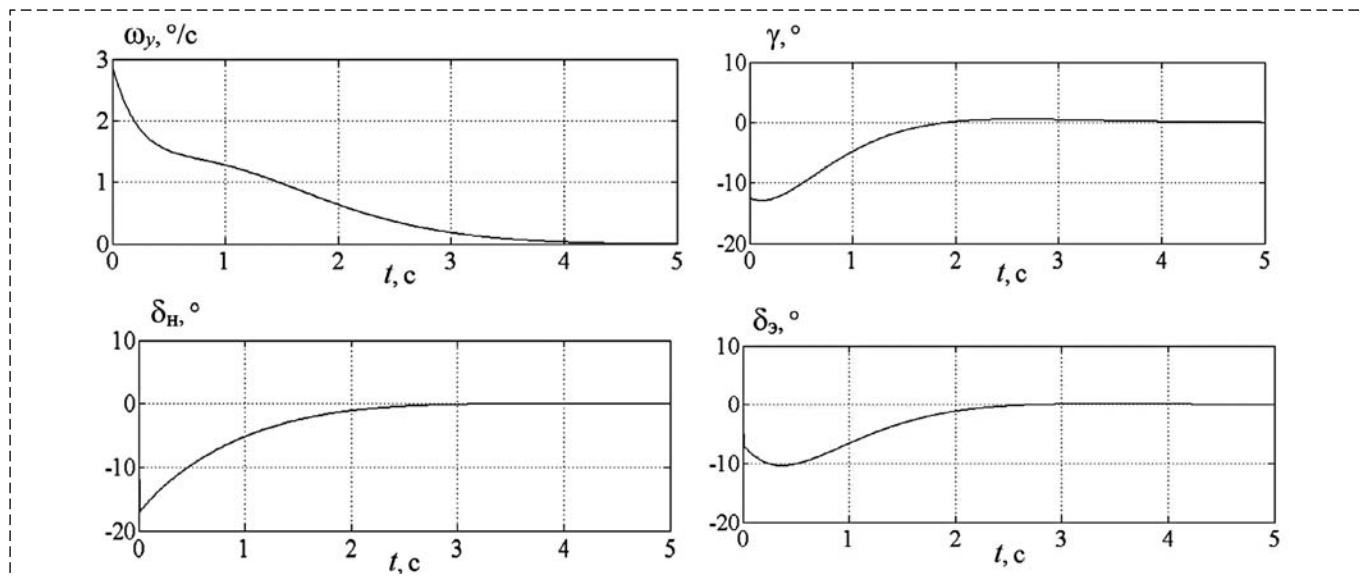


Рис. 2. Переходные процессы при декомпозиционном методе синтеза
 Fig. 2. Transient processes in the decompositional method of synthesis

Сравнивая переходные процессы на рис. 1 и 2, нетрудно заметить, что максимальное отклонение руля направления при оптимальном управлении в 1,5 раза меньше, нежели при модальном управлении, синтезированном посредством декомпозиционного метода. Учитывая тот факт, что доверенные углы отклонения органов управления ЛА ограничены, в данном случае следует считать оптимальный закон управления предпочтительным.

Заключение

В работе получена аналитическая матрица коэффициентов обратной связи в задаче стабилизации бокового движения ЛА, обеспечивающая оптимальное размещение полюсов. Приведены графики переходных процессов как для оптимального управления, так и для стандартного модального управления, синтезированного декомпозиционным методом. Сравнение переходных процессов показало преимущество оптимального подхода по отношению к стандартному модальному с точки зрения минимизации расходов рулей при одном и том же запасе устойчивости (одном и том же размещении полюсов). Полученные в работе результаты демонстрируют эффективность аналитического синтеза как оптимальных законов управления движением ЛА, так и обычных, которые построены на основе декомпозиционного метода управления.

Список литературы

1. Qian M., Li Q., Zhao Q., Sun W. Design of longitudinal controller based on acceleration command with flight test // 2015 34th Chinese Control Conference (CCC). 2015. P. 5391–5396.

2. Романенко Л. Г., Романенко А. Г., Самарова Г. Г. Управление продольным движением летательного аппарата при отсутствии в автопилоте сигнала по углу тангажа // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 4. С. 25–29.

3. Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Proletarskii A. V. Об одном подходе к синтезу робастной системы стабилизации продольного движения гипотетического самолета // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23, № 4. С. 216–224.

4. Kramar V. A., Kabanov A. A. The optimization of the lateral motion control system of an unmanned aerial vehicle // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021. P. 1061 012021.

5. Loya A., Duraid M., Maqsood K., Khan R. R. The Implementation and Lateral Control Optimization of a UAV Based on Phase Lead Compensator and Signal Constraint Controller // Engineering, 2018. Vol. 10. P. 704–729.

6. Zubov N. E. и др. Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 14–20.

7. Wonham W. M. Linear multivariable control systems: a geometric approach. Berlin: Springer, 1979.

8. Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Poklad M. N. Параметризация аналитических законов управления боковым движением летательного аппарата // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, Приборостроение. 2016. № 2. С. 3–17.

9. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.

10. Буков В. Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.

11. Alexandridis A. T., Galanos G. D. Optimal pole-placement for linear multi-input controllable systems // IEEE Trans. Circuits Syst. 1987. V. CAS-34. P. 1602–1604.

12. Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V. Complete Pole Placement Method For Linear MIMO Systems // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 1. С. 11–18.

13. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N. Synthesis of Controls for a Spacecraft that Optimize the Pole Placement of the Closed Loop Control System // Journ. Computer and Systems Sciences International. 2012. Vol. 51. P. 431–444.

Optimization of Stabilization of the Lateral Motion of an Aircraft Using the Decomposition Method of Modal Synthesis

N. E. Zubov, nezubov@bmstu.ru, V. N. Ryabchenko, ryabchenko.vn@yandex.ru,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: Zubov Nikolay E., Professor of Department of Automatic Control Systems Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: nezubov@bmstu.ru

Accepted May 15, 2023

Abstract

For the fourth-order model of the lateral motion of an aircraft with two controls, analytical expressions for the laws of stabilization control are obtained, which ensure the optimal placement of the poles. The synthesis is based on a two-level decomposition of the control object and the method of modal control of MIMO systems developed earlier by the authors with the optimal placement of the poles of a closed control system. The method is based on the features of quadratic control obtained by solving the nonlinear Lurie-Riccati matrix equation. In this case, for the optimal controller, it is necessary that the closed control object be asymptotically stable, and the matrix obtained by the product of the matrix of feedback coefficients by the control matrix of the dynamic plant must be positive-definite symmetric. Using this approach, final analytical expressions for the matrix of feedback coefficients are obtained and, accordingly, they can be used for any aircraft that has the same structure of its own dynamics and control matrices. The results of modeling the stabilization of the lateral motion of an aircraft using the obtained analytical control laws that ensure the optimal placement of the poles and, accordingly, the control laws using the decomposition method of synthesis with the same dynamic properties in the form of the value of the poles of a closed control system are presented. These properties correspond, as in the first case, to the optimal values of the placed poles. A comparison of transient processes by components of the maximum deviation of the controls shows that with optimal control, the maximum deviation of the rudder is 1.5 times less than with control using the standard decomposition method. All other parameters of the transient process, both in terms of the components of the state vector and the control vector, are approximately the same.

Keywords: linear dynamic MIMO system, modal synthesis, multilevel decomposition, aircraft lateral motion, optimal pole placement

For citation:

Zubov N. E., Ryabchenko V. N. Optimization of Stabilization of the Lateral Motion of an Aircraft Using the Decomposition Method of Modal Synthesis, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 8, pp. 433–439.

DOI: 10.17587/mau.24.433-439

References

1. Qian M., Li Q., Zhao Q., Sun W. Design of longitudinal controller based on acceleration command with flight test, *2015 34th Chinese Control Conference (CCC)*, 2015, pp. 5391–5396.
2. Romanenko L. G., Romanenko A. G., Samarova G. G. Aircraft Longitudinal Control without a Pitch Command in the Autopilot, *Izv. Vuz. Av. Tekhnika*, 2014, vol. 57, no. 4, pp. 25–29 (in Russian).
3. Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Proletarsky A. V. On One Approach to the Synthesis of Robust Control of the Stabilization of the Hypothetical Aircraft Longitudinal Motion, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 4, pp. 216–224 (in Russian).
4. Kramar V. A., Kabanov A. A. The optimization of the lateral motion control system of an unmanned aerial vehicle, *2021 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2021, pp. 1061 012021.
5. Loya A., Duraid M., Maqsood K., Khan R. R. The Implementation and Lateral Control Optimization of a UAV Based on Phase Lead Compensator and Signal Constraint Controller, *Engineering*, 2018, vol. 10, pp. 704–729.
6. Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Fomichev A. V. Synthesis of control laws for aircraft lateral motion

at the lack of data on the slip angle: analytical solution, *Russian Aeronautics*, 2017, vol. 60, no. 1, pp. 64–73 (in Russian).

7. Wonham W. M. Linear multivariable control systems: a geometric approach, Berlin, Springer, 1979.

8. Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Poklad M. N. Parameterization of analytic control laws for aircraft lateral motion, *Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.*, 2016, no. 2, pp. 3–17 (in Russian).

9. Krasovskii A. A. ed. Handbook of Automatic Control Theory, Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).

10. Bukov V. N. Adaptive predictive flight control systems, Moscow, Nauka Publ., 1987 (in Russian).

11. Alexandridis A. T., Galanos G. D. Optimal pole-placement for linear multi-input controllable systems, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1987, vol. CAS-34, pp. 1602–1604.

12. Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V. Complete Pole Placement Method For Linear MIMO Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 11–18.

13. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikanov M. Sh., Ryabchenko V. N. Synthesis of Controls for a Spacecraft that Optimize the Pole Placement of the Closed Loop Control System, *Journ. Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 431–444.